# Zpracování neurčitosti

## – klasické přístupy

7. listopadu 2023

# Příčiny neurčitosti

**Neurčitost** je charakteristickým rysem složitých systémů. Vlastní povaha reality způsobuje, že poznatky, které z ní získáváme, jsou neurčité (vágní).

**Příčiny neurčitosti:**

- problémy s daty, např.:
  - chybějící nebo nedostupná data
  - nespolehlivá data (např. z důvodu chyb měření)
  - nepřesná nebo nekonzistentní reprezentace dat
- nejisté znalosti, např.:
  - znalost nemusí být platná ve všech případech
  - znalost může obsahovat nepřesné (vágní) pojmy

# Druhy neurčitosti

**Neurčitost v bázi znalostí** – jsou v ní uloženy nejen exaktně dokázané znalosti, ale i nejrůznější heuristiky, které se expertovi či odborníkovi osvědčily při rozhodování v praxi. Pak se tam objevují pojmy jako „často“, „většinou“, „obvykle“, které je třeba kvantifikovat, např. ve škále od „určitě ano“ přes „nevím“ až k „určitě ne“. Takovou znalostí s neurčitostí může být např. „jestliže pacient má teplotu, obvykle je mu předepsán acylpyrin“; pacient totiž „často“ má teplotu v důsledku chřipky, ale „někdy“ může mít teplotu, protože je v poúrazovém šoku.

**Neurčitost v datech** – konkrétní data o daném případu bývají zatížena neurčitostí způsobenou nepřesně určenými hodnotami nebo subjektivním pohledem uživatele, např. odpovědi na míru jistoty v nějakém tvrzení. Může to být např. odpověď „snad ano“ na dotaz, zda pacient má teplotu.

# Vyjádření neurčitosti

**Neurčitost** bývá ve znalostních systémech vyjadřována obvykle numerickými parametry, které se v různých systémech nazývají různě, např. *váhy*, *míry*, *stupně důvěry*, *faktory jistoty*.

Tyto numerické parametry se přiřazují jednotlivým tvrzením nebo pravidlům. Často nabývají hodnot z intervalu ⟨0,1⟩, ⟨–1,1⟩, popř. také např. ⟨–5, 5⟩ (FEL-Expert) apod.

Většinou se neurčitost vyjadřuje jediným číslem. Postupně se však začínají prosazovat přístupy, v nichž je neurčitost vyjadřována dvojicí čísel (tato dvojice může být např. interpretována jako interval hodnot).

Existují však také systémy, kde se pracuje s kvalitativně vyjádřenými neurčitostmi.

# Přístupy ke zpracování neurčitosti

Přístupy založené na *ad hoc* modelech, použitých např. v:

- systému MYCIN (zde se pracuje s faktory jistoty),
- systému PROSPECTOR (pseudobayesovské přístupy).

Přístupy založené na teoretických principech, např. na:

- teorii pravděpodobnosti,
- teorii fuzzy množin,
- teorii fuzzy míry (sem patří např. Dempster-Shaferova teorie a teorie možnosti).

# Problémy při zpracování neurčitosti

Omezme se nejprve na problematiku pravidlových systémů. Při zpracování neurčitosti se u nich střetáváme s následujícími problémy (problémy aproximativní inference):

- Jak kombinovat neurčitá data v předpokladu pravidla ?
- Jak kombinovat neurčitost předpokladu pravidla a neurčitost pravidla jako celku ?
- Jak stanovit neurčitost závěru, k němuž vede několik pravidel ?

# Bayesovský přístup

Bayesovský přístup je nejstarší a nejlépe definovanou technikou pro zpracování neurčitosti.

Uvažujme znalost ve tvaru pravidla $E \rightarrow H$, které říká, že předpoklad (*evidence*) $E$ podporuje závěr (*hypothesis*) $H$

(je-li splněn předpoklad $E$, pak platí závěr $H$ apod.).

Neurčitost závěru $H$ v závislosti na předpokladu $E$ může být kvantifikována pomocí podmíněné pravděpodobnosti $P(H \mid E)$:

$$P(H \mid E) = \frac{P(E \mid H)P(H)}{P(E)}$$

Bayesovy vzorce:

$$P(H \mid E) = \frac{P(E \mid H)P(H)}{P(E \mid H)P(H) + P(E \mid \neg H)P(\neg H)}$$

# Pravděpodobnostní šance

Apriorní pravděpodobnostní šance:

$$O(H) = \frac{P(H)}{P(\neg H)} = \frac{P(H)}{1 - P(H)}$$

Aposteriorní pravděpodobnostní šance:

$$O(H \mid E) = \frac{P(H \mid E)}{P(\neg H \mid E)} = \frac{P(H \mid E)}{1 - P(H \mid E)}$$

Pravděpodobnost lze ze šance vypočítat podle vztahu

$$P = \frac{O}{O + 1}$$

# Míry postačitelnosti a nezbytnosti

Z Bayesových vzorců pro $P(H|E)$ a $P(\neg H|E)$ plyne, že

$$O(H|E) = L \cdot O(H) \text{ , kde } L = \frac{P(E|H)}{P(E|\neg H)},$$

$L$ se nazývá *mírou postačitelnosti* (velká hodnota $L >> 1$ říká, že předpoklad $E$ je postačitelný k dokázání hypotézy $H$).

Obdobně platí $O(H|\neg E) = L^{\wedge} \cdot O(H)$, kde $L^{\wedge} = \frac{P(\neg E|H)}{P(\neg E|\neg H)}$

je *míra nezbytnosti* (malá hodnota $0 < L^{\wedge} << 1$) znamená, že předpoklad $E$ je nezbytný pro dokázání $H$).

# Váhy pravidel v prospectorovských systémech

Míry postačitelnosti a nezbytnosti zadává pro každé pravidlo expert jako svoje subjektivní váhy. Pravidlo $E \rightarrow H$ se vlastně chápe jako pravidlo

if $E$ then $H$ with váha $L$ else $H$ with váha $L^{\wedge}$,

resp. jako dvojice pravidel

$$E \rightarrow H\,(L) \quad \text{a} \quad \neg E \rightarrow H\,(L^{\wedge}).$$

Místo uvedených měr může expert zadat pravděpodobnosti $P(H\,|\,E)$ a $P(H\,|\neg E)$, z nichž se pak tyto míry vypočtou. Např.:

$$L = \frac{P(H\,|\,E)}{1 - P(H\,|\,E)} \cdot \frac{1 - P(H)}{P(H)}$$

# Vliv neurčitosti tvrzení *E*

Předpokládejme, že k výroku *E* není přiřazena logická hodnota pravda nebo nepravda, ale je k dispozici pouze nějaké relevantní pozorování *E´*. Pak platí

$$P(H \mid E') = P(H \wedge E \mid E') + P(H \wedge \neg E \mid E') =$$
$$= P(H \mid E \wedge E')P(E \mid E') + P(H \mid \neg E \wedge E')P(\neg E \mid E')$$

Můžeme udělat tento oprávněný předpoklad: Víme-li, že *E* je pravda nebo nepravda, pak pozorování *E´* nepřináší žádnou další informaci o *H*. Potom můžeme předchozí vztah přepsat do tvaru

$$P(H \mid E') = P(H \mid E)P(E \mid E') + P(H \mid \neg E)P(\neg E \mid E') =$$
$$= P(H \mid \neg E) + \left[P(H \mid E) - P(H \mid \neg E)\right]P(E \mid E')$$

# Aproximace výpočtu $P(H|E')$

Vztah $P(H \mid E') = P(H \mid \neg E) + \left[P(H \mid E) - P(H \mid \neg E)\right] P(E \mid E')$

představuje lineární závislost $P(H \mid E')$ na $P(E \mid E')$.

Protože však výzkumník nebo expert nezávisle zadává $P(H \mid E)$ a $P(H \mid \neg E)$ (přímo nebo prostřednictvím $L$ a $L$^) a dále $P(H)$ a $P(E)$, je uvedená přímka přeurčena a může dojít k rozporu (zadávané údaje nemusejí být konzistentní).

Proto se výše uvedený teoretický vztah nahrazuje nějakou aproximací. Obvykle se fixují tyto tři body grafu:

$[0, P(H \mid \neg E)]$, $[P(E), P(H)]$ a $[1, P(H \mid E)]$.

Mezi těmito body se pak závislost interpoluje lineárními funkcemi.

# Příklad aproximace *P*(*H* | *E*´)

Uvažujme případ $P(H \mid \neg E) \leq P(H) \leq P(H \mid E)$. Pak můžeme $P(H \mid E')$ aproximovat vztahy

$$P(H \mid E') = P(H \mid \neg E) + \frac{P(H) - P(H \mid \neg E)}{P(E)} \cdot P(E \mid E')$$

pro $0 \leq P(E \mid E') \leq P(E)$ a

$$P(H \mid E') = P(H) + \frac{P(H \mid E) - P(H)}{1 - P(E)} \cdot \big(P(E \mid E') - P(E)\big)$$

pro $P(E) \leq P(E \mid E') \leq 1$.

# Kombinace více pravidel

Mějme pravidla $E_1 \rightarrow H$, $E_2 \rightarrow H$, … , $E_n \rightarrow H$. Pak se aposteriorní šance za předpokladu nezávislosti pravděpodobností $E_i$ vypočte takto:

$$O(H \mid E_1 \wedge ... \wedge E_n) = L_1 \cdot ... \cdot L_n \cdot O(H)$$

Pokud místo přesných pravděpodobností $E_i$ jsou k dispozici pouze pozorování $E_i'$, pak se aposteriorní šance vypočte podle vztahu

$$O(H \mid E_1' \wedge ... \wedge E_n') = L_1' \cdot ... \cdot L_n' \cdot O(H)$$

kde

$$L_i' = \frac{O(H \mid E_i')}{O(H)}$$

# Kombinace předpokladů

Vztahy pro výpočet vah disjunkce, konjunkce a negace předpokladů přebírají prospectorovské systémy z fuzzy logiky:

Disjunkce předpokladů:

$$P(E_1 \vee E_2) = \max\{P(E_1), P(E_2)\}$$

Konjunkce předpokladů:

$$P(E_1 \wedge E_2) = \min\{P(E_1), P(E_2)\}$$

Negace předpokladu:

$$P(\neg E) = 1 - P(E)$$

# Výhody a nevýhody bayesovských přístupů

***Výhody:***

- dobré teoretické základy
- dobře definovaná sémantika rozhodování

***Nevýhody:***

- potřeba velkého množství pravděpodobnostních dat
- nebezpečí neúplnosti a nekonzistence dat
- předpoklad nezávislosti pravděpodobností $E_i$ bývá v praxi zřídka splněn
- možnost ztráty informace v důsledku popisu neurčitosti jedním číslem
- obtížnost vysvětlování

# Přístup založený na faktorech jistoty

Faktory jistoty (*certainty factors*) byly poprvé použity v systému MYCIN. Cílem bylo eliminovat některé slabiny čistě pravděpodobnostního přístupu.

Znalosti jsou vyjádřeny opět ve tvaru pravidel $E \rightarrow H$, přičemž s každým pravidlem je spojen faktor jistoty *CF*. Tento faktor nabývá hodnot z intervalu ⟨–1, 1⟩ a je určen mírami důvěry (*MB*) a nedůvěry (*MD*):

$$CF = \frac{MB - MD}{1 - \min\{MB, MD\}}$$

Faktor jistoty vyjadřuje stupeň důvěry v hypotézu *H*, jestliže předpoklad *E* je pravdivý ( 1 znamená absolutní důvěru, –1 absolutní nedůvěru).

# Míra důvěry

Míra důvěry (*measure of belief*):

$$MB(H, E) = \begin{cases} 1 & \text{pro } P(H) = 1 \\ \dfrac{\max\{P(H \mid E), P(H)\} - P(H)}{1 - P(H)} & \text{jinak} \end{cases}$$

Míra důvěry nabývá hodnot z intervalu $\langle 0,1 \rangle$. Vyjadřuje stupeň, ve kterém je důvěra v hypotézu *H* podporována pozorováním předpokladu *E.*

# Míra nedůvěry

Míra nedůvěry (*measure of disbelief*):

$$MD(H,E) = \begin{cases} 1 & \text{pro } P(H) = 0 \\ \dfrac{P(H) - \min\{P(H \mid E), P(H)\}}{P(H)} & \text{jinak} \end{cases}$$

Míra nedůvěry nabývá hodnot z intervalu $\langle 0,1 \rangle$. Vyjadřuje stupeň, ve kterém je nedůvěra v hypotézu *H* podporována pozorováním předpokladu *E*.

# Vliv neurčitosti předpokladů

Předpoklad $E$ v pravidlu $E \rightarrow H$ nemusí být znám s absolutní jistotou. Může být odvozen z jiného pravidla nebo zadán uživatelem s nějakým faktorem jistoty $CF(E)$. Pak se výsledný faktor jistoty vypočte takto:

$$CF_{new}(H, E) = CF_{old}(H, E) \cdot CF(E)$$

Jestliže přitom předpoklad $E$ obsahuje konjunkci nebo disjunkci dílčích podmínek, pak se při výpočtu $CF(E)$ použijí následující vzorce:

$$CF(E_1 \wedge E_2) = \min\{CF(E_1), CF(E_2)\}$$

$$CF(E_1 \vee E_2) = \max\{CF(E_1), CF(E_2)\}$$

# Kombinace více pravidel

Mějme pravidla $E_1 \rightarrow H$, $E_2 \rightarrow H$, … , $E_n \rightarrow H$ . Označme $CF_n = CF(H, E_1, \ldots, E_n)$. Výpočet $CF_n$ se pak provede podle vzorce:

$$CF_n = \begin{cases} CF_{n-1} + CF(H, E_n) \cdot \left(1 - CF_{n-1}\right) & \text{pro } CF_{n-1} > 0 \text{ a } CF(H, E_n) > 0 \\ CF_{n-1} + CF(H, E_n) \cdot \left(1 + CF_{n-1}\right) & \text{pro } CF_{n-1} < 0 \text{ a } CF(H, E_n) < 0 \\ \dfrac{CF_{n-1} + CF(H, E_n)}{1 - \min\left\{\left|CF_{n-1}\right|, \left|CF(H, E_n)\right|\right\}} & \text{jinak} \end{cases}$$

# Výhody a nevýhody faktorů jistoty

***Výhody:***

- jednoduchý a účinný výpočetní model
- shromáždění potřebných dat podstatně snazší než v jiných metodách
- snazší implementace vysvětlovacího modulu

***Nevýhody:***

- chybí pevné teoretické základy
- implicitní předpoklad nezávislosti pravděpodobností $E_i$