Jaroslav Peregrin

LOGIKA A LOGIKY

Systém klasické výrokové logiky,
jeho rozšíření a alternativy

ISBN 80-200-1187-0

Poděkování

Kniha, jako je tato, nemůže být tak docela dílem jediného člověka. Dovést ji do podoby koherentního celku bych nedokázal bez pomoci svých kolegů a studentů, kteří po mně text četli a upozornili mě na spoustu chyb a nedůsledností, které se v něm vyskytovaly. Můj dík v tomto směru patří zejména (v abecedním pořadí) Liboru Běhounkovi, Martě Bílkové, Vojtěchu Kolmanovi a Michalu Pelišovi. Za připomínky k různým částem rukopisu jsem vděčen i Petru Hájkovi, Pavlu Maternovi, Milanu Matouškovi, Grahamu Priestovi, Prokopu Sousedíkovi, a Vladimíru Svobodovi. Kniha vznikla v rámci projektu podpořeného grantem AV ČR číslo A0009001/00.

Toto je v podstatě faksimile knižního vydání s tím, že v něm byly opraveny chyby. To se týká zejména stran 111-115, které jsou zcela přepsány, plus nějakých drobností po celé knize. (Na tu nejhorší chybu mě upozornil Vít Punčochář; za upozornění na některé drobnější vděčím Vladimíru Svobodovi.) Všechny změny oproti knižnímu vydání jsou vyznačeny červeně. V dubnu 2012, autor.

OBSAH

1 Co a k čemu je logika?

1.1 Co je předmětem logiky?

Ačkoli o logice existuje spousta knih, otázce, co to vůbec je logika, je věnována menší pozornost, než by bylo záhodno. Ti, kdo si tuto otázku kladou, na ni navíc často dávají tak zjevně neudržitelné odpovědi, že je až zarážející, že se s nimi někdo může spokojit. Týká se to především ‚lidové' verze vysvětlení toho, co logika je, která se ovšem objevuje i v renomovaných učebnicích logiky: tvrzení, že logika je nauka o tom, jak myslíme či jak bychom měli myslet[1]. Zdá se mi být zřejmé, že stačí jenom krátce konfrontovat pravidla, jaká nacházíme v učebnicích logiky, s tím, jakými cestami se ubírají naše faktické myšlenkové pochody, abychom nahlédli, že ty dvě věci mohou mít jenom pramálo společného.

Popsat, jak fakticky myslíme, je ovšem velice problematické. Jisté se však zdá být, že v rámci myšlení hrají zcela zásadní roli představivost, metoda pokusu a omylu a podobně – že faktické myšlení je tedy na míle vzdálené pravidlům z učebnic logiky. A tento stav rozhodně není zapříčiněn tím, že bychom mysleli ‚nesprávně' v tom smyslu, že by myšlení, ve kterém bychom se například představám vyhýbali, vedlo k lepším výsledkům. Je poměrně jasně doložitelné, že ani ty nejefektivnější způsoby myšlení – tedy například způsoby, jakými se ti nejgeniálnější vědci dobírali svých převratných objevů – nijak nepřipomínají řetězce logických odvození[2].

Budeme-li tedy tvrdit, že logika je popisem myšlení či návodem k tomu, jak myslet, budeme nejenom tvrdit něco, čemu budeme moci stěží sami věřit, ale navíc tím budeme logiku pasovat do úlohy podniku předem odsouzeného

[1] S ní se můžeme běžně setkat zejména v pracích matematických logiků. Tak již u klasika Davida Hilberta najdeme prohlášení, podle kterého jde v jeho matematické teorii logického dokazování [Beweistheorie] o „zaprotokolování pravidel, podle kterých skutečně postupuje naše myšlení" (citováno podle Halletta, 1994). Podobnou charakteristiku předmětu logiky jakožto „vědy o správném uvažování" najdeme i v Sochorově nedávné české učebnici matematické logiky (2001, s. 7).

[2] Je to zřejmě právě toto, co vede k pohrdlivému postoji, jaký často vůči logice zaujímají lidé, kteří studují – či se v rámci budování systémů umělé inteligence pokoušejí napodobovat – faktické lidské myšlení (*viz* např. Johnson-Laird, 1987).

k neúspěchu[3]. Na to velice důrazně poukázal už zakladatel moderní symbolické logiky Gottlob Frege[4]: ten dokládal, že jakékoli sbližování logiky s psychologií vede na scestí – zatímco psychologie pojednává o subjektivním, předmětem logiky je pravdivost a vyplývání, a to, co je pravda či co z čeho vyplývá, jsou *objektivní* fakta.

Co to tedy logika je, když ne nauka o tom, jak myslet? Přehlédneme-li dlouhou historii tohoto oboru a množství rozmanitých způsobů, kterými bývá vymezován, žádnou jednoznačnou odpověď nenajdeme. Zdá se nicméně, že na jednom se většina těch, kdo se logikou od antiky až po dnešek zabývali a zabývají, shodnou: logika nám má tak či onak pomáhat určovat, která zdůvodnění, které typy argumentací či které důkazy jsou přijatelné a které ne.

Jakou roli hraje v rámci lidských aktivit zdůvodňování? Především si všimněme, že zdůvodňování je, na rozdíl od myšlení, *společenskou* záležitostí: ve své hlavě se mohu k nějakému závěru dopracovat *jakýmkoli* způsobem, který přesvědčí *mne*; avšak zdůvodnění, která mají být přesvědčivá obecně, musejí mít určitou podobu. A tvrdím-li něco veřejně a vážně, měl bych to být takto zdůvodnit schopen.

Bude-li tedy někdo tvrdit, že existuje nekonečně mnoho prvočísel či že všichni podnikatelé jsou darebáci, budeme, pokud s ním v tom nebudeme zajedno, po něm moci právem požadovat, aby svoje tvrzení zdůvodnil. Pokud by nám pak jeho zdůvodnění připadalo správné, asi bychom se s jeho názorem museli ztotožnit (protože pak bychom viděli, že má *pravdu*); pokud bychom však v jeho argumentaci našli nějaké mezery či nesprávnosti, nic by nás k tomu nenutilo.

Kdy je nějaké zdůvodnění správné? Zřejmě tehdy, když přesvědčivě ukazuje, že jsou-li splněny předpoklady, ze kterých vychází, nemůže neplatit závěr, který zdůvodňuje. To znamená, že zdůvodnění je správné, jestliže závěr *vyplývá* z předpokladů, a jestliže je toto zdůvodnění *přesvědčivé* v tom smyslu, že lze předpokládat, že rozumný člověk, který jej vyslechne nebo přečte, nebude moci o tom, že daný závěr z daných předpokladů vyplývá, dost dobře pochybovat. Jak je možné takovéto přesvědčivosti dosáhnout? Standardní metoda, kterou v rámci moderní logiky systematicky rozpracoval Frege, spočívá v tom, že se onen vztah mezi předpoklady a závěrem, o kterém se tvrdí, že je vyplýváním, rozmělní na

[3] Podrobněji o tom *viz* Peregrin (2000b, zejm. §6).

[4] Podrobný výklad Fregových názorů podává Kolman (2002).

řetězec kroků, které na sebe jasně navazují a které jsou přitom tak jednoduché, že u nich již o tom, že jsou to případy vyplývání, nelze rozumně pochybovat.

Jak bych například někoho, kdo by si myslel, že všichni podnikatelé jsou darebáci, přesvědčoval, že nemá pravdu? Předpokládejme, že bych s ním měl společného známého, řekněme Karla, o kterém bychom oba věděli, že je to podnikatel, a kterého bychom oba měli za slušného člověka. Pak by moje argumentace mohla vypadat následovně:

Karel přece není darebák.
A Karel je přece taky podnikatel.
Takže existuje podnikatel, který není darebák.
Takže ne všichni podnikatelé jsou darebáci.

A zdá se, že jakmile by můj partner souhlasil s předpoklady týkajícími se Karla (*Karel není darebák, Karel je podnikatel*), mohl by již zbytek tohoto zdůvodnění zpochybnit jenom stěží. Kdyby totiž někdo tvrdil, že je sice pravda, že existuje podnikatel, který není darebák, ale že z toho nevyplývá, že ne všichni podnikatelé jsou darebáci, naše diskuse s ním by asi rychle skončila – získali bychom pocit, že si z nás buď tropí žerty, nebo prostě správně nechápe význam slov jako „existuje" či „všichni".

Krok od prvních dvou uvedených tvrzení k třetímu i krok od něj k tomu čtvrtému je totiž tak elementární, že pokud by někdo požadoval, abychom některý z nich dále zdůvodňovali, nabyli bychom přesvědčení, že (pokud nám jenom nedělá nějaké naschvály) nemůže dobře rozumět tomu, co výroky, o které jde, říkají. Součástí porozumění těmto výrokům, a potažmo slovům, ze kterých se skládají, je totiž i jejich správné užívání v takovýchto jednoduchých souvislostech. Součástí porozumění slovům „existuje", „všichni", „který" a „není" je to, že, je-li pravdivý výrok tvaru *Existuje X, který není Y*, musí být pravdivý i výrok *Ne všichni X jsou Y* – že tedy ten druhý vždy vyplývá z toho prvního a že ho z něj tedy můžeme v rámci argumentace vyvodit.

To naznačuje, že elementární případy vyplývání, se kterými logika pracuje, mají co dělat se sémantikou některých slov našeho jazyka; že jsou to pravidla, která (spolu)určují význam těchto slov. Logika se ovšem zajímá o to, čím je zdůvodňování charakterizováno napříč různými typy diskurzů (samozřejmě ovšem ne takovými typy, v jejichž rámci není pro zdůvodňování místo, jako je například poezie); to znamená zabývá se pravidly charakterizujícími význam takových ‚univerzálních' slůvek a konstrukcí, jako jsou „všichni", „a", „nebo", „tudíž", „být" atd.

Logika se tedy zabývá vyplýváním a zejména jeho převáděním na řetězce elementárních vyvození (*neboli* inferencí), *která jsou věcí významů určitých univerzálních ‚argumentačních' slůvek našeho jazyka. Můžeme tedy říci, že studuje* (*a standardizuje*) *inferenční strukturu jazyka, konkrétně její nejzákladnější kostru.*

1.2 Formální logika

Nemá-li se tedy logika opírat o psychologii, má hledat oporu v nějakém jiném oboru? Moderní logikové nasměrovali logiku zejména do blízkosti matematiky. Jak je možné využít v logice matematiku? Jak nám mohou matematické metody pomoci studovat vyplývání? Pro názornost si představme, že bychom věty jazyka očíslovali. Vztah vyplývání bychom tak mohli převést na vztah mezi čísly: namísto vztahu mezi výrokem A a výroky A_1, ..., A_n bychom mohli uvažovat o vztahu mezi *číslem* výroku A a *čísly* výroků A_1, ..., A_n. A tento vztah bychom se mohli pokusit nějak matematicky charakterizovat: například najít nějaký algoritmus, podle kterého by bylo možné číslo výroku A z čísel výroků A_1, ..., A_n získat právě v případě, že z nich tento výrok vyplývá.

Moderní logika ovšem zpravidla nepostupuje tak, že by výroky skutečně převáděla na čísla[5]. Důvodem je, že to nemá zapotřebí: matematika se totiž ve dvacátém století přestala omezovat na studium čísel a počítání s nimi a stala se spíše něčím jako obecnou naukou o strukturách[6] (nejexplicitněji v rámci své disciplíny, které se dnes říká *univerzální algebra*[7]). Někteří matematikové tak logiku nahlédli přímo jako jistou kapitolu matematiky: tak jako matematika studuje abstraktní struktury či abstraktní entity, studuje podle nich logika jednu

[5] I když takovýto převod sehrál v rámci jejího vývoje podstatnou roli – za jeho pomoci totiž Kurt Gödel dospěl k jistě nejpřevratnějšímu výsledku v rámci moderní matematické logiky, totiž k důkazu nezúplnitelnosti jakékoli teorie obsahující aritmetiku. *Viz* Malina a Novotný (1996).

[6] Jestliže tedy algebra původně vznikla tak, že se abstrahovalo od konkrétních čísel (jaká se vyskytují například ve vztahu 1+2=2+1) a začaly se studovat *struktury* číselných operací (prostřednictvím vzorců, jako je $a+b=b+a$), pak v rámci moderní matematiky dochází k dovršení další abstrakce, v jejímž důsledku jsou již struktury studovány obecně, bez toho, že by musely být nějak spjaty s *čísly*. Srov. Devlin (1976; Úvod).

[7] *Viz* Cohn (1981); či v češtině Ježek (1976).

specifickou strukturu (nebo nějakou omezenou skupinu příbuzných struktur) – totiž tu, která určuje, co z čeho vyplývá.

Podstatné je, že chceme-li studovat vyplývání matematicky (ať již prostřednictvím převedení výroků na čísla, nebo přímo, metodami algebry), musíme přirozený jazyk ‚zpřesnit‘: musíme jednoznačněji vymezit, co je a co není větou a co z čeho vyplývá, protože v přirozeném jazyce zřejmě existuje spousta mezních a více či méně neurčitých případů. To vede v důsledku k tomu, že se přirozený jazyk, který je normálním médiem našeho argumentování a dokazování, nahradí nějakou svou více či méně idealizovanou variantou – jazykem, ve kterém je stále vyjádřitelná nějaká podstatná část toho, o co v rámci argumentací jde, který je však ‚zvládnutelný‘ prostředky matematiky.

To ovšem není nic výjimečného – logika tak jenom prošla, podobně jako mnohé další vědy, tím, čemu bychom mohli říkat *matematizace*. Její pointou je, zjednodušeně řečeno, že se na zkoumaném předmětu izoluje a matematicky zachytí nějaká relevantní struktura, a ta se potom zkoumá prostředky matematiky – výsledky takového zkoumání se pak promítají zpět na zkoumaný předmět. Tak například chceme-li prozkoumat, jak bude proudit voda v nějakém systému potrubí (jestli se například potrubí jejím tlakem někde neroztrhne), můžeme se o tom mnoho podstatného dozvědět tak, že změříme parametry tohoto potrubí (tloušťku stěn, průměry trubek, pevnost materiálu atd.), použijeme známé parametry vody, vytvoříme z nich ‚matematický model‘ proudění v našem systému (který bude nejspíše vyjádřen jako nějaká soustava diferenciálních rovnic), z něj pak získáme určité výsledky a ty použijeme k předpovídání toho, co se bude dít, až do systému vodu skutečně pustíme.

Frege a spolu s ním další myslitelé, kteří stáli u zrodu moderní logiky, tedy dospěli k závěru, že i logická struktura našeho jazyka a našeho usuzování je něčím, co se vyplatí izolovat a ‚matematizovat‘, abychom to mohli zkoumat účinnými metodami matematiky. V tomto případě je ovšem interakce mezi předmětem výzkumu (jazykem) a jeho modelem oboustranná: nejenom že model vzniká idealizací a zpřesňováním jazyka, ale může se zpětně promítat na jazyk v tom smyslu, že některá zpřesnění, která vyžaduje matematizovaný model, můžeme začít pociťovat jako normy pro užívání jazyka. Víceznačnou a vágní českou spojku „jestliže ... pak ...“ můžeme například v modelu zachytit jako exaktně definovanou pravidlem, podle kterého je jí spojené souvětí pravdivé právě tehdy, když je nepravdivá věta následující po „jestliže ...“ nebo je pravdivá ta, která následuje po „pak ...“. Taková reglementace nás pak může vést k tomu, že tuto spojku začneme – alespoň v rámci některých forem diskurzu (například v rámci vědy) – fakticky užívat pouze v tomto exaktním smyslu.

Přes to všechno však nelze říci, že by se logika redukovala na nějakou kapitolu matematiky. Tím by se z ní totiž vytratilo to, co jí je konstitutivní, totiž že by měla být nástrojem rozhodování o tom, která (faktická) zdůvodnění jsou správná a která nikoli. Moderní logika je sice s matematikou úzce propojena a systematicky využívá její nástroje, matematika však pro ni zůstává prostředkem, nikoli cílem.

Vezměme příklad: Definujeme-li, že výrok tvaru $A \rightarrow B$ bude pravdivý právě tehdy, když je výrok A nepravdivý nebo je výrok B pravdivý, stane se otázka, je-li výrok tvaru

$$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

pravdivý (bez ohledu na pravdivost nebo nepravdivost výroků A, B a C), otázkou prozkoumání důsledků naší definice, a tedy v tomto smyslu otázkou povýtce matematickou[8]. (V tomto konkrétním případě jde samozřejmě o výsledek matematicky dosti triviální.) To, že odpověď na ni je kladná, pak ovšem není z hlediska logiky jako takové *samo o sobě* nijak zajímavé. Zajímavé se to stane teprve poté, co se ukáže, jak lze symbol „$\rightarrow$“ s takto definovanými vlastnostmi nahlédnout jako idealizovanou variantu nějakého prvku našeho jazyka (tj. našeho přirozeného prostředku formulování argumentů, úsudků a důkazů) – například spojení „jestliže ... pak ...“. A to není žádnou samozřejmostí. Logika tedy není matematikou, stejně tak jako fyzika není řešením diferenciálních rovnic – jakkoli je moderní logika (stejně tak jako moderní fyzika) bez matematických metod nepředstavitelná.

Formálně-logický model jazyka je tu tedy primárně proto, abychom skrze něj studovali – a potažmo standardizovali – faktický jazyk a faktické formy usuzování v něm. Můžeme se na něj samozřejmě podívat i jako na čistě matematickou strukturu, tj. odhlédnout od toho, z čeho jsme tuto strukturu extrahovali a k čemu nám slouží. To může být někdy, provádíme-li její povýtce matematická zkoumání, dokonce velice užitečné – soustředíme-li se na čistě formální aspekty této struktury, pak by nás informace o tom, jak a proč se tato

[8] Definujeme-li implikaci tak jako výše a označíme-li symbolem i funkci, která přiřazuje pravdivostním hodnotám P a N hodnotu N a všem ostatním dvojicím pravdivostních hodnot P, stane se z otázky pravdivost uvedeného výroku otázka toho, zda má složená funkce, která pravdivostním hodnotám x, y a z přiřadí hodnotu $i(i(x,i(y,z)),i(i(x,y),i(x,z)))$, pro všechny argumenty hodnotu P.

struktura vztahuje k něčemu mimo sebe, jedině rozptylovaly (a v horším případě mátly). Zásadní je ovšem neustále rozlišovat obě perspektivy, ze kterých můžeme takový model nahlížet: perspektivu, ze které jej vidíme jenom jako prostředek, který nám zprostředkovává zkoumání (pravidel) faktického jazyka a faktického usuzování, a perspektivu, ze které jej vidíme jako vlastní předmět našeho zkoumání (zatímco v prvním případě se díváme, dalo by se říci, *skrz* něj, v tom druhém hledíme spíše jako by *na* něj)[9].

Studium formálně-logických struktur ovšem dává, jak se ukázalo zejména v souvislosti s převratnými výsledky Kurta Gödela, vzniknout celému spektru velice netriviálních matematických problémů; a tak lze hovořit o víceméně zcela novém odvětví matematiky, *matematické logice*[10]. Pak je ovšem třeba si uvědomit, že nakolik je matematická logika součástí matematiky, natolik to vlastně není logika v pravém slova smyslu – je to nejvýše *nástroj* logiky (jakkoli je dnes tento nástroj pro logiku naprosto nepostradatelný).

My se v této knize budeme zabývat právě takovými více či méně idealizovanými formálními modely jazyka, které byly sestaveny pro účely logických zkoumání. (A ač budeme rozebírat jejich matematické vlastnosti, a tím se pohybovat na poli matematické logiky, budeme tak vždy činit na pozadí úvah o schopnosti těchto logických modelů zachytit pro logiku relevantní strukturu jazyka.) Takovým formálním jazykům budeme říkat *logické počty* (či *kalkuly*). Logický počet je tedy založen na nějakém formálním slovníku a gramatice, které můžeme vidět jako jakousi idealizovanou verzi nějaké části slovníku a gramatiky přirozeného jazyka.

O idealizaci hovoříme proto, že výrazy formálního jazyka představují zjednodušené a ‚zpřesněné' verze výrazů či konstrukcí přirozeného jazyka. Tak například již zmíněný operátor implikace, který je chápán jako rekonstrukce spojky „jestliže ... pak ..." v rámci klasické logiky, tvoří se dvěma větami pravdivou větu právě tehdy, když je první z nich nepravdivá nebo je ta druhá pravdivá. (Není pochyb o tom, že takto se v přirozeném jazyce spojka „jestliže ... pak ..." často chová – v mnoha případech se však také chová více či méně jinak, často například navíc mezi spojovanými větami konstatuje nějakou věcnou souvislost.) Jak už jsme ale také konstatovali, takovéto idealizace se mohou zpětně promítnout do některých forem faktického diskurzu.

[9] *Viz* o tom podrobněji Peregrin (1999, Kapitola 8; 2000a).

[10] *Viz* např. Sochor (2001).

Jestliže jsme tedy v předchozím oddíle konstatovali, že logika studuje inferenční strukturu jazyka, pak nyní můžeme konstatovat, že *moderní logika tuto strukturu studuje – a standardizuje – prostřednictvím budování jejích matematických modelů, logických počtů*.

1.3 Existuje jenom jedna, nebo více logik?

Je tedy struktura, kterou logika studuje (a standardizuje), absolutní, a existuje tedy jenom jedna logika, nebo se různé jazyky mohou svými strukturami lišit, a existují tedy netriviálně různé druhy logických počtů? Na první pohled se může zdát, že vztahujeme-li takto logiku ke struktuře *jazyka*, vede to nevyhnutelně k bezbřehému relativismu. Copak nemohou mít různé jazyky různou strukturu? A není ostatně to, že má náš jazyk tu strukturu, kterou má, jenom výsledkem náhodných historických procesů? Nebudeme tedy mít tolik logik, kolik je (potenciálních) jazyků?

Je třeba si uvědomit, že z toho, že různé jazyky se mohou různými způsoby lišit, neplyne, že by nebylo nic, co by dělalo jazyk jazykem. Psi se také mohou různými způsoby lišit – a přesto by asi stěží mohl existovat pes, který by měl ploutve a žil ve vodě, či měl křídla a létal ve vzduchu (v takovém případě by to totiž prostě nebyl pes); a podobně by těžko mohl existovat jazyk (ve skutečném, nepřeneseném smyslu toho slova), ve kterém by neexistovalo nic jako negace či jako konjunkce. Zdá se, že ona inferenční kostra, kterou si bere na mušku logika, patří k tomu, co dělá jazyk jazykem, a co tedy musí tak či onak obsahovat *každý* jazyk hodný toho jména[11].

To je důvod, proč v logice nemůže vládnout žádný bezbřehý relativismus. Znamená to tedy, že existuje jenom jedna logika? Ne tak docela. Logika, jak jsme poznamenali, *idealizuje* a *standardizuje*: vede ostré hranice tam, kde

[11] Představme si, že bychom narazili na nějaké dosud neznámé tvory, kteří by vydávali zvuky, které by mohly být jazykem. Jak bychom zjistili, zda skutečně používají jazyk, nebo jenom vydávají nějaké signály, jako mnohá zvířata či ptáci? Zdá se, že ať už bychom to prakticky uskutečnili jakkoli, stěží bychom jejich projevy označili za jazyk, kdybychom v nich nedokázali nalézt nějaké obdoby oněch základních struktur našich jazyků, které jsou tvořeny negací, konjunkcí atd. Tuto úvahu rozpracoval především Donald Davidson (1974) v rámci svého myšlenkového experimentu s tzv. *radikální interpretací*. *Viz* též Peregrin (1999, Kapitola 6).

v přirozeném jazyce nejsou, domýšlí a extrapoluje, či někdy dokonce vylepšuje – a to vytváří prostor pro různé druhy variant a alternativ. Ty jsou ovšem různé povahy. Zaprvé, analýza inferenční struktury může jít do různé hloubky: můžeme se například zastavit na úrovni, kdy se na některé výroky díváme jako na dále nerozborné celky (čímž vznikají tzv. výrokové počty, kterými se budeme zabývat v této knize), nebo můžeme jít hlouběji a analyzovat každý výrok na nějaké elementárnější složky (tím vznikají tzv. predikátové počty, kterým se hodláme věnovat v jejím pokračování).

Zadruhé, je tu jistý prostor pro alternativy i na téže úrovni abstrakce: tak například můžeme předpokládat, že všechno, čím se budeme ochotni zabývat jako výrokem, musí být pravdivé či nepravdivé (což je konstitutivní předpoklad klasické, dvojhodnotové logiky), nebo můžeme připustit, že existují i výroky, které nejsou ani pravdivé, ani nepravdivé (pak máme logiku parciální či vícehodnotovou). Je ovšem zřejmé, že v přirozeném jazyce věty, které nemají pevné pravdivostní hodnoty, existují (například věty explicitně či implicitně odkazující ke kontextu jejich užití, jako například „Já mám hlad“) – na druhé straně je však otázkou, zda nemůžeme vše, co lze vyjádřit pomocí takových vět, vyjádřit i pomocí vět, které pravdivostní hodnotu mají, a zda se tedy nelze legitimně omezovat jen na ně.

Můžeme také uvažovat o různých variantách základních logických operátorů. Tak například v podstatě každý logický počet bude obsahovat nějakou obdobu spojky „jestliže ... pak ...“ přirozeného jazyka. Užití této spojky v přirozeném jazyce je však natolik různorodé, že se za její ‚standardizované rekonstrukce‘ mohou prohlašovat operátory netriviálně různé. Spojení „jestliže ... pak ...“ se zdá být charakterizováno faktem, že z *A* a *jestliže A, pak B* vyplývá *B*; avšak platí také například to, že *Jestliže A, pak B* vyplývá z *B*? Zdá se, že v přirozeném jazyce toto není tak zcela jednoznačné; takže v jeho standardizované verzi můžeme definovat jak implikaci, pro kterou toto platí (což je případ implikace klasické logiky), tak tu, pro kterou to neplatí (jak je tomu například v rámci relevančních logik)[12].

Z dnešní perspektivy se situace může jevit tak, že existuje jedna standardní či ‚klasická‘ logika (na výrokové a predikátové úrovni) a vedle ní celá řada různých deviací, ‚neklasických‘ logik. To se ostatně odráží i v terminologii,

---

[12] Filosofické problémy související s ‚alternativností‘ logických operátorů probírá Haacková (1996).

kterou používají ti, kdo o logických systémech za hranicemi standardní logiky píší. Termín *neklasické logiky* má v názvu jak jediná česká kniha, která se tomuto tématu systematicky věnuje (Mleziva, 1970), tak zatím poslední významná kniha publikovaná na toto téma v zahraničí (Priest, 2001).

Tento pohled je ovšem problematický, protože navozuje zdání, že ‚klasická' logika se vyvinula jako jakýsi ‚přirozený druh' a že její ‚neklasické' alternativy jsou něčím druhotným. Tak tomu však historicky nebylo. Již první filosof, který se logikou systematicky zabýval, Aristotelés, považoval za integrální součást logiky například to, co dnes spadá do (‚neklasické') modální logiky. A i v rámci moderní formální logiky je vydělení ‚standardní' logiky z původně mnohem obsažnějšího pole relativně pozdní záležitostí – došlo k němu v podstatě až někdy kolem roku 1930[13]. Důvodem tohoto vydělení pak byl především fakt, že systém standardní logiky vykazoval některé velice příjemné matematické vlastnosti, které ostatní systémy postrádaly.

Toto rozdělení na ‚klasickou' a ‚neklasickou' logiku začalo navíc poněkud matoucím způsobem interagovat s rozdělením na ‚matematickou' a ‚filosofickou' logiku – někteří logici totiž začali ztotožňovat matematickou logiku s (matematickým) studiem systému klasické logiky a filosofickou logiku s (matematickým či nematematickým) studiem všeho, co je za jeho hranicemi. (Dokladem tohoto může být například *Journal of Philosophical Logic*, ve kterém je během posledních desetiletí většina článků věnována analýzám formálních systémů ‚neklasických' logik[14].)

Domnívám se, že jakkoli důvody, proč přisuzovat systému standardní logiky v rámci logické teorie výsadní místo, skutečně existují (většinu z nich shrnují Hájek a Sochor, 1998), vidět vše za jejími hranicemi jako pouhé kuriozity je prostě nemístné. Mnohé logické systémy za hranicemi standardní logiky jsou totiž z různých hledisek skutečně podstatné, a někdy třeba i užitečnější než ona sama. (Chceme-li například, aby byl vztah mezi argumentací, tak jak se obvykle odehrává v přirozeném jazyce, a její logickou rekonstrukcí hodně přímočarý[15],

[13] *Viz* Moore (1988).

[14] Jiným dokladem je to, že zatímco *Handbook of Mathematical Logic* (Barwise, 1977) se omezuje prakticky výhradně na standardní logiku, chceme-li informace o logikách za jejími hranicemi (ať už o jejich matematických či nematematických aspektech), najdeme je v *Handbook of Philosophical Logic* (Gabbay a Guenthner, 2002).

[15] Například proto, aby bylo ‚překládání z přirozeného jazyka' do příslušného formálně-logického jazyka víceméně mechanickou záležitostí, svěřitelnou třeba počítači.

se standardní logikou vystačíme stěží, protože její syntaktická struktura je ve srovnání se syntaktickou strukturou přirozeného jazyka beznadějně chudá.) Navíc protože v Česku se pojem *matematická logika* většinou chápe výše uvedeným způsobem, to jest jako matematická zkoumání systému *standardní* logiky, zatímco pojem *filosofická logika* se chápe jako logika ne-matematická, vzniká v oblasti matematických zkoumání logiky za hranicemi té standardní jakási země nikoho.

1.4 O této knize

V této knize tedy vyjdeme ze standardní, klasické výrokové logiky (v budoucnu bych rád vydal pokračování věnované predikátovým logikám); vystříháme se však toho, abychom logiku redukovali pouze na ni. Probereme některá její možná rozšíření a některé její alternativy (náš výčet ovšem nebude zdaleka vyčerpávající, zabývat se nebudeme například lineární logikou[16], kvantovou logikou[17], logikami založenými na teorii her[18] atd.). Nejpodrobněji se budeme věnovat logikám modálním, protože jejich sémantika, založená na ‚možných světech', je jednak velice zajímavá z filosofického hlediska, a jednak, jak uvidíme, představuje něco jako paradigma sémantiky pro logiky za hranicí té standardní.

První kapitola je věnována vymezení systému klasické výrokové logiky a prozkoumání jeho základních vlastností, jako jsou korektnost, úplnost, rozhodnutelnost, kompaktnost atd. Kapitola končí úvahami o zobecněních, které nás pak vedou, v další kapitole, k úvahám o tom, o jakých zajímavých modifikacích axiomatiky či sémantiky klasické logiky by bylo možné uvažovat. Ve snaze klasické logické operátory trochu více připodobnit tomu, co nacházíme v přirozeném jazyce, formulujeme takovou modifikaci axiomatiky klasické logiky, která dává logiku intuicionistickou. V následné snaze dodat této modifikaci axiomatiky vhodnou sémantiku pak probádáme několik vícehodnotových logik, abychom zjistili, že žádná z jejich sémantik k intuicionistické axiomatice nepasuje. V závěru třetí kapitoly se budeme zabývat jinou možností,

[16] Girard (1987).

[17] Beltrametti a Cassinelli (1981).

[18] Hintikka (1996).

jak připodobnit logickou implikaci spojení „jestliže ... pak ...“ přirozeného jazyka, a formulujeme několik systémů souvislostní a relevanční logiky.

Následující kapitolu začneme analýzou modalit (nutnosti a možnosti) a ukážeme, že logika, která by měla být schopna tyto modality zachytit, se neobejde bez nekonečného počtu sémantických hodnot; a to takových, které tvoří Boolovu algebru a jsou nejpřirozeněji explikovány jako podmnožiny nějaké základní množiny, jejíž prvky můžeme vidět jako ‚možné světy‘. Vybudujeme příslušný systém tzv. kripkovské sémantiky a dva axiomatické systémy: ‚maximální‘ modální logiku S5 a ‚minimální‘ K. V páté kapitole se pak budeme zabývat některými dalšími variacemi na téma modální logiky: prozkoumáme logiky, které jsou mezi K a S5 (T, B, S4), i logiky, které jsou ještě slabší než K (S1, S2, S3), a naznačíme i možnost dalších druhů modálních logik. Ukážeme také, jakým způsobem lze jako odrůdy modální logiky nahlédnout i logiky temporální a logiky deontické. V šesté kapitole pak ukážeme, že kripkovská sémantika je použitelná i pro některé další systémy výrokové logiky: konkrétně pro logiku intuicionistickou, pro logiky relevanční a pro logiku dynamickou. Z tohoto hlediska se tedy tento druh sémantiky jeví být paradigmatickým.

Sedmá kapitola je poněkud náročnější než ty předchozí: v ní načrtneme obecnou, algebraickou teorii sémantiky výrokových logických počtů a naznačíme, jak mohou být standardně používané sémantiky nahlédnuty jako její speciální případy. V rámci dodatků pak pojednáme o některých dalších tématech souvisejících s výrokovou logikou a podáváme také systematický přehled nejdůležitějších z těch logických systémů, které se v knize vyskytly.

Kniha si klade za cíl být *úvodem* do alternativních systémů výrokové logiky. Nepředpokládám tedy, že by k ní čtenář přicházel již s nějakými speciálními znalostmi; a pro ty čtenáře, jejichž zájem o problematiku nebude tímto úvodem zcela uspokojen, uvádím literaturu, s níž může ve studiu pokračovat. Kniha nicméně nemá být úvodem *populárním*, to znamená, že asi nebude přístupná tomu, kdo si nebude ochoten lámat hlavu s mnohdy ne zcela jednoduchými matematickými aspekty logických systémů – předpokládá tedy jistou orientaci v matematickém způsobu uvažování a vyjadřování. V každém případě doufám, že bude užitečná zejména pro studenty, kteří s logikou přijdou tak či onak do styku (tedy matematiky, informatiky, filosofy, teoretické lingvisty ap.), stejně tak jako pro všechny další odborné zájemce.

Čtenář ovšem také musí přistoupit na to, že tato kniha je napsána poněkud jiným způsobem, než jakým knihy o logice napsány bývají. Takové knihy totiž obvykle spadají do jedné ze dvou následujících kategorií. ‚Matematici‘ je píší tak, že logické systémy prostě definují a potom zkoumají důsledky svých definic; a jejich výsledky pak nemohou být poměřovány ničím jiným než matematickou správností jejich vyvození. ‚Filosofové' je naopak obvykle píší tak, jako by logické systémy zachycovaly něco faktického (nejčastěji nějakou danou, abstraktní realitu) a měly být poměřovány tím, do jaké míry je toto zachycení věrné. Já se, jak už jsem naznačil výše, domnívám, že vztah mezi logickým systémem a realitou je poněkud komplexnější (a v jistém smyslu by se dalo říci ‚dialektický'[19]) – takový systém sice musí, v poslední instanci, nějak zachycovat či explikovat něco faktického (totiž vyplývání v našich přirozených jazycích), avšak díky přípustné idealizaci může mít velkou míru autonomie, a žije tedy i trochu svým vlastním (‚matematickým') životem. Na rozdíl od výše uvedených ‚filosofů' se tedy spolu s ‚matematiky' domnívám, že dílčí vlastnosti logických systémů jsou prostě záležitostí našich definic; avšak na rozdíl od ‚matematiků' jsem spolu s ‚filosofy' přesvědčen, že zařazení takových systémů do logiky je ospravedlněno jenom natolik, nakolik lze tyto systémy nějak užitečně vztáhnout k faktickému vyplývání.

[19] *Viz* o tom podrobněji Peregrin (1999, zejména Část III).

2 Klasický výrokový počet

2.1 Syntax

Slovník jazyka klasického výrokového počtu (KVP) se skládá ze symbolů $\neg$, $\wedge$, $\vee$ a $\rightarrow$, kterým budeme říkat (*výrokové*) *operátory*, plus neomezeného počtu symbolů $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., kterým budeme říkat *atomické výroky*. *Výroky* KVP jsou vymezeny následující definicí:

(i) Každý atomický výrok je výrok;

(ii) je-li A výrok, je i $\neg A$ výrok (výroku $\neg A$ budeme říkat *negace* výroku A);

(iii) jsou-li A a B výroky, jsou i $(A\wedge B)$, $(A\vee B)$ a $(A\rightarrow B)$ výroky (výrokům $(A\wedge B)$, resp. $(A\vee B)$ budeme říkat *konjunkce*, resp. *disjunkce* výroků A a B; a výroku $(A\rightarrow B)$ pak *implikace* s *antecedentem* A a *konsekventem* B);

(iv) nic jiného, než co stanoví (i)–(iii), výrokem není.

Podle toho, jakou funkci mají z hlediska tvorby výroků, můžeme symboly jazyka KVP zřejmě rozdělit do následujících tří kategorií:

atomické výroky;
unární výrokový operátor: $\neg$ (vytváří výrok spolu s jedním výrokem);
binární výrokové operátory: $\wedge$, $\vee$ a $\rightarrow$
(vytvářejí výrok spolu se dvěma výroky).

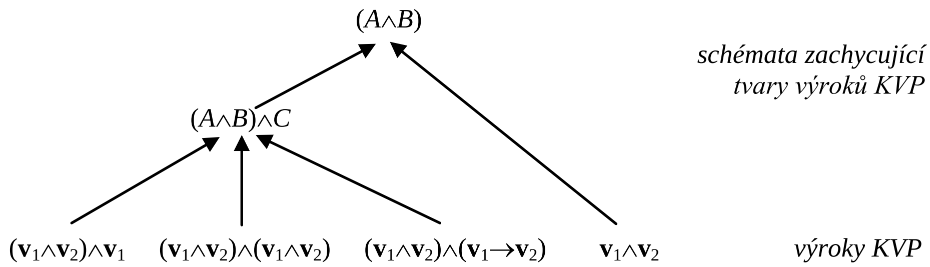
Tímto jsme definovali *syntax* jazyka KVP: vymezili jsme, co je výrokem tohoto jazyka.

Abychom učinili naše zápisy přehlednější, budeme, jak je to v logice zvykem, obvykle vynechávat nejvnějšnější závorky výrazu. Budeme tedy psát například $(A\wedge B)\wedge(C\wedge D)$ namísto $((A\wedge B)\wedge(C\wedge D))$.

Všimněme si, že používáme *dva rozdílné druhy* symbolů: symboly jazyka KVP ($\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\neg$, $\wedge$ atd.) a symboly, které nám slouží k pojednávání *o* tomto jazyce a kterým budeme říkat *parametry* (zatím jsme vystačili se dvěma, A a B, ale použijeme i další písmena abecedy a také indexovaná písmena A_1, A_2, ...). Například $A\wedge B$ není výrokem KVP, je to jenom schéma, pod které spadají některé výroky KVP, které jsou tohoto tvaru, tedy všechny konjunkce, například $\mathbf{v}_1\wedge\mathbf{v}_2$ či $\mathbf{v}_2\wedge\mathbf{v}_2$, ale i $(\mathbf{v}_1\wedge\mathbf{v}_2)\wedge(\mathbf{v}_1\wedge\mathbf{v}_2)$ či $(\mathbf{v}_1\vee\mathbf{v}_2)\wedge(\mathbf{v}_1\rightarrow\mathbf{v}_2)$.

Co to znamená, když říkáme, že je nějaký výrok ‚tvaru $A \wedge B$‘, je asi zřejmé; pro pořádek to ale rozebereme trochu podrobněji. Kdo má pocit, že žádné další rozebírání nepotřebuje, může následující pasáž vytištěnou menším písmem (podobně jako obdobně vytištěné pasáže dále v knize) přeskočit.

Řekneme-li, že výrok KVP má tvar $A \wedge B$, znamená to zřejmě, že ho lze ze znakového řetězce ‚$A \wedge B$‘ získat tak, že se parametry A a B nahradí výroky: například nahradíme-li parametr A atomickým výrokem $\mathbf{v}_1$ a parametr B atomickým výrokem $\mathbf{v}_2$, dostaneme $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2$. Parametry ale můžeme nahrazovat nejenom *atomickými* výroky – nahradíme-li parametr A výrokem $\mathbf{v}_1 \vee \mathbf{v}_2$ a parametr B výrokem $\mathbf{v}_1 \rightarrow \mathbf{v}_2$, dostaneme opět výrok tvaru $A \wedge B$, konkrétně $(\mathbf{v}_1 \vee \mathbf{v}_2) \wedge (\mathbf{v}_1 \rightarrow \mathbf{v}_2)$. Tento poslední výrok je ale zřejmě i tvaru $(A \vee B) \wedge (A \rightarrow B)$, a zřejmě platí, že *každý* výrok tvaru $(A \vee B) \wedge (A \rightarrow B)$ je i tvaru $A \wedge B$. Existuje tedy jistá hierarchie tvarů, například:



Budeme-li chtít explicitně zapsat, jakým dosazením dostaneme z $A \wedge B$ například výrok $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2$, budeme psát $A{:}\mathbf{v}_1$; $B{:}\mathbf{v}_2$. Podobně dosazení, kterým z $A \wedge B$ dostaneme $(A \vee B) \wedge (A \rightarrow B)$ (a jehož existence tedy prokazuje, že každý výrok, který je onoho druhého tvaru, je i toho prvního tvaru), zapíšeme jako $A{:}(A \vee B)$; $B{:}(A \rightarrow B)$.

Z hlediska výrokové logiky nás ovšem nezajímají jednotlivé atomické výroky; zajímají nás jenom výroky vybudované pomocí logických operátorů (a jejich logické vztahy k jejich částem a k jiným takovým výrokům). O výroky se tedy budeme zajímat výhradně z hlediska právě jejich *tvarů*. Budou nás zajímat jenom takové vlastnosti jednotlivých výroků, které jsou invariantní vzhledem k záměnám atomů (tedy například na výroku $\mathbf{v}_1 \rightarrow \mathbf{v}_2$ nás budou zajímat jenom takové vlastnosti, které sdílí s výroky $\mathbf{v}_2 \rightarrow \mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_1 \rightarrow \mathbf{v}_3$ atd. – tedy se všemi výroky tvaru $A \rightarrow B$). Proto se vlastně téměř nebudeme bavit o výrocích, ale jen o jejich tvarech, tedy fakticky o schématech, ke kterým budeme ovšem často pro jednoduchost odkazovat jako k výrokům. Budeme-li tedy říkat například ‚výrok $A \rightarrow B$‘, bude to, přísně vzato, znamenat ‚každý výrok tvaru $A \rightarrow B$‘, budeme-li říkat ‚$(A \wedge B) \wedge C$ je tvaru $(A \wedge B)$‘, bude to znamenat ‚každý výrok tvaru $(A \wedge B) \wedge C$ je i tvaru $(A \wedge B)$‘ atd.

S tím souvisí i to, že ačkoli definici jazyka KVP prezentujeme jako vymezení jednoho, ‚abstraktního' jazyka, tento jazyk budeme často chápat spíše jako prostředek vymezení určitého typu konkrétních jazyků. Protože nic z toho, čím se budeme nadále zabývat, nezávisí na konkrétní povaze atomických výroků, nebude nám nic bránit si namísto $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ... představit nějaké faktické věty (jako jsou „1+1=2", „V Česku se vaří pivo" atd.).

Všimněme si dále, jakým způsobem jsme množinu výroků jazyka KVP vymezili: nikoli tak, že bychom prostě uvedli seznam všech jejích prvků (to by samozřejmě ani nešlo, protože těchto prvků je nekonečně mnoho). Namísto toho jsme stanovili, že je to nejmenší množina, která obsahuje všechny atomické výroky a je uzavřená na ty způsoby vytváření výroků z výroků, které jsou uvedeny v bodech (ii) a (iii) definice výroků. Toto vymezení budeme nyní muset respektovat, kdykoli budeme chtít ukázat, že mají všechny výroky nějakou vlastnost, nebo kdykoli budeme chtít nějakou vlastnost výroků definovat.

Jak bychom totiž mohli ukázat, že mají všechny výroky nějakou vlastnost? Opět samozřejmě nikoli tak, že bychom je všechny, jeden po druhém, prošli. Musíme postupovat *indukcí*: ukázat, že vlastnost, o kterou jde, mají všechny atomické výroky, a že kdykoli ji mají výroky vstupující do kterékoli z konstrukcí uvedených v klauzulích (ii) a (iii) definice, má ji i výrok, který z této konstrukce vystupuje. Stejně je to i s definováním vlastností výroků.

Ukažme si to na příkladě definování číselné charakteristiky $r(A)$ výroku A udávající počet operátorů ve výroku obsažených. Její definice vypadá následovně:

(i) je-li A atomický, je $r(A) = 0$;
(ii) $r(\neg A) = r(A) + 1$;
(iii) $r(A \wedge B) = r(A \vee B) = r(A \rightarrow B) = r(A)+r(B)+1$.

Hodnotu $r(A)$ tedy stanovíme nejprve pro atomické výroky a potom udáme způsob, jak ji spočítat pro kterýkoli výrok vytvořený podle pravidel udaných v klauzulích (ii) a (iii) z hodnot těch výroků, ze kterých je tento výrok vytvořen.

V dalších oddílech se budeme zabývat různými podmnožinami množiny výroků, které budou opět vymezeny analogickým ‚rekurzivním' způsobem. Také v jejich případě tedy budeme muset postupovat, když budeme dokazovat, že všechny jejich prvky mají nějakou vlastnost, či když budeme definovat nějakou charakteristiku všech těchto prvků, induktivně.

2.2 Axiomatika

Tento oddíl začneme terminologickou poznámkou: to, o čem se nyní chystáme pojednat, se v učebnicích logiky obvykle schovává pod hlavičkou *syntax*. Tomu se však my zde chceme vyhnout, protože to považujeme za krajně zavádějící: to, co budeme probírat tady, je rozumné odlišit od syntaxe v tom slova smyslu, v jakém jsme o ní hovořili v předchozím oddíle. Budeme tedy raději hovořit o *axiomatice*.

Axiomem KVP nazveme každý výrok, který je jednoho z následujících tvarů:

(1) $A\to(B\to A)$
(2) $(A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))$
(3) $(A\wedge B)\to A$
(4) $(A\wedge B)\to B$
(5) $A\to(B\to(A\wedge B))$
(6) $A\to(A\vee B)$
(7) $B\to(A\vee B)$
(8) $(A\to C)\to((B\to C)\to((A\vee B)\to C))$
(9) $(A\to B)\to((A\to\neg B)\to\neg A)$
(10) $\neg\neg A\to A$

Odvozovacím pravidlem KVP je pravidlo *modus ponens* (zkráceně *mp*):

z výroků tvaru A a $A\to B$ odvoď B (zkráceně: $A, A\to B$ / B).

Uvedené axiomy a odvozovací pravidlo tvoří *axiomatický systém* KVP.

Odvozením výroku A z výroků A_1, ... A_n (v rámci dané axiomatiky) se nazývá posloupnost výroků, jejímž posledním prvkem je A a jejíž každý prvek je buďto axiomem, nebo jedním z A_1, ... A_n, nebo je podle pravidla (*mp*) odvoditelný z nějakých výroků vyskytujících se v posloupnosti před ním. Výrokům A_1, ... A_n pak budeme říkat *předpoklady* tohoto odvození a výroku A jeho *závěr*. Existuje-li odvození A z A_1, ... A_n, pak budeme říkat, že je A z A_1, ... A_n *odvoditelný*. Odvození z prázdné množiny předpokladů nazveme *důkazem*; a výrok, který má důkaz, nazveme *dokazatelný*.

Příkladem odvození je následující cesta od $(A \wedge B)$ k B:

1. $(A \wedge B)$	předpoklad
2. $(A \wedge B) \to B$	axiom (4)
3. B	z 1. a 2. pomocí (*mp*)

Jako poněkud méně triviální příklad uveďme odvození $A \to C$ z $A \to B$ a $B \to C$:

1. $A \to B$	předpoklad
2. $B \to C$	předpoklad
3. $(B \to C) \to (A \to (B \to C))$	axiom (1) [dosazení A:$(B \to C)$; B:A]
4. $A \to (B \to C)$	z 2. a 3. pomocí (*mp*)
5. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$	axiom (2)
6. $(A \to B) \to (A \to C)$	z 4. a 5. pomocí (*mp*)
7. $A \to C$	z 1. a 6. pomocí (*mp*)

Odvoditelnost budeme obecně chápat jako vztah mezi množinami výroků a výroky: z množiny výroků M je odvoditelný výrok A, existuje-li odvození A z nějakých výroků, které patří do M. Namísto

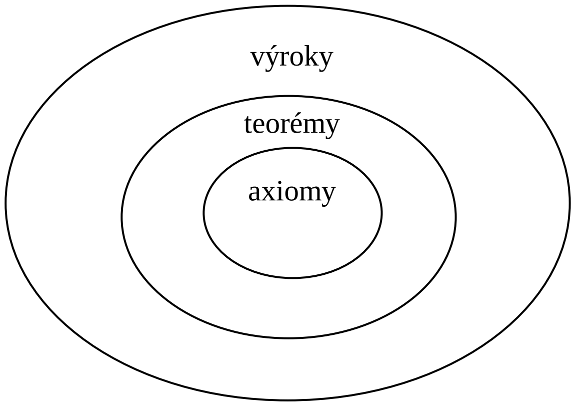
A je odvoditelný z $A_1, ..., A_n$

bychom tedy měli správně psát

A je odvoditelný z $\{A_1, ..., A_n\}$,

my se však budeme držet toho prvního, jednoduššího zápisu.

Výrok se nazývá *teorémem*, je-li dokazatelný, tj. odvoditelný z prázdné množiny. Teorémy tedy tvoří podmnožinu množiny výroků, která obsahuje množinu axiomů:



Jak plyne z následujícího důkazu, každý výrok tvaru $A \to A$ je teorémem:

1. $(A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$	
	axiom (2) $[A{:}A;\ B{:}(A \to A);\ C{:}A]$
2. $A \to ((A \to A) \to A)$	axiom (1) $[A{:}A;\ B{:}(A \to A)]$
3. $(A \to (A \to A)) \to (A \to A)$	z 2. a 1. pomocí (*mp*)
4. $A \to (A \to A)$	axiom (1) $[A{:}A;\ B{:}A]$
5. $A \to A$	z 4. a 3. pomocí (*mp*)

Je zřejmé, že jakmile jednou ukážeme, že je nějaký výrok teorémem, můžeme jej nadále v důkazech používat stejným způsobem, jakým používáme axiomy. K tomu potřebujeme nějaký systém odkazování na již dokázané teorémy; budeme je tedy značit čísly, která budou uzavřena v hranatých závorkách (na rozdíl od axiomů, které jsou značeny čísly v závorkách kulatých)[20]. Zatím jsme dokázali

[1] $(A \to A)$.

Povšimněme si, že v důkazu tohoto teorému jsme nepoužili jiné axiomy než (1) a (2) a pravidlo (*mp*). To znamená, že [1] by byl kromě KVP i teorémem

[20] Všechny takto číslované teorémy jsou pro usnadnění orientace rekapitulovány v dodatku D.

každého jiného výrokového počtu, který by s KVP sdílel tyto dva axiomy a pravidlo.

Řádky v našich odvozeních, které jsou výsledky užití pravidla (*mp*), mají, tak jak jsme je dosud zapisovali, na pravé straně čísla oněch dvou předchozích řádků, na které bylo pravidlo (*mp*) aplikováno, doprovázená označením tohoto pravidla. Naše zápisy se podstatným způsobem zjednoduší, když na tomto místě povolíme kromě čísel řádků užívat i přímo čísla axiomů a teorémů. Navíc vzhledem k tomu, že odvozovací pravidlo máme jenom jediné, nemusíme jej explicitně uvádět. Například výše uvedené odvození $A \rightarrow C$ z $A \rightarrow B$ a $B \rightarrow C$ se nám tímto způsobem zkrátí na následující (v němž nyní řádek 3 nahrazuje původní řádky 3 a 4 a řádek 4 nahrazuje původní 5 a 6):

1. $A \rightarrow B$	předpoklad
2. $B \rightarrow C$	předpoklad
3. $A \rightarrow (B \rightarrow C)$	2., (1)
4. $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$	3., (2)
5. $A \rightarrow C$	1., 4.

Obecněji, máme-li již odvozen výrok tvaru $A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow \ldots (A_{n-1} \rightarrow A_n) \ldots)$ a výroky $A_1, \ldots, A_{n-1}$, můžeme zjevně dále odvodit A_n. Anotujeme-li tedy řádek v odvození několika čísly řádků, axiomů nebo teorémů, bude to znamenat, že výrok na tomto řádku lze odvodit z výroků uvedených čísel pomocí opakovaného užití *modu ponens*. Tak můžeme předchozí odvození dále zkrátit na:

1. $A \rightarrow B$	předpoklad
2. $B \rightarrow C$	předpoklad
3. $A \rightarrow (B \rightarrow C)$	2., (1)
4. $A \rightarrow C$	3., 1., (2)

Platí ovšem nikoli jenom to, že kdykoli máme teorém tvaru $A \rightarrow B$, můžeme z A odvodit B; jak se dá ukázat, platí to i opačně: kdykoli můžeme z A odvodit B, je $A \rightarrow B$ teorémem. Důkaz tohoto tvrzení ovšem není triviální. Obvykle se provádí tak, že se ukáže, že máme-li odvození B z A, pak pro každý výrok C v tomto odvození musí být teorémem výrok $A \rightarrow C$; a protože B do této posloupnosti také patří (jako její poslední prvek), musí být teorémem i $A \rightarrow B$. Obecněji platí, že můžeme-li z $A_1, \ldots A_n$ odvodit A, pak můžeme z $A_1, \ldots, A_{n-1}$ odvodit $A_n \rightarrow A$, z $A_1, \ldots A_{n-2}$ tedy můžeme odvodit $A_{n-1} \rightarrow (A_n \rightarrow A)$, a nakonec z ničeho můžeme odvodit $A_1 \to (...(A_n \to A)...)$ – tento poslední výrok je tedy teorémem.

Exaktní důkaz tohoto tvrzení, kterému budeme říkat *věta o dedukci*, ponecháme do oddílu 2.5.1; teď si jenom pomocí příkladu ukážeme obecný princip transformace odvození A z $A_1, ..., A_n$ na odvození $(A_n \to A)$ z $A_1, ..., A_{n-1}$.

Vezměme (nezkrácené) odvození $A \to C$ z $A \to B$ a $B \to C$, které jsme provedli výše, a ukažme, jak ho transformovat na odvození $(B \to C) \to (A \to C)$ z $A \to B$. V tomto konkrétním případě tedy bude n=2, A_{n-1} bude $B \to C$ a A_n bude $A \to C$. Transformaci provedeme následovně:

1. Řádek i s předpokladem A_{n-1}, kterého se chceme ‚zbavit' (to jest v našem případě řádek 2 s předpokladem $B \to C$), změníme na i^* s výrokem $A_{n-1} \to A_{n-1}$ (v našem případě tedy na 2^* s $(B \to C) \to (B \to C)$), s odkazem na teorém [1].

2. Za každý jiný řádek i, na kterém je uveden předpoklad nebo axiom D (v našem případě tedy 1, 3 a 5), *přidáme* řádek i^* s výrokem $A_{n-1} \to D$ (například v případě našeho řádku 1. tedy přidáme řádek 1^*. $(B \to C) \to (A \to B)$), který je z D odvoditelný s použitím axiomu (1).

3. Každý řádek i, na kterém je výrok D získaný pomocí (*mp*) z výroků na řádcích j a k, nahradíme řádkem i^* s výrokem $A_{n-1} \to D$, jakožto výsledkem použití axiomu (2) na výroky uvedené na řádcích j^* a k^*.

Výsledné odvození $(B \to C) \to (A \to C)$ z $A \to B$ tedy bude vypadat následovně

1. $A \to B$	předpoklad
1^*. $(B \to C) \to (A \to B)$	1., (1)
2^*. $(B \to C) \to (B \to C)$	[1]
3. $(B \to C) \to (A \to (B \to C))$	(1) $[A:(B \to C); B:A]$
3^*. $(B \to C) \to ((B \to C) \to (A \to (B \to C)))$	3, (1)
4^*. $(B \to C) \to (A \to (B \to C))$	2^*., 3^*, (2)
5. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$	(2)
5^*. $(B \to C) \to ((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)))$	5^*., (1)
6^*. $(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$	4^*., 5^*., (2)
7^*. $(B \to C) \to (A \to C)$	1^*., 6^*., (2)

(Toto odvození by ovšem šlo dále zkrátit – řádky 2^*, 3^* a 4^* bychom mohli prostě vypustit, protože výrok 4^* je totožný s výrokem 3.) Jako cvičení ponecháme další transformaci tohoto odvození na odvození výroku $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$ z ničeho.

Z věty o dedukci a z faktu, že výrok je $A \to C$ odvoditelný z výroků $A \to B$ a $B \to C$, tedy plyne, že teorémem je výrok

[2] $(A\to B)\to((B\to C)\to(A\to C))$.

Podobně můžeme na základě věty o dedukci jednoduše nahlédnout i platnost dalších teorémů. Snadno se například z $A\to(B\to C)$, B a A odvodí C:

1. $A\to(B\to C)$	předpoklad
2. A	předpoklad
3. $B\to C$	2., 1.
4. B	předpoklad
5. C	4., 3.

Podle věty o dedukci je tedy teorémem

[3] $(A\to(B\to C))\to(B\to(A\to C))$.

Obdobně snadno dokážeme i

[4] $(A\to(A\to B))\to(A\to B)$.

Všimněme si, že důkaz věty o dedukci (který jsme zatím ovšem jenom naznačili) využívá pouze axiomy (1) a (2) a pravidlo (*mp*). Kromě toho ovšem využívá i faktu, že (*mp*) je *jediným* odvozovacím pravidlem KVP – takže můžeme zobecnit, že věta o dedukci bude platit v každém výrokovém počtu, který bude s KVP sdílet axiomy (1) a (2) a který bude mít, stejně tak jako KVP, jako jediné odvozovací pravidlo *modus ponens*. Mezi teorémy každého takového výrokového počtu tedy budou i [2], [3] a [4].

Jako příklad poněkud komplikovanějšího důkazu si nyní uveďme důkaz teorému

[5] $A\vee\neg A$,

někdy zvaného *zákon vyloučení třetího*:

1. $\neg(A\vee\neg A)\to(A\to\neg(A\vee\neg A))$	(1)
2. $A\to(A\vee\neg A)$	(6)
3. $(A\to(A\vee\neg A))\to(\neg(A\vee\neg A)\to(A\to(A\vee\neg A)))$	(1)
4. $\neg(A\vee\neg A)\to(A\to(A\vee\neg A))$	2., 3.

5. $(A\to(A\vee\neg A))\to((A\to\neg(A\vee\neg A))\to\neg A)$	(9)
6. $\neg(A\vee\neg A)\to((A\to\neg(A\vee\neg A))\to\neg A)$	4., 5., [2]
7. $(A\to\neg(A\vee\neg A))\to(\neg(A\vee\neg A)\to\neg A)$	6., [3]
8. $\neg(A\vee\neg A)\to(\neg(A\vee\neg A)\to\neg A))$	1., 7., [2]
9. $\neg(A\vee\neg A)\to\neg A$	8., [4]
10. $\neg(A\vee\neg A)\to(\neg A\to\neg(A\vee\neg A))$	(1)
11. $\neg A\to(A\vee\neg A)$	(7)
12. $(\neg A\to(A\vee\neg A))\to(\neg(A\vee\neg A)\to(\neg A\to(A\vee\neg A)))$	(1)
13. $\neg(A\vee\neg A)\to(\neg A\to(A\vee\neg A))$	11., 12.
14. $(\neg A\to(A\vee\neg A))\to((\neg A\to\neg(A\vee\neg A))\to\neg\neg A)$	(9)
15. $\neg(A\vee\neg A)\to((\neg A\to\neg(A\vee\neg A))\to\neg\neg A)$	13., 14., [2]
16. $(\neg A\to\neg(A\vee\neg A))\to(\neg(A\vee\neg A)\to\neg\neg A)$	15., [3]
17. $\neg(A\vee\neg A)\to(\neg(A\vee\neg A)\to\neg\neg A)$	10., 16., [2]
18. $\neg(A\vee\neg A)\to\neg\neg A$	17., [4]
19. $(\neg(A\vee\neg A)\to\neg A)\to((\neg(A\vee\neg A)\to\neg\neg A)\to\neg\neg(A\vee\neg A))$	(9)
20. $(\neg(A\vee\neg A)\to\neg\neg A)\to\neg\neg(A\vee\neg A)$	9., 19.
21. $\neg\neg(A\vee\neg A)$	18., 20.
22. $\neg\neg(A\vee\neg A)\to(A\vee\neg A)$	(10)
23. $A\vee\neg A$	21., 22.

Množinu výroků nazveme *axiomaticky konzistentní*, nelze-li z ní odvodit žádný výrok spolu s jeho negací. Jsou-li z nějaké množiny výroků odvoditelné úplně všechny výroky KVP, je tato množina zřejmě axiomaticky nekonzistentní (protože pak z ní je odvoditelný dokonce *kterýkoli* výrok i se svou negací). Co však není zřejmé, je, že platí i opak: jakmile není množina axiomaticky konzistentní, lze z ní vyvodit všechny výroky KVP. (To znamená, že axiomatickou konzistenci by bylo možné ekvivalentně definovat i tak, že množina je axiomaticky konzistentní právě tehdy, když z ní nejsou vyvoditelné všechny výroky.)

To, že jsou z každé axiomaticky nekonzistentní množiny odvoditelné všechny výroky, plyne z faktu, že z A a $\neg A$ je odvoditelný libovolný výrok B:

1. A	předpoklad
2. $\neg A$	předpoklad
3. $\neg B\to A$	1., (1)
4. $\neg B\to\neg A$	2., (1)

5. $\neg\neg B$	3., 4., (9)
6. B	5., (10)

Tím jsme také dokázali teorém

[6] $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$.

Dokažme na závěr tohoto oddílu ještě několik teorémů, které budeme později potřebovat. Nejprve dokažme

[7] $A \rightarrow \neg\neg A$:

1. $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg\neg A)$	(9)
2. $(\neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg A \rightarrow A) \rightarrow \neg\neg A)$	1., [3]
3. $\neg A \rightarrow \neg A$	[1]
4. $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow \neg\neg A$	3., 2.
5. $A \rightarrow (\neg A \rightarrow A)$	(1)
6. $A \rightarrow \neg\neg A$	5., 4., [2]

Tento teorém spolu s axiomem (10) říkají, že dvě negace se navzájem ‚vyruší‘: $\neg\neg A$ je ekvivalentní s A (v tom smyslu, že $\neg\neg A$ je odvoditelný z A a naopak).

Teorém

[8] $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$

nyní dokážeme tak, že dokážeme, že z $A \rightarrow B$ je odvoditelný $\neg B \rightarrow \neg A$:

1. $A \rightarrow B$	předpoklad
2. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$	(9)
3. $(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A$	1., 2.
4. $\neg B \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$	(1)
5. $\neg B \rightarrow \neg A$	4., 3., [2]

Dále dokážeme, že naopak z $\neg B \rightarrow \neg A$ je odvoditelný $A \rightarrow B$, a že je tedy teorémem i

[9] $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$:

1. $\neg B\to\neg A$	předpoklad
2. $(\neg B\to\neg A)\to((\neg B\to\neg\neg A)\to\neg\neg B)$	(9)
3. $(\neg B\to\neg\neg A)\to\neg\neg B$	1., 2.
4. $\neg\neg B\to B$	(10)
5. $(\neg B\to\neg\neg A)\to B$	3., 4., [2]
6. $\neg\neg A\to(\neg B\to\neg\neg A)$	(1)
7. $\neg\neg A\to B$	6., 5., [2]
8. $A\to\neg\neg A$	[7]
9. $A\to B$	8., 7., [2]

Následující dva teorémy jsou variacemi na téma axiomu (9); dokážeme je předvedením odvození, ze kterých plynou podle věty o dedukci.

[10] $(\neg A\to\neg B)\to((\neg A\to B)\to A)$:

1. $\neg A\to\neg B$	předpoklad
2. $(\neg A\to\neg B)\to((\neg A\to\neg\neg B)\to \neg\neg A)$	(9)
3. $(\neg A\to\neg\neg B)\to\neg\neg A$	1., 2.
4. $\neg\neg A\to A$	(10)
5. $(\neg A\to\neg\neg B)\to A$	3., 4., [2]
6. $B\to\neg\neg B$	[7]
7. $\neg A\to B$	předpoklad
8. $\neg A\to\neg\neg B$	7., 6., [2]
9. A	8., 5.

[11] $(A\to B)\to((\neg A\to B)\to B)$:

1. $(\neg B\to\neg A)\to((\neg B\to A)\to B)$	[10]
2. $A\to B$	předpoklad
3. $\neg B\to\neg A$	2., [8]
4. $(\neg B\to A)\to B$	3., 1.
5. $\neg A\to B$	předpoklad
6. $\neg B\to\neg\neg A$	5., [8]
7. $\neg\neg A\to A$	(10)
8. $\neg B\to A$	6., 7., [2]
9. B	8., 4.

Víme již, že ($A \to B$) je odvoditelný jak z B (axiom (1)), tak z $\neg A$ (teorém [6]). Nyní ukážeme, že z A, $\neg B$ je odvoditelný $\neg(A \to B)$

[12] $A \to (\neg B \to \neg(A \to B))$:

1. $(A \to B) \to (A \to B)$	[1]
2. $A \to ((A \to B) \to B)$	1., [3]
3. $((A \to B) \to B) \to (\neg B \to \neg(A \to B))$	[8]
4. $A \to (\neg B \to \neg(A \to B))$	2., 3., [2]

Posledním teorémem, který dokážeme, je

[13] $\neg(A \to B) \to A$:

1. $\neg A \to (A \to B)$	[6]
2. $\neg(A \to B) \to \neg\neg A$	1., [8]
3. $\neg\neg A \to A$	(10)
4. $\neg(A \to B) \to A$	2., 3., [2]

2.3 Sémantika

Interpretací jazyka KVP nazveme takové přiřazení jedné ze dvou pravdivostních hodnot P (pravda) a N (nepravda) každému výroku, že:

(i) negaci $\neg A$ je přiřazena hodnota P právě tehdy, když je výroku A přiřazena hodnota N;

(ii.i) konjunkci $A \wedge B$ je přiřazena hodnota P právě tehdy, když je hodnota P přiřazena výrokům A i B;

(ii.ii) disjunkci $A \vee B$ je přiřazena hodnota N právě tehdy, když je hodnota N přiřazena výrokům A i B;

(iii.iii) implikaci $A \to B$ je přiřazena hodnota N právě tehdy, když je výroku A přiřazena hodnota P a výroku B hodnota N.

Z definice interpretace je zřejmé, že pravdivostní hodnota složeného výroku je při každé interpretaci spočitatelná z pravdivostních hodnot jeho (bezprostředních) podvýroků. Tuto pravdivostní hodnotu totiž můžeme pro výrok kteréhokoli tvaru spočítat pomocí následujících tabulek:

A	$\neg A$
P	N
N	P

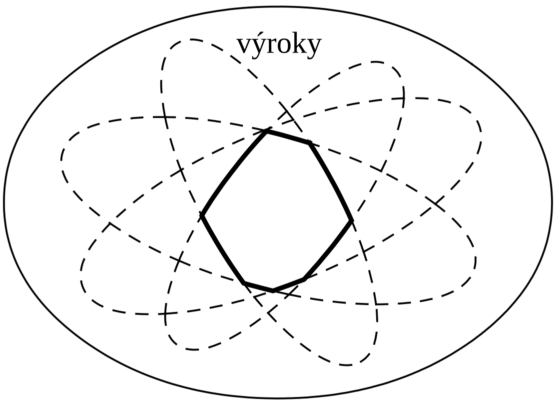
A	B	$A \wedge B$
P	P	P
P	N	N
N	P	N
N	N	N

A	B	$A \vee B$
P	P	P
P	N	P
N	P	P
N	N	N

A	B	$A \rightarrow B$
P	P	P
P	N	N
N	P	P
N	N	P

Pokud nejsou bezprostřední podvýroky složeného výroku atomické, jsou jejich pravdivostní hodnoty spočitatelné zase z pravdivostních hodnot podvýroků těchto podvýroků; a nakonec je tedy pravdivostní hodnota každého složeného výroku spočitatelná z pravdivostních hodnot všech jeho *atomických* podvýroků. Zřejmě také platí, že máme-li libovolné přiřazení pravdivostních hodnot všem atomickým výrokům jazyka KVP, existuje jeden a jenom jeden způsob, jak jej rozšířit na interpretaci celého jazyka KVP.

Výrok KVP nazveme *tautologií*, jestliže mu každá interpretace přiřazuje hodnotu P; a nazveme jej *kontradikcí*, přiřazuje-li mu každá interpretace N. Ohraničíme-li množiny výroků, kterým jednotlivé interpretace přiřazují P, čárkovaně, a množinu tautologií tučně, vypadá celá situace následovně:



Na první pohled nemusí být zřejmé, že vůbec nějaké tautologie či kontradikce existují. Tautologií rozhodně není žádný atomický výrok, ani žádná negace atomického výroku, ani konjunkce či disjunkce atomických výroků. Tautologií by ovšem zřejmě byla disjunkce výroku *A* s výrokem, který by měl hodnotu P při každé interpretaci, při které by měl *A* hodnotu N – a takovým výrokem je $\neg A$. To znamená, že příkladem tautologie je $A \vee \neg A$. A negace tohoto výroku, tj. $\neg(A \vee \neg A)$, je zřejmě příkladem kontradikce.

Fakt, že je pravdivostní hodnota každého výroku spočitatelná z pravdivostních hodnot jeho atomických podvýroků, nám současně dává návod, jak zjistit, zda je daný výrok tautologií: pomocí tabulek spočítáme pravdivostní hodnoty zkoumaného výroku pro všechna možná přiřazení pravdivostních hodnot jeho atomickým složkám a zjistíme, zda nám vždy vyjde P – pokud ano, výrok tautologií je, pokud ne, tautologií není (neboť v takovém případě zřejmě existuje interpretace, která mu přiřazuje N).

Uvažme například výrok $(A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$ – jeho pravdivostní hodnoty pro všechna možná ohodnocení jeho atomických podvýroků *A*, *B* a *C* můžeme postupně spočítat tak, jak je to zaznamenáno v následující tabulce:

A	B	C	$B \to C$	$A \to (B \to C)$	$A \to C$	$B \to (A \to C)$	$(A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$
P	P	P	P	P	P	P	P
P	P	N	N	N	N	N	P
P	N	P	P	P	P	P	P
P	N	N	P	P	N	P	P
N	P	P	P	P	P	P	P
N	P	N	N	P	P	P	P
N	N	P	P	P	P	P	P
N	N	N	P	P	P	P	P

Tento výrok je tedy tautologií.

Pravdivostní tabulkou výroku daného tvaru nazveme tabulku zachycující závislost pravdivostní hodnoty tohoto výroku na jeho částech odpovídajících parametrům tohoto tvaru. (Například pravdivostní tabulka výroku tvaru $(A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$ by se skládala z prvních tří a posledního sloupce právě uvedené tabulky.) Pravdivostní tabulkou výrokového operátoru budeme rozumět pravdivostní tabulku výroku vzniklého spojením tohoto operátoru s příslušným počtem parametrů – například pravdivostní tabulkou konjunkce tedy budeme rozumět pravdivostní tabulku výroku $A \wedge B$.

Řekneme, že výrok *A vyplývá* z množiny *M* výroků, jestliže každá interpretace, která přiřazuje všem prvkům *M* hodnotu P, přiřazuje hodnotu P i výroku *A*. Namísto

A vyplývá z $\{A_1, ..., A_n\}$,

budeme ovšem psát jednodušeji

A vyplývá z $A_1, ..., A_n$.

Je-li množina M prázdná, vyplývá z ní A právě tehdy, když je mu hodnota P přiřazena každou interpretací, to jest když je tautologií. Řekneme, že množina výroků je *sémanticky konzistentní*, existuje-li interpretace, která všem prvkům této množiny přiřazuje hodnotu P. Všimněme si, že množina je sémanticky konzistentní právě tehdy, když z ní nevyplývá žádný výrok spolu se svou negací. (Protože žádná interpretace nepřiřazuje žádnému výroku stejnou pravdivostní hodnotu jako jeho negaci, může výrok spolu se svou negací z množiny výroků vyplývat jenom tehdy, když je tato množina sémanticky nekonzistentní; a tehdy z ní také vyplývá.)

Zásadním výsledkem, který budeme dokazovat v oddílu 2.5, je to, že se axiomatické pojmy teorému a odvoditelnosti kryjí se sémantickými pojmy tautologie a vyplývání. To znamená, že výrok KVP je teorémem právě tehdy, když je tautologií, a že výrok je odvoditelný z nějakých jiných výroků právě tehdy, když z nich vyplývá. Znamená to také, že množina výroků je axiomaticky konzistentní právě tehdy, když je konzistentní sémanticky.

Představme si, že pravdivostními hodnotami P a N jsou čísla 1 a 0 (s nimi se ostatně v učebnicích logiky pravdivostní hodnoty často ztotožňují). Tím se nám pravdivostní hodnoty uspořádávají: platí totiž, že 1 je větší než 0, tj. P > N. (Toto uspořádání si můžeme představit jako udávající ‚míru pravdivosti‘: pravda je pravdivější než nepravda.) Označíme-li pravdivostní hodnotu výroku A jako $|A|$, můžeme pravdivostní tabulky pro konjunkci, disjunkci a negaci vyjádřit následujícími jednoduchými vzorci, kterým budeme říkat *numerické charakteristiky* operátorů KVP:

$|A \wedge B| = \min(|A|,|B|)$,
$|A \vee B| = \max(|A|,|B|)$,
$|\neg A| = 1-|A|$.

Slovně je můžeme vyjádřit také tak, že konjunkce je právě tak pravdivá jako ten méně pravdivý z jejích konjunktů; disjunkce jako ten pravdivější z jejích disjunktů a pravdivost negace je rovna tomu, co do pravdivosti chybí výroku, který je negován.

Pro implikaci nemáme žádný takto jednoduchý vzorec, protože ale platí $|A\rightarrow B| = |\neg A\vee B|$, musí platit

$$|A\rightarrow B| = \max(1-|A|,|B|).$$

Vztah mezi pravdivostní hodnotou implikace a pravdivostními hodnotami jejího antecedentu a konsekventu můžeme ovšem zachytit i jinak, například vzorcem:

$$|A\rightarrow B| \begin{array}{l} = 1, \text{ jestliže } |A| \leq |B| \\ = 0, \text{ jinak.} \end{array}$$

Slovně vyjádřeno, implikace je pravdivá právě tehdy, když je její konsekvent alespoň tak pravdivý jako její antecedent.

Existuje samozřejmě více pravdivostních tabulek než ty, které odpovídají našim operátorům $\neg$, $\wedge$, $\vee$ a $\rightarrow$. To nás může vést k úvahám o obohacení jazyka KVP o nové operátory, jejichž sémantika by byla dána takovými tabulkami. Představme si například, že bychom chtěli zavést nový binární operátor $\leftrightarrow$ tak, aby byl výrok $A\leftrightarrow B$ pravdivý právě tehdy, když mají A a B tutéž pravdivostní hodnotu. Odpovídající pravdivostní tabulkou by zřejmě byla

A	B	$A\leftrightarrow B$
P	P	P
P	N	N
N	P	N
N	N	P

Pomocí příslušných tabulek se snadno přesvědčíme, že *tutéž* tabulku bychom dostali pro výrok $(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)$, a také pro výrok $\neg((A\rightarrow B)\rightarrow\neg(B\rightarrow A))$. Tyto tři výroky jsou tedy ekvivalentní v tom smyslu, že mají při každé interpretaci stejnou pravdivostní hodnotu – z hlediska sémantiky KVP tak ‚říkají totéž'. Ke každému výroku, který obsahuje $\leftrightarrow$, tudíž existuje ekvivalentní výrok, který tento nový operátor neobsahuje – a zavedením $\leftrightarrow$ tak v tomto smyslu dostáváme jenom novou formu vyjádření něčeho, co už jsme v jazyce jiným způsobem vyjádřit dokázali.

Mohli bychom přidat operátor s pravdivostní tabulkou, kterou by nebylo lze ‚vyrobit' z těch již existujících? Podívejme se nejprve na operátory unární. Zřejmě existují čtyři různé možnosti, jak přiřadit dvě pravdivostní hodnoty dvěma pravdivostním hodnotám, to jest čtyři potenciální pravdivostní tabulky pro unární operátor. V KVP máme zatím jediný, totiž negaci – zkusme tedy přidat zbývající tři:

A	⌠A
P	N
N	N

A	$\int A$
P	P
N	P

A	$\mid A$
P	P
N	N

Snadno nahlédneme, že každý z takto zavedených nových výroků je ekvivalentní nějakému výroku, který již v KVP máme, konkrétně ⌠A je ekvivalentní například $\neg(A \rightarrow A)$, $\int A$ je ekvivalentní $A \rightarrow A$, a $\mid A$ je ekvivalentní A. Žádný skutečně nový unární operátor tedy přidat nemůžeme.

Obecněji se ukazuje, že *jakýkoli* nový operátor *jakékoli* arity (to jest nejenom unární a binární, ale obecně n-ární) lze vyjádřit pomocí operátorů, které už máme. To exaktně dokážeme v oddíle 2.5.4, tady si uveďme jenom příklad. Vezměme ternární operátor O definovaný následující tabulkou:

A	B	C	$O(A,B,C)$
P	P	P	N
P	P	N	N
P	N	P	P
P	N	N	N
N	P	P	P
N	P	N	P
N	N	P	N
N	N	N	N

Výrok $O(A,B,C)$ má tedy hodnotu P pro ta přiřazení pravdivostních hodnot výrokům A, B a C, která jsou uvedena na třetím, pátém a šestém řádku. Konkrétně je $O(A,B,C)$ pravdivý právě tehdy, když jsou A a C pravdivé a B nepravdivý, nebo je A nepravdivý a B i C jsou pravdivé, nebo jsou A a C nepravdivé a B je pravdivý. Z toho, jak snadno nahlédneme, vyplývá, že $O(A,B,C)$ je ekvivalentní výroku

$$(A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C).$$

Navíc lze ukázat, že operátory $\wedge$ a $\vee$ lze vyjádřit pomocí operátorů $\neg$ a $\rightarrow$. Platí totiž, že $A\vee B$ má stejnou tabulku jako $\neg A\rightarrow B$, zatímco $A\wedge B$ má stejnou tabulku jako $\neg(\neg A\vee\neg B)$, a potažmo tedy jako $\neg(A\rightarrow\neg B)$. To znamená, že bychom v jazyce KVP vystačili s operátory $\neg$ a $\rightarrow$ a kterýkoli jiný operátor mohli zavést jenom jako notační zkratku:

$(A\vee B) \equiv_{\mathrm{Def.}} (\neg A\rightarrow B)$,
$(A\wedge B) \equiv_{\mathrm{Def.}} \neg(A\rightarrow\neg B)$,
$(A\leftrightarrow B) \equiv_{\mathrm{Def.}} \neg((A\rightarrow B)\rightarrow\neg(B\rightarrow A))$
atd.

Alternativně by bylo možné vyjádřit všechny operátory pomocí $\wedge$ a $\neg$, nebo také pomocí $\vee$ a $\neg$ (jak, to ponecháváme jako cvičení). Faktu, že každý myslitelný operátor můžeme definovat pomocí těch, které již v KVP máme, budeme říkat *denotační nasycenost* KVP.

2.4 Alternativní axiomatizace

Fakt, že sadu logických operátorů KVP můžeme zredukovat na $\neg$ a $\rightarrow$, otevírá cestu i ke zjednodušení našeho axiomatického systému. (To, že jsou sémanticky ekvivalentní výroky ekvivalentní i z hlediska axiomatiky, plyne z již avizované obecné ekvivalence axiomatiky a sémantiky, kterou dokážeme později.) Prohlásíme-li každý výrok tvaru $A\vee B$ jenom za zkrácený zápis výroku $\neg A\rightarrow B$, můžeme z našeho seznamu axiomů škrtnout (6)–(8); a podobně prohlásíme-li výrok tvaru $A\wedge B$ za zkrácený zápis výroku $\neg(A\rightarrow\neg B)$, můžeme škrtnout i (3)–(5).

To plyne z následující úvahy. Vezměme například axiom (3), to jest výrok

$(A\wedge B)\rightarrow A$.

Vyjádříme-li konjunkci pomocí negace a implikace, dostáváme

$\neg(A\rightarrow\neg B)\rightarrow A$.

Tento výrok je teorémem KVP, konkrétně speciálním případem teorému [13], který byl dokázán bez pomoci axiomů (3)–(8); takže i když axiomy (3)–(8)

škrtneme, bude $(A \wedge B) \rightarrow A$, jakožto zkratka za $\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow A$, nadále teorémem, a na naší množině teorémů se tedy nic nezmění. Podobně tomu bude i se všemi ostatními axiomy týkajícími se konjunkce a disjunkce.

Tím lze náš původní axiomatický systém (jedná se o systém používaný Kleenem, 1967) zredukovat na axiomy (1), (2), (9) a (10). Dále se ovšem ukazuje, že (9) a (10) můžeme nahradit axiomem

(11) $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A))$.

Abychom dokázali, že jsou v axiomatickém systému tvořeném (1), (2) a (11) dokazatelné tytéž teorémy jako v tom původním, zřejmě stačí, když ukážeme, že jsou v něm dokazatelné (9) a (10). Důkaz (10) je následující (všimněme si, že z dříve dokázaných teorémů jsou použity jenom ty, jejichž důkaz se neopíral o jiné axiomy než (1) a (2)):

1. $(\neg A \rightarrow \neg\neg A) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow A)$	(11)
2. $(\neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg\neg A) \rightarrow A)$	1., [3]
3. $\neg A \rightarrow \neg A$	[1]
4. $(\neg A \rightarrow \neg\neg A) \rightarrow A$	3., 2.
5. $\neg\neg A \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg\neg A)$	(1)
6. $\neg\neg A \rightarrow A$	5., 4., [2]

To, že je dokazatelný i (9), ukážeme prostřednictvím odvození $\neg A$ z $A \rightarrow B$ a $A \rightarrow \neg B$ (nyní již ovšem můžeme používat i axiom (10)):

1. $A \rightarrow \neg B$	předpoklad
2. $\neg\neg A \rightarrow A$	(10)
3. $\neg\neg A \rightarrow \neg B$	2., 1., [2]
4. $(\neg\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg\neg A \rightarrow B) \rightarrow \neg A)$	(11)
5. $(\neg\neg A \rightarrow B) \rightarrow \neg A$	3., 4.
6. $A \rightarrow B$	předpoklad
7. $\neg\neg A \rightarrow B$	2., 6., [2]
8. $\neg A$	7., 5.

Tím dostáváme systém, který používá například Mendelson (1964). Existuje ovšem i celá řada dalších ekvivalentních axiomatických systémů. Z těch, které berou, tak jako my, za primitivní operátory $\neg$ a $\rightarrow$, uveďme ještě systém, který užívá Tarski (1965). Tento systém se skládá z následujících čtyř axiomů (z nichž první je identický s naším axiomem (1) a další tři se od našich axiomů liší):

$A\to(B\to A)$,
$(A\to B)\to((B\to C)\to(A\to C))$,
$(\neg A\to\neg B)\to(B\to A)$,
$(A\to(A\to B))\to(A\to B)$.

(Jako součást axiomatických systémů bychom samozřejmě měli uvádět i jejich odvozovací pravidla; u systémů, které mají za jediné pravido *modus ponens*, to však pro jednoduchost neděláme. Explicitně je začneme uvádět až u systémů, jejichž sada pravidel je jiná.)

Jak se ukazuje, lze ovšem počet axiomů zredukovat i na jediný (*viz* Meredith, 1953):

$$((((A\to B)\to(\neg C\to\neg D))\to C)\to E)\to((E\to A)\to(D\to A)).$$

Ze systémů, které vycházejí z jiného výběru primitivních operátorů, než o jaký jsme se opírali my, uveďme ten, který navrhli Hilbert a Ackermann (1928) a který bere za primitivní $\neg$ a $\vee$:

$\neg(A\vee A)\vee A$,
$\neg A\vee(A\vee B)$,
$\neg(B\vee A)\vee(A\vee B)$,
$\neg(\neg B\vee C)\vee(\neg(A\vee B)\vee(A\vee C))$.

2.5 Klíčové charakteristiky

Než shrneme nejpodstatnější vlastnosti KVP (a provedeme rigorózní důkazy tvrzení, která jsme výše formulovali a jejich důkazy jenom naznačili), zdůrazněme důležitost dvou rozlišení.

Za prvé, je třeba důsledně rozlišovat mezi pojmy, které jsou *axiomatické*, a těmi, které jsou *sémantické* (znovu připomeňme, že namísto našeho termínu *axiomatika* se běžně užívá termín *syntax*, což je ovšem krajně zavádějící, protože to vede ke směšování axiomatiky se syntaxí v úzkém slova smyslu, to jest ve smyslu vymezení toho, co je výrokem). Je ovšem pravda, že axiomatika i sémantika ústí do pojmů, které si vzájemně intuitivně odpovídají (*teorém ≈ tautologie, odvození ≈ vyplývání, axiomatická konzistence ≈ sémantická konzistence*) a které se navíc, jak jsme viděli a jak ještě podrobněji uvidíme, kryjí v tom smyslu, že se vztahují přesně na tytéž případy. Přesto je mezi nimi třeba striktně rozlišovat: důvodem je především to, že ačkoli *pro KVP* se kryjí, pro jiné logické počty tomu tak být nemusí.

Za druhé: Alfred Tarski upozornil na důležitost rozlišování mezi jazykem, *o kterém* hovoříme, to jest tím, který je pro nás *předmětem*, a jazykem, *kterým* o něm hovoříme, *metajazykem*. (To může vypadat na první pohled jako samozřejmost, mnoho zmatků v logice ale fakticky vzniká tím, že se toto důsledně nečiní.) Pro nás je v této chvíli předmětem jazyk KVP a metajazykem je prostě čeština (někdy trochu přizpůsobená našim potřebám). Mluvíme-li o tvrzeních, důkazech atd., je tedy zásadní rozlišovat, zda se jedná o jazyk-předmět či o metajazyk: zatímco například teorém [1] je tvrzením toho prvního (KVP), a jeho důkaz tedy musí vypadat tak, jak jsme to pro KVP definovali, věta o dedukci je tvrzením metajazyka, je to tvrzení *o* KVP, a její důkaz tedy není veden v rámci KVP, ale neformalizovanými prostředky přirozeného jazyka.

Řekneme-li například, že

(a) B je odvoditelný z A,

je to *metajazykové* konstatování; pojem odvoditelnosti je *metajazykový pojem*. Věta o dedukci ovšem říká, že každé takovéto konstatování má jistý protipól v KVP, totiž výrok

(b) $A \to B$.

Znamená to tedy, že lze metajazykový výrok (a) ‚přeložit' do KVP, a to jako (b)? Nikoli. Důvodem je, že tvrdit (a) *není* totéž jako tvrdit (b) (to jest to první tvrzení není pravdivé právě tehdy, když je pravdivé to druhé). Tvrdit (a) je totiž totéž jako tvrdit

(c) $A \to B$ je teorémem;

a to je jiné tvrzení než (b), konkrétně je to také metajazykové tvrzení. A jakkoli pravdivost (c) jistě zaručuje pravdivost (b) (každý teorém je tautologií, a tudíž je pravdivý, při jakékoli interpretaci), naopak to platit nemusí (pravdivost – při jakékoli jediné interpretaci – nemůže zaručit tautologičnost).

Nyní můžeme přistoupit k systematické rekapitulaci nejdůležitějších vlastností KVP.

2.5.1 Dedukce

Víme, že pojem teorému je definován prostřednictvím pojmu odvození, a je na něj tedy v tomto smyslu redukovatelný. Z věty o dedukci, kterou nyní exaktně dokážeme, plyne, že pojem odvození z konečné množiny předpokladů je naopak redukovatelný na pojem teorému: říci, že A je odvoditelný z A_1, ..., A_n, je totiž totéž jako říci, že $(A_1 \rightarrow (...(A_n \rightarrow A)...))$ je teorémem. Vymezíme-li tedy množinu teorémů, vymezíme tím současně i to, co je z čeho odvoditelné.

Platí: Výrok A je odvoditelný z výroků A_1, ..., A_n právě tehdy, když je výrok $A_n \rightarrow A$ odvoditelný z výroků A_1, ..., A_{n-1}.

Důkaz: Je-li $A_n \rightarrow A$ odvoditelný z A_1, ..., A_{n-1}, pak z A_1, ..., A_{n-1}, A_n zřejmě dokážeme, za pomoci (*mp*), odvodit A. Dokázat tedy musíme jenom to, že naopak je-li A odvoditelný z A_1, ..., A_n, je $A_n \rightarrow A$ odvoditelný z A_1, ..., A_{n-1}. Předpokládejme tedy, že máme odvození A z A_1, ..., A_n, to jest posloupnost výroků takovou, že každý prvek této posloupnosti je buďto axiomem, nebo jedním z A_1, ..., A_n, anebo je podle pravidla (*mp*) odvoditelný z nějakých výroků vyskytujících se v posloupnosti před ním; a A je posledním prvkem této posloupnosti. Dokážeme, že pro každý výrok B v této posloupnosti musí být $A_n \rightarrow B$ odvoditelný z A_1, ..., A_{n-1} – a tudíž že z nich musí být odvoditelný i $A_n \rightarrow A$. Důkaz provedeme indukcí podle délky odvození A z A_1, ..., A_n. Je-li toto odvození tvořeno jediným výrokem (totiž A), pak musí být A buďto axiomem, nebo jedním z A_1, ..., A_n. Je-li A axiomem nebo jedním z A_1, ..., A_{n-1}, je $A_n \rightarrow A$ odvoditelný z A_1, ..., A_{n-1} v důsledku toho, že $A \rightarrow (A_n \rightarrow A)$ je axiomem (1); je-li A totožný s A_n, je $A_n \rightarrow A$ odvoditelný z A_1, ..., A_{n-1} proto, že $(A_n \rightarrow A_n)$ je teorémem [1]. Předpokládejme nyní, že naše tvrzení platí pro všechna odvození délky m, a mějme odvození délky m+1. V netriviálním případě je výrok A, který je posledním prvkem tohoto odvození, odvozen pomocí (*mp*) z nějakých výroků $(A' \rightarrow A)$ a A', které se v tomto odvození vyskytují před ním. Odvození každého z těchto dvou výroků z A_1, ..., A_n může mít ovšem délku nejvýše m, takže podle indukčního předpokladu platí, že $A_n \rightarrow (A' \rightarrow A)$ a $A_n \rightarrow A'$ jsou odvoditelné z A_1, ..., A_{n-1}. Avšak s použitím těchto výroků dostaneme $(A_n \rightarrow A)$ z A_1, ..., A_{n-1} dvojím použitím (*mp*) na axiom (2).

Speciálně tedy platí: Výrok B je odvoditelný z A právě tehdy, když je $A \rightarrow B$ teorémem.

Platí tedy i: Výrok A je odvoditelný z výroků A_1, ..., A_n právě tehdy, když je $(A_1\to(...(A_n\to A)...))$ teorémem.

Platí i sémantická obdoba věty o dedukci:

Platí: Výrok A vyplývá z výroků A_1, ..., A_n právě tehdy, když výrok $A_n\to A$ vyplývá z výroků A_1, ..., A_{n-1}.

Důkaz: A vyplývá z A_1, ..., A_n právě tehdy, když každá interpretace, která přiřazuje všem výrokům A_1, ..., A_n hodnotu P, přiřazuje hodnotu P i výroku A. To zřejmě nastává právě tehdy, když každá interpretace, která přiřazuje hodnotu P výrokům A_1, ..., A_{n-1}, přiřazuje P výroku A, jestliže ji přiřazuje výroku A_n; to jest když každá taková interpretace přiřazuje P výroku $A_n\to A$. A tedy vyplývá z A_1, ..., A_n právě tehdy, když $A_n\to A$ vyplývá z A_1, ..., A_{n-1}.

Speciálně tedy platí: Výrok B vyplývá z A právě tehdy, když je $A\to B$ tautologií.

Platí tedy i: Výrok A vyplývá z výroků A_1, ..., A_n právě tehdy, když je $(A_1\to(...(A_n\to A)...))$ tautologií.

2.5.2 Kompaktnost

Víme, že je výrok odvoditelný z nekonečné množiny výroků právě tehdy, když je odvoditelný z její konečné podmnožiny. (To je triviálním důsledkem definice odvozování – v odvození můžeme použít nejvýše konečný počet předpokladů.) Důležitou netriviální vlastností KVP je to, že totéž platí i pro vyplývání.

Platí: Výrok vyplývá z nekonečné množiny výroků právě tehdy, když vyplývá z nějaké její konečné podmnožiny.

Důkaz: Z definice vyplývání je zřejmé, že vyplývá-li výrok z nějaké množiny, pak tím spíše vyplývá z každé její nadmnožiny; to znamená, že vyplývá-li výrok A z nějaké konečné podmnožiny X' množiny X, pak vyplývá i z X.

Předpokládejme tedy nyní naopak, že A vyplývá z nekonečné množiny X; chceme dokázat, že pak A vyplývá z nějaké konečné podmnožiny X' množiny X. Všimněme si, že A vyplývá z X právě tehdy, když neexistuje žádná interpretace, která by všem výrokům z X přiřazovala P a výroku A přiřadila N; jinými slovy neexistuje žádná interpretace, která by jak všem prvkům X, tak negaci $\neg A$ výroku A přiřazovala P. A tedy vyplývá z X právě tehdy, když není množina $X \cup \{\neg A\}$ sémanticky konzistentní. To, co máme dokázat, tedy můžeme ekvivalentně formulovat následujícím způsobem: kdykoli je množina $X \cup \{\neg A\}$ sémanticky nekonzistentní, pak existuje konečná podmnožina X' množiny X taková, že sémanticky nekonzistentní je i $X' \cup \{\neg A\}$. My dokážeme obecnější tvrzení, totiž že jsou-li všechny konečné podmnožiny dané množiny sémanticky konzistentní, je i ona sama sémanticky konzistentní. Tím zřejmě dokážeme, že každá nekonečná sémanticky nekonzistentní množina má konečnou sémanticky nekonzistentní podmnožinu, a z toho přímo plyne, že z nekonzistence $X \cup \{\neg A\}$ vyplývá nekonzistence $X' \cup \{\neg A\}$ pro nějakou konečnou podmnožinu X' množiny X.

Nechť je tedy X množina výroků, jejíž každá konečná podmnožina je sémanticky konzistentní; budeme takové množině říkat *kvazikonzistentní* (a naším cílem tedy bude ukázat, že každá kvazikonzistentní množina je konzistentní). Uspořádejme všechny výroky jazyka KVP do (nekonečné) posloupnosti A_1, A_2, ... (například podle abecedy nějak doplněné o symboly $\neg$, $\wedge$ atd.). Budeme nyní konstruovat posloupnost množin výroků M_0, M_1, ... následujícím způsobem: Za M_0 vezmeme X; a máme-li již zkonstruovanou množinu M_{n-1}, pak zjistíme, zda je množina $M_{n-1} \cup \{A_n\}$ kvazikonzistentní, a pokud ano, vezmeme za M_n ji; v opačném případě vezmeme za M_n množinu M_{n-1}. Označme nyní M^* sjednocení všech M_i pro $i = 1, \ldots$. K tomu, abychom ukázali, že X je sémanticky konzistentní, nám nyní zřejmě stačí ukázat, že sémanticky konzistentní je M^* (protože $X \subseteq M^*$).

Všimněme si nejprve, že M^* je kvazikonzistentní (každá její konečná podmnožina je sémanticky konzistentní, protože je částí nějaké M_n). M^* je navíc *maximální* kvazikonzistentní množina: je-li $A_i \notin M^*$, pak $M^* \cup \{A_i\}$ není kvazikonzistentní. (Kdyby totiž kvazikonzistentní byla, musela by být, vzhledem k tomu, jak byla zkonstruována M^*, kvazikonzistentní množina $M_{i-1} \cup \{A_i\}$, a A_i by tedy musel patřit do M_i, a tím spíše do M^*.)

Dále platí, že do M^* patří pro každý výrok A právě jeden z dvojice výroků A a $\neg A$. To, že tam nemohou patřit oba, plyne z faktu, že množina $\{A, \neg A\}$ zřejmě není sémanticky konzistentní. Předpokládejme nyní, že do M^* nepatří ani jeden z nich. Protože M^* je maximální, nemůže být ani jedna z množin $M^* \cup \{\neg A\}$ a $M^* \cup \{A\}$ kvazikonzistentní. To znamená, že musejí existovat konečné podmnožiny P_1 a P_2 množiny M^* takové, že $P_1 \cup \{A\}$ a $P_2 \cup \{\neg A\}$ nejsou sémanticky konzistentní. To ale znamená, že sémanticky konzistentní nemohou být ani $P_1 \cup P_2 \cup \{A\}$ a $P_1 \cup P_2 \cup \{\neg A\}$. Z toho plyne, že sémanticky konzistentní nemůže být ani $P_1 \cup P_2$ (kdyby existovala interpretace, která by přiřazovala P všem prvkům této množiny, pak by musela přiřazovat P všem prvkům jedné z množin $P_1 \cup P_2 \cup \{A\}$ a $P_1 \cup P_2 \cup \{\neg A\}$). A to je spor s předpoklady, že M^* je kvazikonzistentní, $P_1 \cup P_2$ je konečná a $P_1 \cup P_2 \subseteq M^*$.

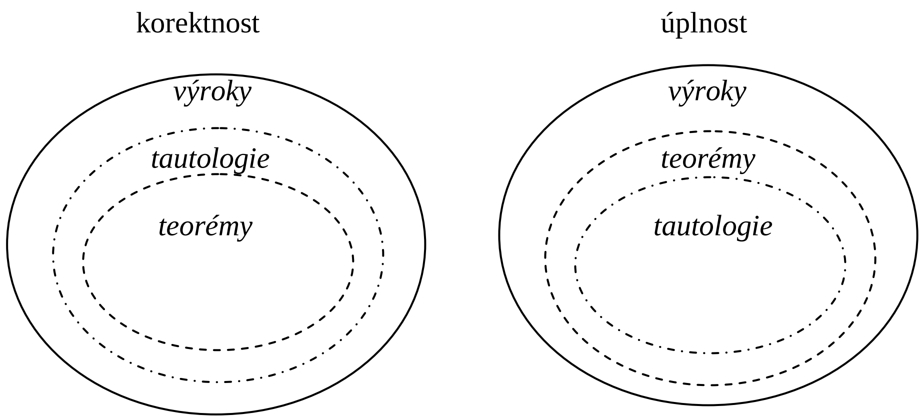
Současně platí, že výrok $A_i \wedge A_j$ patří do M^* právě tehdy, když do ní patří A_i i A_j. Předpokládejme totiž, že $A_i \wedge A_j \in M^*$. Pak do M^* zřejmě nemůže patřit ani $\neg A_i$, ani $\neg A_j$ (protože ani $\{A_i \wedge A_j, \neg A_i\}$, ani $\{A_i \wedge A_j, \neg A_j\}$ nejsou sémanticky konzistentní). Pak ale do

M^* musí patřit A_i i A_j (protože do ní musí patřit jeden prvek z dvojice A_i a $\neg A_i$ i z dvojice A_j a $\neg A_j$). Naopak jestliže $A_i \in M^*$ a $A_j \in M^*$, pak do M^* nemůže patřit $\neg(A_i \wedge A_j)$, a tudíž tam musí patřit $A_i \wedge A_j$.

Množina M^* tedy ‚respektuje' pravdivostní tabulku pro $\wedge$ v tom smyslu, že když definujeme funkci *i* přiřazující výrokům pravdivostní hodnoty tak, že přiřadí P všem prvkům M^* a jenom jim, bude *i* přiřazovat výroku $A \wedge B$ hodnotu P právě tehdy, když ji bude přiřazovat jak *A*, tak *B*. Z toho, co jsme o M^* výše dokázali, ale plyne i to, že *i* bude v tomto smyslu ‚respektovat' tabulku pro $\neg$; a snadno nahlédneme, že tudíž bude ‚respektovat' tabulky všech operátorů. To ale neznamená nic jiného, než že *i* je interpretací, a že tedy M^*, a tím spíše *X*, je sémanticky konzistentní.

2.5.3 Korektnost a úplnost

Prostřednictvím axiomatiky jsme vymezili podmnožinu množiny výroků: množinu teorémů KVP. Jinou podmnožinu množiny výroků jsme vymezili prostřednictvím sémantiky: množinu tautologií. Korektnost nyní znamená, že ta první je obsažená v té druhé, zatímco úplnost znamená, že naopak ta druhá je obsažená v té první:



To znamená, že korektnost spolu s úplností vedou k tomu, že množiny tautologií a teorémů splývají.

Platí: KVP je korektní, tj. každý teorém KVP je tautologií. Současně je KVP úplný, tj. každá tautologie KVP je teorémem. Výrok KVP je tedy tautologií právě tehdy, když je teorémem.

Důkaz: To, že je každý teorém tautologií, se dokáže snadno, a sice tak, že se (tabulkovou metodou) ověří, že tautologiemi jsou všechny axiomy, a současně se ověří, že pravidlo (*mp*) vede od tautologií vždy zase k tautologii (ponecháváme jako cvičení). Důkaz toho, že každá tautologie je teorémem, je mnohem komplikovanější.

Mějme výrok A, buďte $A_1, ..., A_n$ všechny v něm obsažené atomické výroky a uvažme pravdivostní tabulku výroku A. *Internalizací* i-tého řádku této tabulky nazveme výrok $(X_1 \rightarrow (...(X_n \rightarrow X)...))$, kde X_j je buďto A_j, nebo $\neg A_j$, podle toho, zda je v j-tém sloupci i-tého řádku tabulky hodnota P, nebo N, a podobně X je buďto A, nebo $\neg A$, podle toho, zda je P, nebo N v posledním sloupci i-tého řádku. To, že je každá tautologie teorémem, nyní dokážeme tak, že nejprve dokážeme, že internalizace všech řádků pravdivostní tabulky každého výroku jsou teorémy, a potom dokážeme, že každá tautologie je odvoditelná z internalizací řádků své pravdivostní tabulky (a protože je tedy odvoditelná z teorémů, je sama teorémem).

Důkaz toho, že internalizace všech řádků pravdivostní tabulky výroku A jsou teorémy, provedeme indukcí podle počtu operátorů obsažených v A. Neobsahuje-li A žádný operátor, pak je A atomický a má jedinou atomickou část, tedy sebe sama. Jeho (triviální) pravdivostní tabulka tedy obsahuje dva řádky, jejichž internalizacemi jsou výroky $A \rightarrow A$ a $\neg A \rightarrow \neg A$, které jsou oba instancemi teorému [1].

Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro všechny výroky s nejvýše m operátory; dokážeme, že tím platí i pro všechny s m+1 operátory. Můžeme předpokládat, že A je buďto tvaru $\neg A'$, nebo tvaru $A' \rightarrow A''$, kde A' a A'' neobsahují více než m operátorů. Uvažme tyto dva případy po řadě.

Buď tedy A tvaru $\neg A'$. Podle předpokladu jsou internalizace všech řádků pravdivostní tabulky A' teorémy. Buď

h_1 ... h_n	h'

i-tým řádkem této tabulky a buď $(X_1 \rightarrow (...(X_n \rightarrow X')...))$ internalizací tohoto řádku. Předpokládejme, že tím řádkem pravdivostní tabulky negace, který má v prvním sloupci hodnotu h', je

h'	h

a jeho internalizací je výrok $X' \rightarrow X$. i-tým řádkem pravdivostní tabulky A je pak zřejmě

h_1 ... h_n	h

a k tomu, aby byla jeho internalizace $(X_1 \rightarrow (...(X_n \rightarrow X)...))$ teorémem, stačí, aby byl teorémem výrok $X' \rightarrow X$ – protože výrok $(X_1 \rightarrow (...(X_n \rightarrow X)...))$ je odvoditelný z výroků $(X_1 \rightarrow (...(X_n \rightarrow X')...))$ a $X' \rightarrow X$. (Pomocí $(X_1 \rightarrow (...(X_n \rightarrow X')...))$ totiž snadno odvodíme z výroků X_1, ..., X_n výrok X' a z něj pak pomocí $X' \rightarrow X$ dále odvodíme X.) Takže k tomu, abychom ukázali, že jsou internalizace všech řádků tabulky výroku A teorémy, stačí ukázat, že jsou teorémy internalizace všech řádků pravdivostní tabulky negace. Těmito internalizacemi jsou

$$A \rightarrow \neg\neg A,$$
$$\neg A \rightarrow \neg A.$$

A oba tyto výroky skutečně teorémy KVP jsou – *viz* [7] a [1].

Buď nyní A tvaru $A' \rightarrow A''$. Nazvěme rozšířenou pravdivostní tabulkou pro A' tabulku, která vedle všech atomických podvýroků výroku A' obsahuje i všechny atomické podvýroky výroku A'' (jejichž pravdivostní hodnoty samozřejmě nemají na hodnotu A' vliv); a analogicky pro A''. Buďte

$$h_1 \ldots h_n\, h',$$
$$h_1 \ldots h_n\, h''$$

i-tými řádky rozšířených tabulek pro výroky A' a A'' a buďte $(X_1 \rightarrow (\ldots(X_n \rightarrow X')\ldots))$ a $(X_1 \rightarrow (\ldots(X_n \rightarrow X'')\ldots))$ jejich internalizacemi. Předpokládejme, že řádkem pravdivostní tabulky pro implikaci, který má v prvním sloupci hodnotu h' a ve druhém hodnotu h'' je

$$h'\ h''\ h$$

a jeho internalizací je výrok $X' \rightarrow (X'' \rightarrow X)$. i-tým řádkem pravdivostní tabulky A je pak zřejmě

$$h_1 \ldots h_n\, h$$

a k tomu, aby byla jeho internalizace $(X_1 \rightarrow (\ldots(X_n \rightarrow X)\ldots))$ teorémem, stačí, aby byl teorémem výrok $X' \rightarrow (X'' \rightarrow X)$ – protože výrok $(X_1 \rightarrow (\ldots(X_n \rightarrow X)\ldots))$ je odvoditelný z $(X_1 \rightarrow (\ldots(X_n \rightarrow X')\ldots))$, $(X_1 \rightarrow (\ldots(X_n \rightarrow X'')\ldots))$ a $X' \rightarrow (X'' \rightarrow X)$. Takže k tomu, abychom ukázali, že jsou internalizace všech řádků tabulky výroku A teorémy, stačí ukázat, že jsou teorémy internalizace všech řádků pravdivostní tabulky implikace. Těmito internalizacemi jsou

$$A \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow B)),$$
$$A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B)),$$
$$\neg A \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow B)),$$
$$\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow (A \rightarrow B)).$$

Dokázat, že to jsou všechno teorémy, je jednoduché: druhý je přímo teorémem [12] a odvození prvního a třetího z axiomu (1), respektive čtvrtého z teorému [6], je natolik snadné, že je lze ponechat jako cvičení.

Tím jsme dokončili důkaz toho, že internalizace každého řádku pravdivostní tabulky každého výroku je teorémem. Buď nyní A tautologií. Internalizace řádků její pravdivostní tabulky tvoří všechny výroky tvaru $(Y_1 \to (...(Y_n \to A)...))$, kde Y_i je A_i nebo $\neg A_i$ ($i = 1, ..., n$). To znamená, že mezi těmito internalizacemi jsou jak všechny výroky tvaru $(A_1 \to (Y_2 \to (...(Y_n \to A)...)))$, tak všechny tvaru $(\neg A_1 \to (Y_2 \to (...(Y_n \to A)...)))$. Avšak protože z výroků $A_1 \to B$ a $\neg A_1 \to B$ je odvoditelný výrok B (*viz* teorém [11]), jsou teorémy všechny výroky tvaru $Y_2 \to (...(Y_n \to A)...))$. Vyloučíme-li obdobným postupem postupně i $Y_2, ..., Y_n$, dostáváme, že teorémem je A.

Pomocí věty o dedukci a věty o kompaktnosti KVP se nyní snadno ukáže, že KVP je i *silně korektní a úplný*, totiž že výrok vyplývá z nějaké množiny výroků právě tehdy, když je z ní odvoditelný:

Platí: KVP je silně korektní, tj. kdykoli je výrok odvoditelný z množiny výroků, pak z ní vyplývá. Současně je KVP silně úplný, tj. kdykoli výrok vyplývá z množiny výroků, pak je z ní odvoditelný. Výrok KVP tedy vyplývá z množiny výroků právě tehdy, když je z ní odvoditelný.

Důkaz: Podle věty o dedukci je výrok A odvoditelný z výroků $A_1, ..., A_n$, právě když je $A_1 \to (...(A_n \to A)...)$ teorémem. $A_1 \to (...(A_n \to A)...)$ je ale teorémem, právě když je tautologií. Přitom podle sémantické verze věty o dedukci je $A_1 \to (...(A_n \to A)...)$ tautologií právě tehdy, když A vyplývá z $A_1, ..., A_n$. Obecně je výrok A odvoditelný z množiny X právě tehdy, když je odvoditelný z nějaké konečné podmnožiny množiny X, což, jak jsme právě viděli, nastává právě tehdy, když A z nějaké konečné podmnožiny množiny X vyplývá, a to podle věty o kompaktnosti nastává právě tehdy, když A vyplývá z X.

Varování: Korektnost KVP lze vyjádřit také tak, že každé přiřazení pravdivostních hodnot výrokům KVP, které je interpretací, přiřazuje P všem axiomům a respektuje *modus ponens* (tj. kdykoli přiřazuje P výrokům A a $A \to B$, přiřazuje P i B). To by mohlo svádět k tomu, abychom se pokusili vyjádřit úplnost jako tvrzení opačné k tomuto: každé přiřazení pravdivostních hodnot výrokům, které přiřazuje P všem axiomům a respektuje *modus ponens*, je interpretací. Toto poslední tvrzení však neplatí: existují přiřazení pravdivostních hodnot výrokům, která nejsou interpretacemi (přiřazují například P disjunkci, přestože přiřazují N oběma disjunktům), přestože přiřazují P všem axiomům a respektují *modus ponens*.

2.5.4 Denotační nasycenost

Platí: Operátor s jakoukoli pravdivostní tabulkou je vyjádřitelný pomocí operátorů $\neg$ a $\rightarrow$; to jest pro libovolný n-ární operátor zavedený pomocí pravdivostní tabulky existuje výrok A vybudovaný pouze za pomoci $\neg$ a $\rightarrow$, který má tutéž pravdivostní tabulku.

Důkaz: Ukážeme nejprve, že libovolný operátor lze vyjádřit pomocí $\neg$, $\wedge$ a $\vee$. Vezměme libovolný n-ární operátor O. Výrok $O(A_1,...,A_n)$ má obecně pro některé pravdivostní hodnoty argumentů A_1, ..., A_n hodnotu P a pro jiné hodnotu N. Pokud má pro všechny hodnotu N, je $O(A_1,...,A_n)$ prostě ekvivalentní $A_1 \wedge \neg A_1$. V opačném případě provedeme pro každé přiřazení pravdivostních hodnot výrokům A_1, ..., A_n, pro které má $O(A_1,...,A_n)$ hodnotu P, následující konstrukci. Vytvoříme konjunkci výroků $X_1 \wedge ... \wedge X_n$, kde X_i je totožný s A_i, je-li výroku A_i uvažovaným přiřazením pravdivostních hodnot přiřazována hodnota P, a X_i je $\neg A_i$, je-li mu přiřazena hodnota N. Nakonec vytvořme disjunkci těchto konjunkcí pro všechna ta ohodnocení, pro která má $O(A_1,...,A_n)$ hodnotu P. Tato výsledná disjunkce je pak zřejmě pravdivá tehdy a jedině tehdy, když je pravdivý výrok $O(A_1,...,A_n)$. Zbývá ukázat, že $\wedge$ a $\vee$ jsou vyjádřitelné pomocí $\neg$ a $\rightarrow$. To ale již víme: $(A \vee B)$ je ekvivalentní $(\neg A \rightarrow B)$ a $(A \wedge B)$ je ekvivalentní $\neg(A \rightarrow \neg B)$.

2.5.5 Rozhodnutelnost

Platí: Pro kterýkoli daný výrok KVP lze rozhodnout, zda je tautologií nebo ne.

Důkaz: Z definice interpretace vyplývá, že pravdivostní hodnota výroku je spočitatelná z pravdivostních hodnot jeho bezprostředních částí; z toho vyplývá, že je spočitatelná z pravdivostních hodnot jeho atomických částí. A protože každý výrok obsahuje jenom konečný počet atomických podvýroků, lze projít všechna možná přiřazení pravdivostních hodnot těmto atomickým výrokům a pro každé z nich zjistit pravdivostní hodnotu přiřazenou zkoumanému výroku. Tento výrok je pak tautologií, právě když nám pokaždé vyjde P.

Platí tedy i: Pro kterýkoli daný výrok lze rozhodnout, zda je teorémem nebo ne.

2.6 Zobecnění

Naše definice KVP se skládala ze tří částí: z definice syntaxe jazyka KVP, definice axiomatiky KVP a definice sémantiky KVP. Tím, že jsme dokázali korektnost a úplnost KVP, jsme ovšem ukázali, že jeho axiomatika a sémantika jsou dvěma stranami téže mince, takže jedna z nich je vlastně v tomto smyslu redundantní. Jak je to obecněji se vztahem sémantiky a axiomatiky?

Někdy bývá situace vykládána tak, že ‚skutečnou' podstatu KVP (a podobně kterékoli jiné logiky) tvoří její sémantika; že axiomatika vstupuje do hry jenom jako naše pomůcka, kterou se nám daří některé aspekty této sémantiky šikovně uchopit. Například odvozování vstupuje z tohoto pohledu do hry jenom jako prostředek šikovného uchopení vyplývání, o které jedině jde. Axiomatika se pak jeví jenom jako nástroj studia sémantiky.

Na celou situaci je ale možné se dívat i z opačné strany, ze které je naopak primární axiomatika. Vezměme například konjunkci. Z předchozího pohledu je primárně charakterizována svou sémantickou definicí, tj. příslušnou pravdivostní tabulkou. Zdá se však, že stejně tak dobře ji můžeme charakterizovat tím, že je to operátor, který ze dvou výroků vytvoří takový složený výrok, ze kterého je odvoditelná každá z jeho složek, a který je naopak odvoditelný z obou těchto složek dohromady – tedy fakticky prostřednictvím toho, co je vyjádřeno axiomy (3)–(5). (Pravdivostní tabulku pro konjunkci pak vlastně můžeme nahlédnout jako rekapitulaci těchto tří axiomů.)

Z historického hlediska můžeme říci, že existují stejně tak logiky, které byly primárně definovány sémanticky a pro něž se až později hledala příslušná axiomatika, jako logiky, které byly původně definovány axiomaticky a ke kterým se hledala dodatečně sémantika. K těm prvním patří například vícehodnotové logiky, k těm druhým třeba intuicionistická nebo modální logika. (Přitom, jak se ukázalo, ne ke každé sémantice musí existovat korektní a úplná axiomatika – ne každá sémantika je, jak také říkáme, *axiomatizovatelná*. Naopak ke každé axiomatice *nějaká* sémantika existuje – to je ovšem dáno tím, že pojem sémantiky chápeme dostatečně široce.)

Které z výše probíraných charakteristických vlastností KVP lze smysluplně hledat i na jiných logických počtech, než je KVP? Je zřejmé, že jakmile máme logiku zadánu jak prostřednictvím axiomatiky, tak sémantiky, vyvstává otázka **korektnosti a úplnosti**. Je-li počet korektní a úplný, znamená to, že jsou jeho axiomatika a sémantika, jak už jsme řekli, dvěma stranami téže mince. Není-li ovšem počet korektní a úplný, pak vlastně jako by byl složen ze dvou k sobě nepasujících částí – a naskýtá se tedy myšlenka, zda to vlastně nejsou dvě různé logiky dané chybně dohromady. Z tohoto hlediska se tedy může zdát, že ‚správný' logický počet vlastně ani nemůže nebýt korektní a úplný. Všimněme si, že obecně může být počet korektní a úplný, aniž by byl ***silně*** **korektní a úplný**, to jest teorémy se mohou krýt s tautologiemi, aniž by se odvozování krylo s vyplýváním.

Jak už jsme ovšem poznamenali, můžeme mít sémantiku, ke které korektní a úplná axiomatika prostě neexistuje. V takovém případě pak přichází v úvahu tento počet vybavit nějakou axiomatikou, která jeho sémantiku alespoň nějak ‚aproximuje' – obvykle takovou, která je vzhledem k této sémantice korektní a která sice není úplná, ale je ‚co nejúplnější'. V *tomto* případě tedy mluvit o logice, která není úplná, smysl dávat může. (My se ovšem v této knize s žádnou takovou logikou nesetkáme.)

Často ovšem o nějakém logickém počtu uvažujeme buď pouze z hlediska jeho axiomatiky, nebo pouze jeho sémantiky. (To může být proto, že jedna z těchto složek je v nějakém smyslu výrazně ‚průhlednější', nebo proto, že historicky byl tento počet navržen právě jenom prostřednictvím této složky.) V takovém případě samozřejmě nedává řeč o korektnosti a úplnosti smysl – jaké jiné charakteristiky se pak na takový počet vztahují?

V každém případě se můžeme ptát, zda pro počet platí věta o **dedukci**, to jest zda v jeho rámci existuje binární operátor O takový, že A_{n+1} je odvoditelný (nebo vyplývá) z A_1, ..., A_n právě tehdy, když je výrok $O(A_n, A_{n+1})$ odvoditelný (vyplývá) z A_1, ..., A_{n-1}. Všimněme si, že je-li počet korektní a úplný a platí-li pro něj věta o dedukci na úrovni jak syntaxe, tak sémantiky, pak platí, že výrok A je odvoditelný z *konečné* množiny $\{A_1, ..., A_n\}$ právě tehdy, když z ní vyplývá. Pak totiž platí, že A je odvoditelný z $\{A_1, ..., A_n\}$ právě tehdy, když je výrok $A_1 \rightarrow (...(A_n \rightarrow A)...)$ teorémem, to jest právě když je tento výrok tautologií, to jest právě když A vyplývá z A_1, ... A_n.

Také **rozhodnutelnost** je zřejmě důležitá vlastnost každého logického počtu, ať už je zadán axiomaticky, sémanticky či oběma těmito způsoby. Je zřejmě velice podstatné, jsme-li pro každý daný výrok principiálně schopni rozhodnout, zda je teorémem (tautologií), nebo ne.

Kompaktnost je, jak jsme viděli, vždy triviální pro odvoditelnost. To znamená, že každé odvození může fakticky využívat jenom konečný počet předpokladů, a je-li něco odvoditelné z nekonečné množiny předpokladů, pak je to *eo ipso* odvoditelné z nějaké její konečné podmnožiny. Máme-li tedy počet zadán axiomaticky, je kompaktnost samozřejmostí, a máme-li silně korektní a úplný počet, přenáší se kompaktnost přímočaře i na sémantiku. Problém kompaktnosti tedy v netriviální podobě vyvstává jedině pro počty, které jsou zadány pouze prostřednictvím sémantiky, pro kterou nemáme silně korektní a úplnou axiomatiku.

Všimněme si nyní, že je-li počet naopak kompaktní a platí-li v něm, že *A* je odvoditelný z konečné množiny $\{A_1, ... A_n\}$ právě tehdy, když z ní vyplývá, pak je tento počet silně korektní a úplný. V takovém případě je totiž *A* odvoditelný z (ne nutně konečné) množiny *X* právě tehdy, když je odvoditelný z nějaké její konečné podmnožiny, to jest právě tehdy, když z nějaké její konečné podmnožiny vyplývá, a to nastává právě tehdy, když vyplývá z *X*. Vzhledem k tomu, co jsme konstatovali výše v souvislosti s větou o dedukci, toto znamená, že silná korektnost a úplnost je důsledkem prosté korektnosti a úplnosti, kompaktnosti a platnosti syntaktické i sémantické verze věty o dedukci.

O **denotační nasycenosti** má zřejmě smysl uvažovat v případě výrokového počtu, který je zadán sémanticky. V případě KVP bylo přirozené se ptát, zda nám ty operátory, které v jazyce máme, stačí k tomu, abychom jejich prostřednictvím definovali operátor s jakoukoli možnou pravdivostní tabulkou. Obecněji se v případě výrokového počtu můžeme ptát, zda jeho operátory stačí k tomu, abychom jejich prostřednictvím definovali operátor s jakoukoli sémantickou hodnotou stejného typu, jakou mají ty operátory, které již má. Smysluplnost této otázky ovšem zřejmě závisí na vymezení, co je a co není ‚stejného typu‘.

3 Některé alternativy

3.1 Lze KVP vylepšit?

V principu zřejmě existují dva způsoby, jak se od KVP dostat k nějakému lepšímu (či prostě jinému) výrokovému počtu: modifikace a rozšíření. V prvním případě něco v našich existujících definicích KVP pozměníme, v tom druhém tyto definice necháme tak, jak jsou, a něco k nim přidáme. Sledujme nejprve první z těchto možností; a podívejme se na ni nejprve optikou axiomatiky.

Bylo by možné či rozumné některé z axiomů KVP vypustit, či naopak nějaké přidat? Fakt, že je axiomatický systém KVP korektní a úplný vzhledem ke standardní sémantice, samozřejmě naznačuje, že *z hlediska této sémantiky* je axiomatika v pořádku právě tak, jak je – můžeme ji samozřejmě nahradit jakoukoli jinou z těch, které vedou ke stejným teorémům (*viz* příklady v oddíle 2.4), jakákoli podstatnější změna by však vedla k diskrepanci mezi teorémy a tautologiemi. Jinými slovy, jakákoli netriviální změna axiomatiky by vedla k potřebě změny sémantiky. Nebudeme-li však na této sémantice lpět, můžeme o změnách axiomatiky uvažovat.

Nejméně problematickým operátorem KVP se zdá být konjunkce, kterou můžeme brát za standardizaci spojky „a“ přirozeného jazyka. Zdá se, že souvětí spojené touto spojkou je v typickém případě skutečně pravdivé právě tehdy, když jsou pravdivé obě spojované věty; a to je přesně to, co stanovují axiomy (3)–(5). O mnoho problematičtější (alespoň na první pohled) se nezdá být ani disjunkce, která se bere za standardizované zachycení „nebo“: souvětí spojené touto spojkou se jeví být v typickém případě pravdivé právě tehdy, když je pravdivá alespoň jedna ze spojovaných vět, což je zachycováno axiomy (6)–(8).

Negace však spolu s disjunkcí dává jeden z těch teorémů KVP, které jsou považovány za nejproblematičtější, totiž

[5] $A \vee \neg A$,

tedy zákon vyloučení třetího. Vzhledem k sémantice disjunkce a negace můžeme tento teorém číst jako tvrzení, že každý výrok je pravdivý nebo nepravdivý. Toto tvrzení bývá napadáno z různých pozic. Jedním z důvodů je, že v přirozeném jazyce existuje spousta výroků, u kterých lze o pravdivosti či nepravdivosti hovořit jenom s obtížemi (výroky obsahující ‚indexické‘ výrazy, jako je „já“ nebo „tady“, výroky o budoucnosti atd.). V rámci matematiky se zrodila jiná námitka, totiž že pravdivé je jenom to, co lze dokázat, a pokud nelze nějaký výrok ani dokázat, ani vyvrátit (to jest dokázat jeho negaci), není ani pravdivý, ani nepravdivý. (To vychází z názoru, že matematika není *popisováním* nějakého předem daného ‚matematického světa', ale spíše *konstruováním* takového světa. Například výrok tvrdící existenci matematického objektu, který neumíme zkonstruovat, ale ani neumíme dokázat, že je nezkonstruovatelný, tedy podle tohoto názoru (zatím?) není ani pravdivý, ani nepravdivý[21].)

Nejproblematičtější z logických spojek je ovšem implikace. Ta bývá nahlížena jako standardizace spojení „jestliže ... pak ..." přirozeného jazyka; to se však v některých ohledech nezdá zachycovat příliš věrně. Například axiom

(1) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

stanoví, že k pravdivosti implikace stačí pravdivost jejího konsekventu; *A* tedy může implikovat *B*, aniž by spolu tyto dva výroky nějak souvisely. To se nezdá být příliš v souladu s tím, jak v přirozeném jazyce funguje „jestliže ... pak ...": věta „Jestliže je v Číně sucho, pak se v Česku vaří pivo", které by podle (1) měla být pravdivá prostě v důsledku pravdivosti svého konsekventu „V Česku se vaří pivo", se zdá být přinejmenším problematické.

Problematický se zdá být i teorém

[6] $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$,

podle kterého stačí k pravdivosti implikace nepravdivost jejího antecedentu. Věta „Jestliže je Česko u moře, pak je jeho hlavním městem Praha" (která by tak měla být pravdivá v důsledku nepravdivosti „Česko je u moře") opět jistě není příkladnou pravdivou větou. Výrokům (1) a [6] se někdy říká *paradoxy implikace*[22]. (Z našeho pohledu to ovšem žádné paradoxy nejsou: z hlediska KVP jakožto formálního systému totiž jenom vyjadřují to, že jsme se implikaci rozhodli definovat pomocí obvyklé pravdivostní tabulky, na čemž jistě není nic paradoxního; a z hlediska KVP jakožto rekonstrukce jazyka zase ukazují, že implikaci nelze obecně považovat za věrnou rekonstrukci spojení „jestliže ... pak ..." – a to také jistě není žádný paradox.)

[21] *Viz* např. Heyting (1956) či Dummett (1977).

[22] *Viz* Mleziva (1970, §2.4).

Nejčastější pokusy o ‚vylepšení' KVP se tedy soustředí na odstranění zákona vyloučení třetího (to jest na opuštění principu, že každý výrok má buďto hodnotu P, nebo hodnotu N), nebo paradoxů implikace, to jest na zavedení nějaké ‚lepší' implikace. V následujícím oddíle se podíváme na modifikaci KVP, která spočívá v tom, že se odmítne axiom (10), a tím se blokuje odvození teorému [5].

Je toto odmítnutí rozumné? Axiom (10) se zdá říkat, že není-li *A* nepravdivý, je pravdivý – a to se může zdát znít jako neodmítnutelná samozřejmost. Nemá-li *A* hodnotu N, pak jistě musí mít hodnotu P – ovšem *za předpokladu, že jednu z hodnot P a N mít musí*. Jakmile bychom připustili, že mohou existovat výroky, které nemají hodnotu P ani N (to jest které mají buď nějakou jinou hodnotu, nebo nemají vůbec žádnou), stává se (10) problematickým. Pak totiž *nebýt nepravdivý* nemusí být totéž jako *být pravdivý*. Máme-li tedy důvod, proč připustit výroky, které nejsou ani pravdivé, ani nepravdivé, je odmítnutí (10) na pořadu dne.

3.2 Intuicionistický výrokový počet

Intuicionistický výrokový počet, IVP, vznikne z KVP tak, že se axiom (10) nahradí slabším axiomem

(10′) $A\to(\neg A\to B)$.

Výrazem ‚slabší' myslíme to, že ačkoli (10′) je teorémem KVP (je zřejmě odvoditelný z teorému [6] prostřednictvím [3]), (10) teorémem IVP není. To znamená, že každý teorém IVP je teorémem KVP, avšak nikoli naopak.

Intuicionistická logika byla původně navržena L. E. J. Brouwerem (1908; 1913); příslušný výrokový počet byl pak artikulován Heytingem (1930; 1934). (Existuje i tzv. *minimalistická* verze intuicionistického počtu, ve které je axiom (10) vypuštěn *bez náhrady*.[23] Ta byla navržena I. Johanssonem (1936) a my se jí zabývat nebudeme.) Díky Brouwerově propracované kritice východisek klasické logiky si tato alternativa klasické logiky získala určitý počet příznivců mezi

[23] *Viz* Mleziva (1970, §III.6); Epstein (2001, §VII.F).

matematiky a později, zejména díky pracím M. Dummetta, který ji spojil se stanoviskem tzv. anti-realismu[24], i mezi filosofy.

Které z teorémů, jež jsme dokázali pro KVP, zůstávají v platnosti i v rámci IVP? Určitě ty, které jsme v rámci KVP dokázali bez použití teorému (10), to jest

[1] $(A \to A)$,
[2] $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$,
[3] $(A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$,
[4] $(A \to (A \to B)) \to (A \to B)$,
[7] $A \to \neg\neg A$,
[8] $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$,
[12] $A \to (\neg B \to \neg (A \to B))$.

Navíc platí i

[6] $\neg A \to (A \to B)$,

k jehož důkazu zřejmě stačí namísto (10) i (10′).

Zbývající teorémy, které jsme v předchozí kapitole pro KVP dokázali, neplatí (využití axiomu (10) v jejich důkazech v rámci KVP se tedy nelze vyhnout): Neplatí tedy

[5] $A \vee \neg A$,
[9] $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$,
[10] $(\neg A \to \neg B) \to ((\neg A \to B) \to A)$,
[11] $(A \to B) \to ((\neg A \to B) \to B)$,
[13] $\neg (A \to B) \to A$.

Pro IVP platí také věta o dedukci. To vyplývá z toho, co jsme konstatovali v oddíle 2.2: důkaz této věty, který jsme provedli, zůstává v platnosti pro každý výrokový počet, který má axiomy (1) a (2) a který má jako jediné pravidlo (*mp*).

[24] *Viz* zejména Dummett (1991).

V IVP ovšem platí některé speciální případy těch teorémů KVP, které neplatí obecně. Ač například $\neg\neg A \rightarrow A$ teorémem IVP není, teorémem je

[14] $\neg\neg\neg A \rightarrow \neg A$.

Důkaz je triviální:

1. $A \rightarrow \neg\neg A$	[7]
2. $\neg\neg\neg A \rightarrow \neg A$	1., [8]

Méně triviálním teorémem je

[15] $\neg\neg(\neg\neg A \rightarrow A)$:

1. $A \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow A)$	(1)
2. $\neg(\neg\neg A \rightarrow A) \rightarrow \neg A$	1., [8]
3. $\neg A \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow A)$	(10′)
4. $\neg(\neg\neg A \rightarrow A) \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow A)$	2., 3., [2]
5. $\neg(\neg\neg A \rightarrow A) \rightarrow \neg(\neg\neg A \rightarrow A)$	[1]
6. $\neg\neg(\neg\neg A \rightarrow A)$	4., 5., (9)

Teorém

[16] $\neg\neg(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B)$

nyní dokážeme tak, že nejprve dokážeme, že z $\neg\neg(A \rightarrow B)$ a $\neg B$ je odvoditelný $\neg A$:

1. $\neg\neg(A \rightarrow B)$	předpoklad
2. $\neg\neg(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B))$	[6]
3. $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$	1., 2.
4. $\neg B$	předpoklad
5. $A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B))$	[12]
6. $\neg B \rightarrow (A \rightarrow \neg(A \rightarrow B))$	5., [3]
7. $A \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$	4., 6.
8. $A \rightarrow (A \rightarrow B)$	7., 3., [2]
9. $\neg A$	7., 8., (9)

Podle věty o dedukci je tedy teorémem výrok

$$\neg\neg(A\to B)\to(\neg B\to\neg A),$$

a z něj je [16] odvoditelný za pomoci [8] a [2].

Dokažme ještě teorém, který budeme později potřebovat:

[17] $\neg\neg(A\wedge B)\to(\neg\neg A\wedge\neg\neg B)$:

1. $(A\wedge B)\to A$	(3)
2. $\neg A\to\neg(A\wedge B)$	1., [8]
3. $\neg\neg(A\wedge B)\to\neg\neg A$	2., [8]
4. $(A\wedge B)\to B$	(4)
5. $\neg B\to\neg(A\wedge B)$	4., [8]
6. $\neg\neg(A\wedge B)\to\neg\neg B$	5., [8]
7. $\neg\neg A\to(\neg\neg B\to(\neg\neg A\wedge\neg\neg B))$	(5)
8. $\neg\neg(A\wedge B)\to(\neg\neg B\to(\neg\neg A\wedge\neg\neg B))$	3., 7., [2]
9. $\neg\neg B\to(\neg\neg(A\wedge B)\to(\neg\neg A\wedge\neg\neg B))$	8., [3]
10. $\neg\neg(A\wedge B)\to(\neg\neg(A\wedge B)\to(\neg\neg A\wedge\neg\neg B))$	6., 9., [2]
11. $\neg\neg(A\wedge B)\to(\neg\neg A\wedge\neg\neg B)$	10., [4]

Dokažme nyní důležitou větu o vztahu mezi odvozováním v KVP a IVP, které budeme říkat *věta o zrcadlení*:

Platí: Kdykoli je A odvoditelný z A_1, ..., A_n v rámci KVP, je $\neg\neg A$ odvoditelný z $\neg\neg A_1$, ..., $\neg\neg A_n$ v rámci IVP.

Důkaz: Tuto větu dokážeme tak, že ukážeme, jak je jakýkoli důkaz A z A_1, ..., A_n v rámci KVP transformovatelný na důkaz $\neg\neg A$ z $\neg\neg A_1$, ..., $\neg\neg A_n$ v rámci IVP. Budeme postupovat indukcí podle délky tohoto důkazu. Předpokládejme nejprve, že tento důkaz má jediný řádek. Pak na tomto řádku musí být A, a ten tedy musí být buď axiomem, nebo jedním z A_1, ..., A_n. Je-li A jedním z axiomů (1)–(9), je i axiomem IVP, a je tedy v rámci IVP odvoditelný z prázdné množiny předpokladů, a tudíž tím spíše z $\neg\neg A_1$, ..., $\neg\neg A_n$; a je-li z $\neg\neg A_1$, ..., $\neg\neg A_n$ v IVP odvoditelný A, je z nich, za použití teorému [7], odvoditelný i $\neg\neg A$. Je-li A axiomem (10), tj. $\neg\neg A'\to A'$, je $\neg\neg A$ teorémem [15], a je tudíž opět odvoditelný z prázdné množiny předpokladů, a tím spíše z $\neg\neg A_1$, ..., $\neg\neg A_n$. A je-li A jedním z A_1, ..., A_n, musí být zřejmě $\neg\neg A$ jedním z $\neg\neg A_1$, ..., $\neg\neg A_n$ a je z nich tedy v rámci IVP odvoditelný.

Předpokládejme nyní, že každý důkaz A z $A_1, \ldots, A_n$ v rámci KVP, který má nejvýše m řádků, už umíme transformovat na důkaz $\neg\neg A$ z $\neg\neg A_1, \ldots, \neg\neg A_n$ v rámci IVP, a vezměme nějaký takový důkaz délky m+1. V netriviálním případě je A na jeho posledním řádku výsledkem aplikace pravidla (*mp*) na výroky A' a $A' \rightarrow A$, které se vyskytují v důkazu dříve. Protože tyto dva výroky jsou tedy z $A_1, \ldots, A_n$ odvozeny na nejvýše m řádcích, jsou podle indukčního předpokladu z $\neg\neg A_1, \ldots, \neg\neg A_n$ odvoditelné výroky $\neg\neg A'$ a $\neg\neg(A' \rightarrow A)$. Pak je ale s použitím teorému [16] z $\neg\neg A_1, \ldots, \neg\neg A_n$ odvoditelný i $\neg\neg A$.

Klasické odvozování se tedy v rámci intuicionistického ‚zrcadlí' v podobě odvozování dvojitých negací. Z toho plyne několik podstatných důsledků. Zřejmým důsledkem je fakt, že kdykoli je A teorémem KVP, je $\neg\neg A$ teorémem IVP. Ne tak zřejmým důsledkem je, že výrok tvaru $\neg A$ je teorémem KVP právě tehdy, když je teorémem IVP. To je zřejmé v jednom směru: každý teorém IVP je teorémem KVP, a tedy tím spíše každý teorém tvaru $\neg A$. Je-li však naopak $\neg A$ teorémem KVP, pak je podle předchozího tvrzení $\neg\neg\neg A$ teorémem IVP, a v důsledku teorému [14] je tedy teorémem IVP i $\neg A$.

Tento důsledek lze ovšem dále zobecnit na všechny výroky, které neobsahují disjunkci a implikaci, to jest takové, které jsou vytvořené pouze za pomoci $\neg$ a $\wedge$: každý takový výrok je teorémem KVP právě tehdy, když je teorémem IVP. Abychom to dokázali, zřejmě opět stačí dokázat, že každý takovýto výrok A, který je teorémem KVP, je i teorémem IVP. Je-li A tvaru $\neg A'$, pak už víme, že tomu tak je, a platí to i v případě, že A je atomický, protože pak A teorémem KVP není; zbývá tedy případ, kdy je A tvaru $A' \wedge A''$. Tento případ dokážeme indukcí podle počtu konjunkcí v A. Víme, že nevyskytuje-li se v něm žádná, tvrzení platí; předpokládejme tedy, že $A' \wedge A''$ obsahuje n+1 konjunkcí a že už víme, že tvrzení platí pro všechny výroky, které obsahují konjunkcí nejvýše n. V důsledku axiomů (3) a (4) KVP jsou A' a A'' teorémy KVP; a v důsledku toho, že jak A', tak A'' obsahují nejvýše n konjunkcí, tedy platí, že A' a A'' jsou i teorémy IVP. Z toho s použitím axiomu (5) IVP dostáváme, že teorémem IVP je i $A' \wedge A''$.

Uvědomme si však nyní, že KVP můžeme artikulovat *výhradně* s použitím negace a konjunkce (disjunkci a implikaci můžeme chápat jenom jako notační zkratky). Z toho, co jsme právě ukázali, plyne, že KVP v této podobě můžeme prostě ‚vnořit' do IVP: tj. každý výrok KVP považovat i za výrok IVP. Takže vedle faktu, že IVP je ve zřejmém slova smyslu slabší než KVP (každý teorém IVP je teorémem KVP, avšak nikoli naopak), máme nyní i fakt, že KVP je v jistém smyslu IVP *ekvivalentní* (každý teorém KVP, formulovaný pomocí negace a konjunkce, je i teorémem IVP a naopak). Jak to jde dohromady? Není to rozpor?

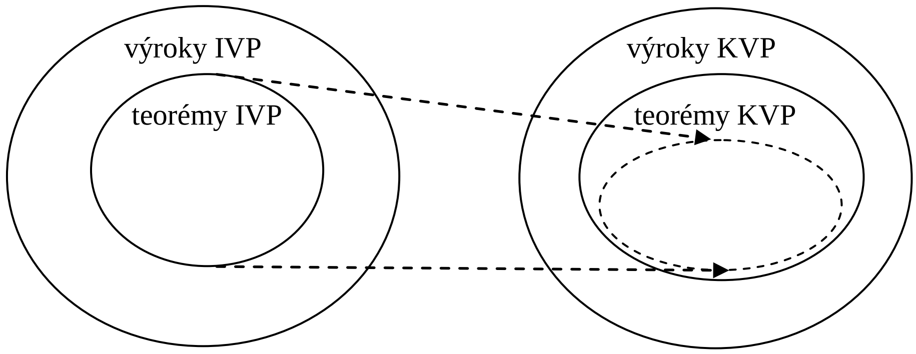
Odpověď na tuto otázku získáme, když se zamyslíme nad těmi výroky KVP, které obsahují disjunkci či implikaci. Každý z nich můžeme ‚přeložit' na výrok obsahující pouze negaci a konjunkci. V rámci IVP tomu však tak *není*, výrok $A \vee B$ *není* ekvivalentní výroku $\neg(\neg A \wedge \neg B)$ ani žádnému jinému výroku obsahujícímu jenom konjunkci a negaci, a podobně pro $A \rightarrow B$. Intuicionistické operátory jsou tedy v tomto smyslu vzájemně *nezávislé*. Samozřejmě ovšem platí, že $A \vee B$ je teorémem KVP právě tehdy, když je $\neg(\neg A \wedge \neg B)$ teorémem KVP, a tedy teorémem IVP – není tomu ale tak, že by toto nastávalo právě tehdy, když je $A \vee B$ teorémem IVP.

To nás může dovést k následující úvaze: možná nebylo dobře, že jsme pro intuicionistické operátory zavedli stejné symboly jako pro klasické – možná by bylo rozumnější nebrat například intuicionistickou a klasickou disjunkci za dvě verze téhož operátoru, ale prostě za dva různé operátory. Nemohlo by tomu být například tak, že by klasické disjunkci odpovídala v rámci IVP nikoli disjunkce, ale něco jiného? Zavedeme-li pro intuicionistické operátory jiné značky než pro klasické, třeba $\sim$ namísto $\neg$, $\cap$ namísto $\wedge$, $\cup$ namísto $\vee$ a $\supset$ namísto $\rightarrow$, můžeme se ptát: je ‚tím správným' překladem operátoru $\vee$ do jazyka IVP operátor $\cup$ (a analogicky pro ostatní operátory)? Předchozí úvaha totiž naznačila, že budeme-li brát za intuicionistický ‚překlad' klasického výroku $A \vee B$ nikoli intuicionistický výrok $A \cup B$, ale výrok $\sim(\sim A \cap \sim B)$, můžeme ekvivalenci mezi KVP a IVP rozšířit i na disjunktivní výroky KVP, a podobně pro výroky implikativní, budeme-li za intuicionistický ‚překlad' $A \rightarrow B$ brát $\sim(A \cap \sim B)$.

Máme tu tedy *dva* překlady: (1) ‚Standardní' překlad spočívá v tom, že se každý operátor prostě nahradí svým protipólem; takže označíme-li pro každý výrok A KVP symbolem A^* jeho překlad do IVP, platí

$A^* = A$, je-li A atomický,
$(\neg A)^* = \sim A^*$,
$(A \wedge B)^* = A^* \cap B^*$,
$(A \vee B)^* = A^* \cup B^*$,
$(A \rightarrow B)^* = A^* \supset B^*$.

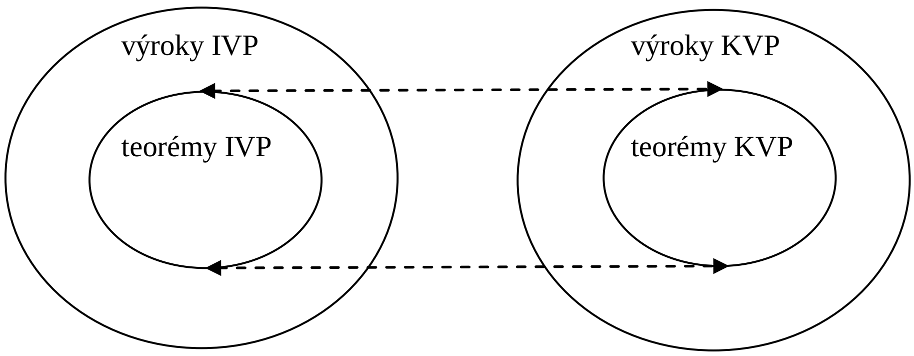
Z hlediska tohoto překladu nám IVP vychází jako slabší verze KVP:



(2) Ten druhý překlad se od toho prvního liší v tom, jak překládáme disjunkci a implikaci:

$A^* = A$, je-li A atomický,
$(\neg A)^* = {\sim}A^*$,
$(A \wedge B)^* = A^* \cap B^*$,
$(A \vee B)^* = {\sim}({\sim}A^* \cap {\sim}B^*)$,
$(A \rightarrow B)^* = {\sim}(A^* \cap {\sim}B^*)$.

V tomto případě bude výrok jazyka KVP teorémem KVP právě tehdy, když bude jeho překlad do IVP teorémem IVP; to znamená, že kdybychom jazyk intuicionistické logiky omezili na negaci a konjunkci, vyšly by IVP a KVP jako ekvivalentní (jinak budou samozřejmě existovat teorémy IVP, které nebudou překlady žádných výroků KVP):



Z toho vyplývá, že srovnávat dvě logiky dává smysl jedině relativně k nějakému překladu operátorů jedné z nich do té druhé. To je dále dokumentováno existencí *dalšího* zajímavého překladu KVP do IVP:

$A^* = {\sim}{\sim}A$, je-li A atomický,
$(\neg A)^* = {\sim}A^*$,
$(A \wedge B)^* = A^* \cap B^*$,
$(A \vee B)^* = {\sim}({\sim}A^* \cap {\sim}B^*)$,
$(A \to B)^* = A^* \supset B^*$.

I v tomto případě bude výrok jazyka KVP teorémem KVP právě tehdy, když bude jeho překlad do IVP teorémem IVP. Navíc bude platit, že výrok A je v KVP odvoditelný z $A_1, ..., A_n$ právě tehdy, když je překlad A odvoditelný v IVP z překladů $A_1, ..., A_n$ (což neplatí v případě předchozího překladu).

Abychom to dokázali, dokažme nejprve dvě pomocná tvrzení:

Platí: Je-li A libovolný výrok KVP, pak je ${\sim}{\sim}A^* \supset A^*$ teorémem IVP.
Důkaz provedeme indukcí. Je-li A atomický, pak A^* je ${\sim}{\sim}A$, a ${\sim}{\sim}A^* \supset A^*$ je tedy ${\sim}{\sim}{\sim}{\sim}A \supset {\sim}{\sim}A$, což je speciální případ teorému [14]. Předpokládejme tedy, že A není atomický a tvrzení věty platí pro všechny jeho podvýroky. Je-li A tvaru $\neg B$, pak A^* je ${\sim}B^*$, a ${\sim}{\sim}A^* \supset A^*$ je tedy ${\sim}{\sim}{\sim}B^* \supset {\sim}B^*$, což je teorém [14]. Je-li A tvaru $B \wedge C$, pak A^* je $B^* \cap C^*$, a ${\sim}{\sim}A^* \supset A^*$ je tedy ${\sim}{\sim}(B^* \cap C^*) \supset B^* \cap C^*$. To se dokáže tak, že se z indukčního předpokladu ${\sim}{\sim}B^* \supset B^*$ a ${\sim}{\sim}C^* \supset C^*$ odvodí $({\sim}{\sim}B^* \cap {\sim}{\sim}C^*) \supset (B^* \cap C^*)$ a pak se použije teorém [17]. Je-li A rovno $B \to C$, pak A^* je $B^* \supset C^*$, a ${\sim}{\sim}A^* \supset A^*$ je tedy ${\sim}{\sim}(B^* \supset C^*) \supset (B^* \supset C^*)$. Při důkazu tohoto tvrzení se vyjde z faktu, že podle [16] platí ${\sim}{\sim}(B^* \supset C^*) \supset ({\sim}{\sim}B^* \supset {\sim}{\sim}C^*)$, z toho se potom s využitím teorému [7] odvodí ${\sim}{\sim}(B^* \supset C^*) \supset (B^* \supset {\sim}{\sim}C^*)$. Poté se využije indukční předpoklad ${\sim}{\sim}C^* \supset C^*$. Je-li nakonec A tvaru $B \vee C$, pak A^* je ${\sim}({\sim}B^* \cap {\sim}C^*)$, a ${\sim}{\sim}A^* \supset A^*$ je tedy ${\sim}{\sim}{\sim}({\sim}B^* \cap {\sim}C^*) \supset {\sim}({\sim}B^* \cap {\sim}C^*)$, což je teorém [14].

Označme nyní symbolem A^+ ten výrok KVP, který vznikne z výroku A^*, nahradíme-li v něm intuicionistické operátory odpovídajícími operátory klasickými (takže například jsou-li A a B atomické, bude $(A \vee B)^+$ rovno $\neg(\neg\neg\neg A \wedge \neg\neg\neg B)$, protože $(A \vee B)^* = {\sim}({\sim}{\sim}{\sim}A \cap {\sim}{\sim}{\sim}B)$).

Platí: Je-li A libovolný výrok KVP, pak je $A^+ \leftrightarrow A$ teorémem KVP.
Důkaz: Pro atomické výroky je tvrzení přímým důsledkem axiomu (10) a teorému [7]. Indukce je pak triviální.

Platí: Výrok A je v KVP odvoditelný z množiny výroků M právě tehdy, když je výrok A^* v IVP odvoditelný z množiny $M^* = \{B^* \mid B \in M\}$.

Důkaz: Nechť je A odvoditelný v KVP z M. Pak M obsahuje prvky $A_1, ..., A_n$ takové, že je A odvoditelný z $A_1, ..., A_n$. Z druhého z právě dokázaných pomocných tvrzení plyne, že pak je A^+ v KVP odvoditelný z $A_1^+, ..., A_n^+$, a tudíž z $A_1^+ \wedge ... \wedge A_n^+$. Pak ale podle věty o zrcadlení platí, že je $\sim\sim A^*$ v IVP odvoditelný z $\sim\sim(A_1^* \cap ... \cap A_n^*)$. Potom je však podle prvního z pomocných tvrzení z $\sim\sim(A_1^* \cap ... \cap A_n^*)$ odvoditelný i A^*. A z teorému [7] pak vyplývá, že A^* je odvoditelný i z $A_1^* \cap ... \cap A_n^*$. To znamená, že A^* je v IVP odvoditelný z M^*.

Jestliže je naopak A^* v IVP odvoditelný z M^*, pak je A^+ v KVP odvoditelný z M^+ ($= \{B^+ \mid B \in M\}$); ale z toho podle druhého z pomocných tvrzení plyne, že A je v KVP odvoditelný z M.

Tento fakt jako by zase naznačoval, že rozdíl mezi KVP a IVP je především v tom, že to, co se v rámci KVP rozumí pravdivostí, je z hlediska IVP jenom absencí nepravdivosti. To samozřejmě opět odkazuje k faktu, že IVP musí počítat ještě s nějakou další možností (nebo možnostmi) kromě pravdivosti a nepravdivosti.

Existuje tedy nějaká jediná ‚správná‘ interpretace operátorů IVP v KVP (či naopak), která by zakládala ten ‚správný‘ překlad? Je ‚správné‘ chápat třeba klasickou implikaci z hlediska IVP jako nepřípustně širokou variantu intuicionistické implikace; nebo nikoli jako implikaci, ale negaci konjunkce antecedentu s negací konsekventu? Anebo ji máme chápat jako vyjádření toho, že konsekvent není nepravdivý, není-li nepravdivý antecedent? Nezdá se, že by existoval důvod pro to, abychom některou z uvedených interpretací upřednostňovali před ostatními. Obecnějším poučením je, že srovnávat dvě logiky můžeme různými způsoby – nemusí existovat jenom jediná ‚správná‘ interpretace jedné z nich v té druhé.

Tento fakt samozřejmě plyne z toho, co jsme zdůrazňovali v oddíle 1.3, totiž že na logický počet, jako je KVP, je možné se dívat dvojím způsobem: můžeme ho vidět prostě jako abstraktní, formální objekt, který je jednoznačně vymezen svou definicí, a jednak jako prostředek zachycení něčeho tomuto objektu vnějšího, třeba nějakých struktur našeho jazyka. Z toho prvního pohledu je identita operátoru, jakým je třeba implikace, dána výhradně příslušnou axiomatikou nebo sémantikou (v případě KVP víme, že to je totéž; v případě IVP zatím žádnou sémantiku nemáme) – takže například klasická implikace je prostě *jiným* operátorem než intuicionistická implikace. Z toho druhého si však mohou dva operátory (třeba klasická a intuicionistická implikace) odpovídat v tom smyslu, že jsou oba míněny jako pokusy o zachycení téhož (třeba spojení „jestliže ... pak ...“ přirozeného jazyka).

3.3 Vícehodnotové výrokové počty

Odmítnout zákon vyloučení třetího tedy *de facto* znamená odmítnout dvojhodnotovost sémantiky – to jest připustit, že můžeme mít výroky, které nejsou ani pravdivé, ani nepravdivé. Z tohoto hlediska se zdá, že vhodná sémantika pro intuicionistickou logiku by mohla vzniknout prostě tak, že by se vedle hodnot P a N zavedla hodnota třetí (nebo že by se sice ponechaly hodnoty dvě, ale připustilo by se, že některé výroky nemusí mít ani jednu z nich).

Modifikujme tedy sémantiku KVP tak, aby mohly výroky nabývat kromě hodnot P a N i hodnoty X. Existují zřejmě různé způsoby, jak takovou třetí hodnotu chápat: výrok s touto hodnotou můžeme vidět buď jako zachycení věty, která je prostě nesmyslná (ač je tvořena gramaticky správně), nebo věty, která sice dává smysl, ale z nějakého důvodu u ní nelze hovořit o pravdivosti či nepravdivosti, nebo věty, která je někde na hranici mezi pravdivou a nepravdivou. Příklady vět prvního typu by mohly být třeba Carnapova „Caesar je prvočíslo“ nebo Chomského „Bezbarvé zelené myšlenky zuřivě spí“. Mezi věty druhého typu by mohly patřit například věty obsahující zájmena odkazující ke kontextu užití, jako je „Já jsem tady“ (ty sice mohou být ve vhodném kontextu užity k učinění pravdivé nebo nepravdivé výpovědi, samy o sobě však jistě ani pravdivé, ani nepravdivé nejsou); nebo věty odkazující k neexistujícím osobám, jako je Russellova „Současný král Francie je holohlavý“; či třeba věty o budoucnosti, jako je Aristotelova „Zítra bude námořní bitva“ (ty nejsou podle některých logiků pravdivé ani nepravdivé, dokud nenastane čas, o kterém hovoří). Příkladem vět toho třetího typu, to jest vět, které se zdají být někde mezi pravdivostí a nepravdivostí, jsou věty s vágními predikáty („Praha je obrovská“).

Pokud tedy připustíme, že výroky mohou nabývat vedle hodnot P a N i hodnoty X, musíme definovat, jakou hodnotu bude mít výrok $\neg A$, bude-li mít A hodnotu X, a jaké hodnoty budou mít $A \wedge B$, $A \vee B$ a $A \rightarrow B$, bude-li mít hodnotu X jeden či oba z výroků A a B. Podle toho, jak na tuto otázku odpovíme, dostáváme různé verze trojhodnotové logiky.

3.3.1 Bočvarova trojhodnotová logika

Nejjednodušším způsobem, jak tyto hodnoty definovat, je stanovit, že výrok má hodnotu X ve všech případech, kdy má tuto hodnotu nějaká jeho část. (Tento způsob se zvláště nabízí, chápeme-li hodnotu X prvním z výše probíraných způsobů, tj. jako vyjádření absence smyslu: výrok, zdá se, nemůže být smysluplný, nejsou-li smysluplné všechny jeho části.) Tak například tabulka pro konjunkci by v tomto případě vypadala takto:

A	B	$A \wedge B$
P	P	P
P	N	N
P	X	X
N	P	N
N	N	N
N	X	X
X	P	X
X	N	X
X	X	X

Ve zkrácené podobě, ve které píšeme hodnoty prvního konjunktu do řádků a hodnoty druhého do sloupců, to zapíšeme jako

$A \wedge B$		B		
		P	**X**	**N**
	P	P	X	N
A	**X**	X	X	X
	N	N	X	N

Zapsány tímto způsobem vypadají tabulky pro všechny operátory této trojhodnotové logiky následovně:

A	$\neg A$
P	N
X	X
N	P

$A \wedge B$		B		
		P	**X**	**N**
A	**P**	P	X	N
	X	X	X	X
	N	N	X	N

$A \vee B$		B		
		P	**X**	**N**
A	**P**	P	X	P
	X	X	X	X
	N	P	X	N

$A \rightarrow B$		B		
		P	**X**	**N**
A	**P**	P	X	N
	X	X	X	X
	N	P	X	P

Výsledný logický počet navrhl jako první Bočvar (1939/40) a my ho budeme označovat 3VP-B. Snadno ovšem nahlédneme, že v jazyce s takovouto sémantikou nemohou existovat žádné tautologie, to jest žádné výroky, jejichž hodnota by byla P nezávisle na interpretaci. Každý výrok totiž jistě může nabýt hodnotu X: je-li atomický, pak mu ji lze prostě přiřadit, a je-li složený, pak tuto hodnotu nabude, přiřadí-li se hodnota X kterémukoli jeho atomickému podvýroku. Tato sémantika tedy rozhodně nevede k množině tautologií, která by splývala s množinou teorémů IVP.

Můžeme mít ovšem pocit, že toto je způsobeno faktem, že pro jazyk s takovouto sémantikou přestává být rozumná naše původní definice tautologie. Neměli bychom nyní tautologii chápat jako výrok, který má hodnotu P tehdy, *když má vůbec nějakou ze ‚skutečných' hodnot P a N* (to jest pokud nemá X)? Snadno se ovšem přesvědčíme, že kdybychom definici pojmu tautologie změnili v tomto smyslu, dostali bychom množinu tautologií totožnou s množinou tautologií KVP a zavedení třetí hodnoty by tak z tohoto hlediska ztratilo jakýkoli účinek. (Plyne to z faktu, že když z tabulek vyškrtáme řádky i sloupce pro hodnotu X, zbydou nám prostě tabulky klasické.)

3.3.2 Kleeneho trojhodnotová logika

Mohli bychom trojhodnotovou sémantiku definovat jinak? Uvažme například disjunkci. Její klasickou definici můžeme číst také tak, že disjunkce je pravdivá právě tehdy, když je pravdivý alespoň jeden z jejích disjunktů, *bez ohledu na to, jakou hodnotu má druhý disjunkt*. To nás může vést k tomu, abychom za hodnotu výroku $A \vee B$ například v případě, že A má hodnotu P a B má hodnotu X, prohlásili nikoli X, ale P. Obecněji můžeme stanovit, že

$A \wedge B$ má hodnotu P právě tehdy, když má A i B hodnotu P,
$A \wedge B$ má hodnotu N právě tehdy, když má A nebo B hodnotu N,
$A \vee B$ má hodnotu P právě tehdy, když má A nebo B hodnotu P,
$A \vee B$ má hodnotu N právě tehdy, když má A i B hodnotu N.

Trojhodnotová sémantika, kterou tímto způsobem dostaneme, vypadá následovně:

A	$\neg A$
P	N
X	X
N	P

$A \wedge B$		B		
		P	**X**	**N**
A	**P**	P	X	N
	X	X	X	N
	N	N	N	N

$A \vee B$		B		
		P	**X**	**N**
A	**P**	P	P	P
	X	P	X	X
	N	P	X	N

$A \to B$		B		
		P	**X**	**N**
A	**P**	P	X	N
	X	P	X	X
	N	P	P	P

Logiku s takto definovanou sémantikou navrhl Kleene (1952) a my ji budeme označovat jako 3VP-K. (Kleene sám ovšem svou logiku považoval spíše za *parciální* než za explicitně trojhodnotovou – onu třetí možnost vedle P a N považoval spíše za *absenci hodnoty* než za další hodnotu. Šlo mu totiž zejména o to, aby udělil specifický status těm aritmetickým výrokům, jejichž pravdivostní hodnoty neznáme nebo znát nemůžeme.) Jak lze však ukázat, neexistují ani při této sémantice stále ještě žádné tautologie.

Všimněme si, že ztotožníme-li pravdivostní hodnoty P, X a N s čísly 1, ½ a 0 (což dává intuitivně správné uspořádání podle ‚míry pravdivosti‘: *pravda* je ‚pravdivější‘ než *ani pravda, ani nepravda*; a ta je ‚pravdivější‘ než *nepravda*), budou pro operátory platit ony numerické charakteristiky, které jsme zaznamenali u operátorů KVP. Operátory Kleenovy trojhodnotové logiky jsou tedy v tomto smyslu přímočarým zobecněním operátorů KVP.

Všimněme si ovšem, že v rámci trojhodnotové logiky již nesplývají ony dvě varianty numerické charakterizace implikace, které splývaly pro KVP. Ta druhá,

$$
\begin{aligned}
|A \to B| &= 1, \text{ jestliže } |A| \leq |B| \\
&= 0, \text{ jinak,}
\end{aligned}
$$

by totiž zřejmě vedla k tabulce

$A \to B$		B		
		P	**X**	**N**
	P	P	N	N
A	**X**	P	P	N
	N	P	P	P

Navíc můžeme uvažovat i o tom, že není-li $|A| \leq |B|$, to jest je-li antecedent pravdivější než konsekvent, nemuseli bychom celou implikaci prohlašovat za totálně nepravdivou, mohli bychom její pravdivost zmenšit jenom o tolik, o kolik pravdivost antecedentu převyšuje pravdivost konsekventu. To by dalo vzorec

$$\begin{aligned} |A \rightarrow B| &= 1, \text{ jestliže } |A| \leq |B| \\ &= 1 - (|A| - |B|), \text{ jinak.} \end{aligned}$$

(Všimněme si, že v rámci KVP je i toto platnou numerickou charakteristikou implikace.) Z toho by pak vyšla tabulka

$A \rightarrow B$		*B*		
		P	**X**	**N**
	P	P	X	N
A	**X**	P	P	X
	N	P	P	P

která se od tabulky Kleenovy logiky liší jenom v jediném poli, totiž v prostředním, ve kterém má P namísto X. Nahradíme-li Kleenovu implikaci touto, dostaneme trojhodnotovou sémantiku navrženou Łukasiewiczem (1930). Výsledný trojhodnotový výrokový počet budeme označovat jako 3VP-Ł. A v této logice, přestože se od té Kleenovy liší na první pohled jenom kosmetickým způsobem, už existují tautologie. My se jí budeme podrobně zabývat v oddíle 3.4.

Mírně odlišnou variantu trojhodnotové logiky dostaneme, když dále změníme hodnotu $A \rightarrow B$ pro případ, kdy má A hodnotu X a B má hodnotu N, z X na N. Tak vznikne počet, který byl navržen Heytingem (1930) přímo pro účely interpretace IVP; ani ten však, jak se ukázalo, nejde s axiomatikou IVP dokonale dohromady. Axiomatika IVP je vzhledem k této sémantice sice korektní, nikoli však úplná. Gödel (1932) pak ukázal, že axiomatika IVP nemůže být úplná vzhledem k žádné sémantice, která má konečný počet hodnot – tedy tím spíše k žádné trojhodnotové.

3.3.3 Parakonzistentní čtyřhodnotová logika

Mohli bychom uvažovat o sémantice s více než třemi hodnotami? Z formálního hlediska nepochybně ano; avšak dávalo by to nějaký rozumný smysl? Jednou možností by bylo rozdělit hodnotu X (*ani pravda, ani nepravda*) na dvě hodnoty:

ani pravda, ani nepravda, ale spíše pravda

a

ani pravda, ani nepravda, ale spíše nepravda.

To by nás ale asi dále vedlo k logice *pětihodnotové*, která by vedle těchto dvou hodnot měla i původní hodnotu X (neboť proč by měl být každý výrok, který není ani úplně pravdivý, ani úplně nepravdivý, spíše pravdivý nebo spíše nepravdivý?), a analogicky k dalšímu ‚rozmělňování' hodnot mezi P a N. Tím se již dostáváme na půdu ‚stupňované pravdivosti', ke které se vrátíme na konci oddílu 3.4.

K jedné variantě čtyřhodnotové logiky nás ovšem může vést i zcela jiný motiv. Můžeme usoudit, že kromě výroků, které nejsou ani pravdivé, ani nepravdivé, mohou existovat i výroky, které jsou současně pravdivé i nepravdivé[25]. V anglicky psané literatuře se v souvislosti s existencí výroků bez

[25] Lze ovšem takový počet ještě vůbec smysluplně považovat za *logiku*? Dává nějaký smysl představa, že výrok může být současně pravdivý i nepravdivý? Chápeme-li logiku tak, jak jsme ji vymezili na začátku této knihy, pak spíše nikoli. Systémy tohoto druhu se však mohou hodit k něčemu, co s předmětem logiky v našem slova smyslu (to jest s vyplýváním a jeho demonstrováním) souvisí – například k modelování soustav přesvědčení, které lidé fakticky zastávají. Soubor přesvědčení nějakého člověka (či třeba celé komunity) totiž jistě může být, v důsledku lidské nedokonalosti, rozporný, to jest může z něj vyplývat nějaký výrok a současně jeho negace. Takový soubor tedy může vykazovat překrytí pravdivostních hodnot v právě uvedeném smyslu – a k jeho modelování se tudíž může hodit čtyřhodnotový systém právě uvedeného typu. Otázka, zda je zde ještě stále opodstatněné hovořit o *logice*, ovšem přetrvává. Z našeho hlediska by bylo asi lepší tak nečinit, protože uvedený systém již stěží může být považován za

prostředek přímého zachycení toho, oč logice jde. Přidržíme se ale úzu, v jehož rámci se v současné době termín „logika“ obvykle vztahuje i na systémy takovéhoto druhu.

(‚skutečné‘) pravdivostní hodnoty hovoří o *mezerách v pravdivostních hodnotách* (*truth-value gaps*), zatímco v souvislosti s existencí výroků s oběma hodnotami o *překrytí pravdivostních hodnot* (*truth-value gluts*)[26]. Logiky, ve kterých je takové překrytí povoleno, se pak obvykle nazývají *parakonzistentní*.

Máme tedy výrokový počet, ve kterém máme kromě dvou standardních pravdivostních hodnot P a N navíc dvě další hodnoty: *pravda i nepravda* a *ani pravda, ani nepravda*. Tu první označme znakem O, pro tu druhou ponechme již zavedený znak X. Jeden ze způsobů, jak se na takovouto sémantiku dívat, je vidět ji jako výsledek kombinace *dvou* nezávislých přiřazení pravdivostních hodnot výrokům. Představme si, že máme nikoli jednu, ale dvě trojhodnotové interpretace I_1 a I_2 (řídící se tabulkami 3VP-K), že je tedy každému výroku přiřazena *dvojice* pravdivostních hodnot, a že hovoříme-li o čtyřhodnotové interpretaci I, hovoříme o této dvojici: říkáme, že výrok má

(i) hodnotu P, je-li alespoň jedna ze dvou mu přiřazených hodnot P a žádná není N (tj. ‚je pravdivý a nikoli současně nepravdivý‘);

(ii) hodnotu O, jsou-li mu přiřazeny P i N (‚je pravdivý a současně nepravdivý‘);

(iii) hodnotu N, je-li mu přiřazena N a nikoli P (‚je nepravdivý a nikoli současně pravdivý‘); a

(iv) hodnotu X, není-li mu přiřazena ani P, ani N (‚není ani pravdivý ani nepravdivý‘).

Vztah mezi I_1, I_2 a I je tedy zachycen v následující tabulce.

<table>
<tr><th>I_1</th><th>I_2</th><th>I</th></tr>
<tr><td>P</td><td>P</td><td rowspan="3">P</td></tr>
<tr><td>P</td><td>X</td></tr>
<tr><td>X</td><td>P</td></tr>
<tr><td>P</td><td>N</td><td rowspan="2">O</td></tr>
<tr><td>N</td><td>P</td></tr>
<tr><td>N</td><td>N</td><td rowspan="3">N</td></tr>
<tr><td>N</td><td>X</td></tr>
<tr><td>X</td><td>N</td></tr>
<tr><td>X</td><td>X</td><td>X</td></tr>
</table>

[26] *Viz* např. Priest (2001).

Vezměme nyní například disjunkci $A \vee B$. Jakou hodnotu bude mít, bude-li mít A hodnotu O a B hodnotu X? Z hlediska pomyslných dvojic přiřazených hodnot jde o dva případy: výroku A může být přiřazena dvojice <P,N> či <N,P> a výroku B dvojice <X,X>. Protože, jak zjistíme pomocí tabulky pro disjunkci ve 3VP-K, má disjunkce výroků s hodnotami P a X hodnotu P, zatímco disjunkce výroků s hodnotami N a X hodnotu X, bude mít naše disjunkce v prvním případě hodnoty <P,X>, zatímco v tom druhém <X,P>. Disjunkce výroků s hodnotami O a X tedy bude mít hodnotu P. Analogicky spočítáme i hodnoty pro všechna ostatní pole tabulky disjunkce i všech ostatních operátorů:

A	$\neg A$
P	N
O	O
X	X
N	P

$A \wedge B$		B			
		P	**O**	**X**	**N**
A	**P**	P	O	X	N
	O	O	O	N	N
	X	X	N	X	N
	N	N	N	N	N

$A \vee B$		B			
		P	**O**	**X**	**N**
A	**P**	P	P	P	P
	O	P	O	P	O
	X	P	P	X	X
	N	P	O	X	N

$A \rightarrow B$		B			
		P	**O**	**X**	**N**
A	**P**	P	O	X	N
	O	P	O	P	O
	X	P	P	X	X
	N	P	P	P	P

Čtyřhodnotové logice s touto sémantikou budeme říkat 4VP-P (to poslední „P“ je zkratkou za *parakonzistentní*).

Mohli bychom i pravdivostní hodnoty této logiky nějak uspořádat a tak prozkoumat její numerické charakteristiky? Zdá se zřejmé, že hodnota P by měla být ‚větší‘ (‚pravdivější‘) než kterákoli jiná hodnota, a kterákoli jiná hodnota by naopak měla být větší než N. Jak je to ale s hodnotami O a X – která z nich by měla být ‚větší‘? Zde, jak se zdá, není důvod, abychom jednu z nich nadřazovali té druhé – máme tedy jenom *částečné* uspořádání (šipka vede vždy od menší hodnotě k větší):

$$\begin{tikzcd} & P & \\ O \arrow[ur] & & X \arrow[ul] \\ & N \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

V tomto případě nelze konjunkci a disjunkci charakterizovat jako maximum a minimum: dvojice tvořená O a X prostě žádné maximum ani minimum nemá. Pojmy maxima a minima však můžeme zobecnit tak, že se stanou použitelnými i v tomto případě. Řekneme, že hodnota H je *suprémem* hodnot H_1 a H_2, jestliže

(i) je větší nebo rovna než H_1 i než H_2, a (ii) je menší než každá jiná hodnota, která je větší nebo rovna než H_1 i než H_2. Suprémum H_1 a H_2 je tedy nejmenší z těch hodnot, které jsou větší nebo rovny než obě tyto hodnoty. Pokud existuje maximum H_1 a H_2, pak je jejich suprémem zřejmě toto maximum, suprémum však může existovat, i pokud neexistuje maximum: tak například suprémem O a X v našem diagramu je zřejmě P.

Analogicky řekneme, že hodnota H je *infimem* hodnot H_1 a H_2, jestliže (i) je menší nebo rovna než H_1 i než H_2, a (ii) je větší než každá jiná hodnota, která je menší nebo rovna než H_1 i než H_2. Opět platí, že existuje-li minimum, pak je infimem toto minimum, že však infimum mohou mít i hodnoty, které nemají minimum: infimem O a X je zřejmě N.

Nyní si můžeme všimnout, že pravdivostní hodnota konjunkce je v naší čtyřhodnotové logice infimem pravdivostních hodnot konjunktů, zatímco pravdivostní hodnota disjunkce je suprémem hodnot disjunktů. Konjunkci a disjunkci v této logice je tedy stále možné v tomto smyslu považovat za zobecnění konjunkce a disjunkce KVP.

Přirozený způsob, jak v rámci této sémantiky definovat pojmy tautologie a vyplývání, spočívá v tom, že výrok prohlásíme za pravdivý, kdykoli má buď hodnotu P, nebo hodnotu O. Výrok je tedy tautologií, nepřiřazuje-li mu žádná interpretace jinou hodnotu než P nebo O; a výrok vyplývá z množiny výroků tehdy, když mu každá interpretace, která žádnému z prvků této množiny nepřiřazuje hodnotu jinou než P nebo O, přiřazuje také P nebo O. (4VP-P byl ovšem vytvořen na bázi 3VP-K a podobně jako on nemá tautologie žádné. Všimněme si však, že kdybychom tautologie měli a kdybychom kontradikci analogicky definovali jako výrok, kterému žádná interpretace nepřiřazuje jinou hodnotu než N nebo O, nebyla by vyloučena existence výroku, který by byl současně tautologií i kontradikcí – to by byl totiž každý výrok, kterému by každá interpretace přiřazovala hodnotu O.) Bylo by ovšem možné uvažovat i o ztotožnění pravdivosti pouze s hodnotou P; to by pak ale vedlo k obecně jiné relaci vyplývání.

Parakonzistence 4VP-P má i další neobvyklé důsledky. Například v každé z logik, kterou jsme se zabývali dosud, vyplýval z *A* a $\neg A$ jakýkoli výrok (je-li totiž *A* pravdivý, nemůže být pravdivý $\neg A$, a tudíž neexistuje interpretace, která by přiřazovala hodnotu P jak výroku *A*, tak výroku $\neg A$; takže pro každý výrok *B* je triviálně splněna podmínka, že každá interpretace, která přiřazuje hodnotu P oběma těmto výrokům, přiřazuje hodnotu P i výroku *B*). Pro právě probíranou logiku to ovšem *neplatí*. Interpretace činící pravdivým (tj. přiřazující P nebo O) jak výrok A, tak výrok $\neg A$, zde existují – taková je totiž každá interpretace, která přiřazuje výroku A hodnotu O. A taková interpretace může jistě spoustě jiných výroků přiřazovat hodnotu X nebo N; a tyto výroky pak tedy z A a $\neg A$ *ne*vyplývají.

V parakonzistentní logice je takto od sebe oddělen ‚lokální spor' (tj. případ, kdy z nějaké množiny vyplývá nějaký výrok spolu se svou negací) a ‚globální spor' (případ, kdy z množiny vyplývá každý výrok) – její proponenti se totiž domnívají, že počty s ‚lokálními spory' (na rozdíl od ‚globálních') mohou být z hlediska logiky stále ještě zajímavé, protože lidé fakticky někdy zastávají přesvědčení, která jsou ve skutečnosti sporná, a přesto s nimi relativně úspěšně pracují.

3.4 Łukasiewiczovy troj- a vícehodnotové logiky

Vraťme se nyní k trojhodnotovému výrokovému počtu 3VP-Ł. Konstatovali jsme, že v této logice existují tautologie – nejsou jimi ovšem všechny tautologie KVP (jakkoli každá tautologie této logiky bude tautologií KVP, což vyplývá z toho, že operátory se pro hodnoty P a N chovají stejně jako v rámci KVP). Tautologiemi jsou však překvapivě i některé z výroků, které nejsou dokazatelné v IVP, například, jak se snadno přesvědčíme, $\neg\neg A \rightarrow A$. Ani tato sémantika tedy rozhodně neodpovídá axiomatice IVP.

Axiomatizaci 3VP-Ł můžeme jednoduše získat z Tarského axiomatizace KVP (viz §2.4) změnou jediného axiomu (důkaz úplnosti *viz* Wajsberg, 1931[27]):

(I) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$,
(II) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$,
(III) $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$,
(IV) $((A \rightarrow \neg A) \rightarrow A) \rightarrow A$.

Disjunkce a konjunkce jsou pak definovány předpisem

$A \vee B \equiv_{\text{Def.}} (A \rightarrow B) \rightarrow B$,
$A \wedge B \equiv_{\text{Def.}} \neg(\neg A \vee \neg B)$.

[27] Jinou, poněkud průhlednější axiomatizaci uvádí Epstein (2001, §VIII.C.1.b).

(Všimněme si, že zatímco v rámci KVP je výrok $(A\to B)\to B$ ekvivalentní výroku $\neg A\to B$, v rámci 3VP-Ł tomu tak není, takže kdybychom disjunkci definovali jako zkratku za druhý z těchto výroků, dostali bychom jinou variantu disjunkce, a potažmo pak i konjunkce. Protože Łukasiewicz sám pracoval pouze s negací a implikací, nedá se říci, která z těchto definic by byla ‚ta správná'.)

Je zřejmé, že tato logika (a obecněji každá vícehodnotová logika s konečným počtem hodnot) je rozhodnutelná: rozhodnout o tom, zda je nějaká formule tautologií, je totiž možné pomocí tabulkové metody zcela analogicky jako v případě KVP.

Abychom mohli konstatovat některé vlastnosti tohoto systému, dokažme několik teorémů, které tento výrokový počet sdílí s KVP. (Samozřejmě, že vzhledem k tomu, že axiomatika 3VP-Ł je vzhledem k jeho sémantice úplná, mohli bychom fakt, že jsou tyto výroky teorémy, dokázat i tak, že bychom ukázali, že to jsou tautologie, což je zpravidla jednodušší; my však předvedeme jejich důkazy z axiomů, abychom axiomatiku tohoto počtu trochu osvětlili.)

[I] $A\to A$:

1. $A\to((A\to\neg A)\to A)$	(I)
2. $((A\to\neg A)\to A)\to A$	(IV)
3. $A\to A$	1., 2., (II)

Nyní dokážeme, že výrok $A\to C$ je odvoditelný z výroků $A\to(B\to C)$ a B:

1. B	předpoklad
2. $(C\to\neg C)\to B$	1., (I)
3. $(B\to C)\to((C\to\neg C)\to C)$	2., (II)
4. $(((C\to\neg C)\to C)\to C)\to((B\to C)\to C)$	3., (II)
5. $(((C\to\neg C)\to C)\to C)$	(IV)
6. $(B\to C)\to C$	5., 4.
7. $A\to(B\to C)$	předpoklad
8. $A\to C$	7., 6., (II)

To znamená, že jsou-li $A\to(B\to C)$ a B teorémy, je teorémem i $A\to C$. Pomocí tohoto výsledku nyní k důkazu výroku

[II] $B\to((B\to C)\to C)$

stačí – vzhledem k tomu, že $((C\rightarrow\neg C)\rightarrow C)\rightarrow C$ je axiomem – dokázat, že teorémem je $B\rightarrow((((C\rightarrow\neg C)\rightarrow C)\rightarrow C)\rightarrow((B\rightarrow C)\rightarrow C))$:

1. $((C\rightarrow\neg C)\rightarrow B)\rightarrow((B\rightarrow C)\rightarrow((C\rightarrow\neg C)\rightarrow C))$ (II)
2. $(((C\rightarrow\neg C)\rightarrow C)\rightarrow C)$ (IV)
3. $((B\rightarrow C)\rightarrow((C\rightarrow\neg C)\rightarrow C))\rightarrow((((C\rightarrow\neg C)\rightarrow C)\rightarrow C)\rightarrow((B\rightarrow C)\rightarrow C))$ (II)
4. $((C\rightarrow\neg C)\rightarrow B)\rightarrow((((C\rightarrow\neg C)\rightarrow C)\rightarrow C)\rightarrow((B\rightarrow C)\rightarrow C))$ 1., 3., (II)
5. $B\rightarrow((C\rightarrow\neg C)\rightarrow B)$ (I)
6. $B\rightarrow((((C\rightarrow\neg C)\rightarrow C)\rightarrow C)\rightarrow((B\rightarrow C)\rightarrow C))$ 5., 4., (II)

Dále dokažme

[III] $(A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow(B\rightarrow(A\rightarrow C))$:

1. $(A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow(((B\rightarrow C)\rightarrow C)\rightarrow(A\rightarrow C))$ (II)
2. $(B\rightarrow((B\rightarrow C)\rightarrow C))\rightarrow((((B\rightarrow C)\rightarrow C)\rightarrow(A\rightarrow C))\rightarrow(B\rightarrow(A\rightarrow C)))$ (II)
3. $B\rightarrow((B\rightarrow C)\rightarrow C)$ [II]
4. $(((B\rightarrow C)\rightarrow C)\rightarrow(A\rightarrow C))\rightarrow(B\rightarrow(A\rightarrow C))$ 3., 2.
5. $(A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow(B\rightarrow(A\rightarrow C))$ 1., 4., (II)

Mezi další teorémy 3VP-Ł patří:

$(\neg B\rightarrow\neg A)\rightarrow(A\rightarrow B)$,
$A\rightarrow\neg\neg A$,
$\neg\neg A\rightarrow A$,
$\neg A\rightarrow(A\rightarrow B)$.

Jak se však snadno ověří tabulkovou metodou, tautologií, a tudíž ani teorémem 3VP-Ł není axiom KVP

$(A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C))$.

(Nabývají-li totiž výroky A a B hodnotu X a výrok C hodnotu N, nabývá výrok $A\rightarrow B$ hodnotu P, výroky $A\rightarrow C$ a $B\rightarrow C$ hodnotu X, výrok $A\rightarrow(B\rightarrow C)$ tudíž hodnotu P a výrok $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$ hodnotu X, a celý výrok má tedy hodnotu X.) Nemůžeme proto použít výsledek z oddílu 2.2, který říká, že jsou-li tento výrok plus výrok $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ teorémy a je-li jediným odvozovacím pravidlem (*mp*), platí věta o dedukci.

A věta o dedukci v 3VP-Ł skutečně neplatí. To plyne například z faktu, že zatímco z výroků $A \rightarrow (A \rightarrow B)$ a A je odvoditelný výrok B (prostě dvojím použitím (*mp*)), výrok

$$(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

teorémem 3VP-Ł není (to se ověří opět tak, že se ukáže, že tato formule není tautologií).

Věta o dedukci se však pro 3VP-Ł stane platnou, začneme-li za ‚skutečnou' implikaci považovat nikoli operátor $\rightarrow$, ale operátor $\mapsto$ definovaný předpisem

$$A \mapsto B \equiv_{\text{Def.}} A \rightarrow (A \rightarrow B).$$

Jak se dá totiž ukázat (*viz* Epstein, §VIII.C.a), je A odvoditelný z $A_1, ..., A_n$ právě tehdy, když je výrok $A_1 \mapsto (...(A_{n-1} \mapsto A_n)...)$ teorémem. Z toho také vyplývá, že A je odvoditelný z $A_1, ..., A_n$ právě tehdy, když z nich vyplývá. Výrok $A_1 \mapsto (...(A_{n-1} \mapsto A_n)...)$ je totiž v důsledku korektnosti a úplnosti teorémem právě tehdy, když je tautologií, a jak lze dále ukázat, je $A_1 \mapsto (...(A_{n-1} \mapsto A_n)...)$ tautologií právě tehdy, když A vyplývá z $A_1, ..., A_n$. Tento poslední fakt vychází na světlo, když pro $\mapsto$ zkonstruujeme pravdivostní tabulku:

$A \mapsto B$		*B*		
		P	**X**	**N**
	P	P	X	N
A	**X**	P	P	P
	N	P	P	P

Z ní je patrné, že $A \mapsto B$ nemá při dané interpretaci hodnotu P právě tehdy, když má A hodnotu P a B ji nemá. A protože B vyplývá z A právě tehdy, když každá interpretace přiřazuje B hodnotu P nebo A hodnotu jinou než P, je $A \mapsto B$ je tautologií právě tehdy, když z A vyplývá B. Zobecnění na $A_1 \mapsto (... (A_{n-1} \mapsto A_n) ...)$ je pak nasnadě.

Vraťme se ještě ke vztahu mezi množinami teorémů KVP a 3VP-Ł (už jsme viděli, že teorémem 3VP-Ł není axiom (2) KVP). Mezi další teorémy KVP, které nejsou teorémy 3VP-Ł, patří

$(A\rightarrow B)\rightarrow((A\rightarrow\neg B)\rightarrow\neg A)$,
$(\neg A\rightarrow\neg B)\rightarrow((\neg A\rightarrow B)\rightarrow A)$,
$(A\rightarrow B)\rightarrow((\neg A\rightarrow B)\rightarrow B)$,
$A\vee\neg A$.

Pokud jde o obecný vztah mezi 3VP-Ł a KVP, snadno dokážeme, že axiom (IV) 3VP-Ł je teorémem KVP:

1. $(A\rightarrow A)\rightarrow((\neg A\rightarrow A)\rightarrow A))$	[11]
2. $A\rightarrow A$	[1]
3. $(\neg A\rightarrow A)\rightarrow A$	2., 1.
4. $\neg A\rightarrow(A\rightarrow\neg A)$	(1)
5. $(\neg A\rightarrow(A\rightarrow\neg A))\rightarrow(((A\rightarrow\neg A)\rightarrow A)\rightarrow(\neg A\rightarrow A))$	[2]
6. $((A\rightarrow\neg A)\rightarrow A)\rightarrow(\neg A\rightarrow A)$	4., 5.
7. $((A\rightarrow\neg A)\rightarrow A)\rightarrow A$	6., 3., [2]

To znamená, že podobně jako v případě IVP je každý teorém 3VP-Ł i teorémem KVP, avšak nikoli naopak; 3VP-Ł je tedy v tomto smyslu obsažen v KVP. Avšak i v tomto případě je možné také naopak interpretovat KVP v 3VP-Ł. Rozlišme pro tento účel opět symboly používané oběma počty – nahraďme v jazyce 3VP-Ł dosavadní $\neg$ a $\rightarrow$ symboly $\sim$ a $\supset$; a interpretujme $A\rightarrow B$ ve 3VP-Ł jako $A\supset(A\supset B)$ a $\neg A$ jako $A\supset\sim A$. Definujme tedy překlad KVP do 3VP-Ł předpisem (A^* značí překlad výroku A do 3VP-Ł):

$A^* = A$, je-li A atomický,
$(A\rightarrow B)^* = A^*\supset(A^*\supset B^*)$,
$(\neg A)^* = A^*\supset\sim A^*$.

Tabulkovou metodou se snadno přesvědčíme, že překlady všech axiomů KVP budou tautologiemi 3VP-Ł a překlad pravidla (*mp*) bude zachovávat tautologičnost – z toho plyne že tautologií, a tedy teorémem 3VP-Ł bude překlad každého teorému KVP. Tímto způsobem lze tedy KVP ‚vnořit' do 3VP-Ł a vztah mezi těmito dvěma kalkuly je tedy podobně nejednoznačný jako vztah mezi KVP a IVP.

Jak se dá také ukázat, není 3VP-Ł denotačně nasycený – ne každý operátor, který je sémanticky definovatelný pomocí trojhodnotové tabulky, je ‚vyrobitelný' z operátorů 3VP-Ł. Například operátor s následující tabulkou prostřednictvím těch, které už máme (to jest konjunkce, disjunkce, implikace a negace), definovatelný není[28]:

A	$\times A$
P	X
X	X
N	X

Slupecki (1939) ovšem ukázal, že rozšíříme-li 3VP-Ł právě o tento operátor a přidáme-li k Wajsbergově axiomatizaci axiomy

$\times A \to \neg \times A$,
$\neg \times A \to \times A$,

dostaneme trojhodnotový výrokový počet, který bude nejenom korektní a úplný, ale i denotačně nasycený.

S využitím numerických charakteristik, které stojí v základě 3VP-Ł (viz §3.3.2), ovšem můžeme definovat i logiku s více než třemi hodnotami. Takovými logikami se zabývali Łukasiewicz a Tarski (1930). Můžeme tak definovat čtyř-, pěti- i vícehodnotové logiky, nebo dokonce logiku, která bude mít nekonečně pravdivostních hodnot. Ta může být zvláště zajímavá z hlediska myšlenky ‚stupňované pravdivosti', na kterou jsme již narazili výše.

Řeknu-li *New York je velkoměsto*, je to jistě pravda. Řeknu-li *Praha je velkoměsto*, je to také pravda – jsme však v pokušení říci, že je to pravda ‚o něco méně'. Z tohoto hlediska se může zdát být rozumné uvažovat o nějakém spektru ‚přechodových' hodnot mezi P a N. Nejběžnější je angažovat nekonečnou množinu pravdivostních hodnot odpovídající reálným číslům mezi 0 a 1, s tím, že 0 odpovídá N a 1 odpovídá P.

Na takovémto systému pravdivostních hodnot jsou založeny výrokové počty, kterým se říká *fuzzy*, tedy něco jako *mlhavé*. Nekonečněhodnotová varianta Łukasiewiczovy logiky je tedy druhem fuzzy logiky; a my ji budeme označovat

---

[28] *Viz* Mleziva (1970, §5.3).

FVP-Ł[29]. Bude mít tento výrokový počet stejné axiomy jako 3VP-Ł? Lze ukázat, že zatímco axiomy (I), (II) a (III) zůstávají v platnosti pro variantu 3VP-Ł s jakýmkoli počtem hodnot, u (IV) tomu tak není. Předpokládejme například, že výroky mohou nabývat hodnoty ¾. Má -li A tuto hodnotu, pak má $\neg A$ hodnotu ¼, takže $A\rightarrow\neg A$ má hodnotu 1 – (¾ – ¼) = ½. $(A\rightarrow\neg A)\rightarrow A$ má tedy hodnotu 1, a $((A\rightarrow\neg A)\rightarrow A)\rightarrow A$ má tudíž hodnotu 1 – (1 – ¾) = ¾. Axiom (IV) tedy rozhodně není tautologií FVP-Ł.

Axiomatizaci FVP-Ł ovšem můžeme dostat z axiomatizace 3VP-Ł změnou právě tohoto axiomu (*viz* Rose and Rosser, 1958):

(I) $A\rightarrow(B\rightarrow A)$,
(II) $(A\rightarrow B)\rightarrow((B\rightarrow C)\rightarrow(A\rightarrow C))$,
(III) $(\neg A\rightarrow\neg B)\rightarrow(B\rightarrow A)$,
(IV′) $((A\rightarrow B)\rightarrow B)\rightarrow((B\rightarrow A)\rightarrow A)$.

(Konjunkce a disjunkce jsou pak definovány analogicky jako ve 3VP-Ł; a tak jako v případě 3VP-Ł existují nejméně dvě plausibilní možnosti, jak je definovat.)

To, že pro FVP-Ł neplatí věta o dedukci, lze ukázat stejným způsobem, jako jsme to ukázali pro 3VP-Ł – jeho teorémem totiž opět není

$$(A\rightarrow(A\rightarrow B))\rightarrow(A\rightarrow B),$$

ačkoli z $A\rightarrow(A\rightarrow B)$ a A lze s použitím (*mp*) odvodit B. (Platí ovšem jistá obdoba výsledku uvedeného pro 3VP-Ł a $\rightarrowtail$ – B je totiž ve FVP-Ł odvoditelný z A právě tehdy, když je teorémem alespoň jedna formule tvaru $(A\rightarrow \ldots (A\rightarrow B)\ldots)$.)

Vzhledem k tomu, že FVP-Ł má nekonečný počet hodnot, není pro něj použitelná rozhodovací procedura, kterou používáme pro vícehodnotové výrokové počty s konečným počtem hodnot: rozhodnout o tom, zda je daný výrok tautologií, a tedy teorémem, nelze tak, že bychom prostě spočítali jeho hodnoty pro všechna možná ohodnocení jeho atomických podvýroků. Přesto však lze ukázat, že FVP-Ł rozhodnutelný je (Hájek, 1998, Kapitola 6).

Ani takováto nekonečněhodnotová sémantika tedy není příhodná pro intuicionistickou axiomatiku – její tautologie se nekryjí s teorémy IVP. Ukazuje

[29] Existují ovšem i jiné verze FVP – *viz* Hájek (1998).

se tedy, že k axiomatizaci IVP by ‚nepasovala' žádná z vícehodnotových sémantik, které jsme probrali. To ovšem neznamená, že pro tuto axiomatiku neexistuje *vůbec žádná* sémantika – k takové sémantice se však propracujeme až později (v oddíle 6.1).

3.5 Souvislostní a relevanční výrokové počty

Jak intuicionistický výrokový počet, tak výrokové počty vícehodnotové odmítají zákon vyloučení třetího a dvojhodnotovost sémantiky. Současně je ale možné se na ně dívat i jako na cesty ‚vylepšování' klasických operátorů, především implikace. Jak v rámci IVP, tak v rámci oněch vícehodnotových výrokových počtů, kterými jsme se zabývali, skutečně dostáváme nové verze implikace, které jsou ‚striktnější' než ta klasická (v tom smyslu, že při ‚standardním' překladu není každý teorém KVP obsahující pouze implikaci i jejich teorémem).

I v rámci těchto počtů ovšem stále platí paradoxy implikace, tj. výrok $A \rightarrow B$ je stále implikován jak výrokem *B*, tak i výrokem $\neg A$. Ovšem má-li být implikace zachycením „jestliže ... pak ..." přirozeného jazyka, pak se může zdát, že její ‚rozumnost'– a tím spíše její pravdivost – předpokládá, že její antecedent a konsekvent spolu nějak *souvisejí*, že je antecedent pro konsekvent nějak *relevantní*. (Tak například již probíraná věta „Je-li v Číně sucho, vaří se v Česku pivo" se nezdá být ‚rozumná' právě proto, že její dvě části spolu nijak nesouvisejí.) Zdá se tedy, že k tomu, abychom definovali takovou variantu implikace, jaká by byla více v duchu běžného „jestliže ... pak ...", bychom potřebovali nějak formalizovat vztah ‚souvisení' mezi výroky. Jedním z nejfrekventovanějších návrhů je považovat dva výroky za související právě tehdy, když se v obou z nich vyskytuje alespoň jeden společný atomický podvýrok.

Vystihovalo by toto omezení intuitivní pojem souvisení? Možná stejně ne zcela. Všimněme si, že podle něj spolu souvisejí například výroky tvarů $A \wedge (B \vee \neg B)$ a *B*, tedy například „V Číně je sucho a v Česku se vaří pivo nebo se v Česku nevaří pivo" a „V Česku se vaří pivo". Přesto však tato cesta stojí za prozkoumání. Zapisujme

A souvisí s *B*

jako

$A \approx B$.

Přidáme-li $\approx$ k jazyku výro kového počtu jako nový binární operátor, budeme moci definovat relevantní implikaci $\rightarrowtail$ jako zesílení implikace KVP předpisem

$$(A \rightarrowtail B) \equiv_{\text{Def.}} (A \rightarrow B) \wedge (A \approx B).$$

Jakými axiomy či jakou sémantikou by se měl operátor $\approx$ řídit? Epstein (2001, §III) udává následující axiomy:

(A) $A \approx A$,
(B) $(A \approx B) \rightarrow (B \approx A)$,
(C) $(A \approx B) \leftrightarrow (\neg A \approx B)$,
(D) $(A \approx (B \rightarrow C)) \leftrightarrow ((A \approx B) \vee (A \approx C))$,
(E) $(A \approx (B \wedge C)) \leftrightarrow (A \approx (B \rightarrow C))$.

Dá se ukázat, že pro libovolné dva výroky A a B platí $A \approx B$ právě tehdy, když A obsahuje nějaký atomický podvýrok A' a B atomický podvýrok B' tak, že $A' \approx B'$.

Přidáme-li tedy tyto axiomy ke KVP, můžeme zavést $\rightarrowtail$ prostřednictvím výše uvedené definice. Výsledný jazyk ovšem můžeme modifikovat tak, že vezmeme $\rightarrowtail$ za primitivní operátor a $\approx$ za notační zkratku. To nám umožňuje fakt, že výrok $(A \approx B)$ je, jak se snadno přesvědčíme, ekvivalentní výroku $A \rightarrowtail (B \rightarrowtail B)$. Dosadíme-li totiž v tomto posledním výroku za $(B \rightarrowtail B)$ z definice $\rightarrowtail$, dostáváme výrok

$$A \rightarrowtail ((B \rightarrow B) \wedge (B \approx B)),$$

který je – v důsledku toho, že $(B \approx B)$ je axiomem (a že výrok $(B \rightarrow B) \wedge (B \approx B)$ obsahuje tytéž atomické podvýroky jako $(B \rightarrow B)$) – ekvivalentní výroku

$$A \rightarrowtail (B \rightarrow B).$$

Dosadíme-li nyní do něj z definice $\rightarrowtail$, dostáváme

$$(A \rightarrow (B \rightarrow B)) \wedge (A \approx (B \rightarrow B)),$$

což můžeme s použitím axiomu (D) dále upravit na

$$(A \rightarrow (B \rightarrow B)) \wedge ((A \approx B) \vee (A \approx B))$$

a posléze na

$$(A\rightarrow(B\rightarrow B))\wedge(A\approx B).$$

Avšak protože $A\rightarrow(B\rightarrow B)$ je teorémem KVP, redukuje se toto na

$$A\approx B.$$

Kompletní axiomatický systém *souvislostní logiky* [*relatedness logic*], který Epstein založil na těchto úvahách, ovšem není příliš průhledný. Definujeme-li

$$A\approx B \equiv_{\text{Def.}} A\rightarrowtail(B\rightarrowtail B),$$
$$A\wedge B \equiv_{\text{Def.}} \neg(A\rightarrowtail(B\rightarrowtail\neg((A\rightarrowtail B)\rightarrowtail(A\rightarrowtail B)))),$$
$$A\rightarrow B \equiv_{\text{Def.}} \neg(A\wedge\neg B),$$

mohou axiomy vypadat následovně:

$$(A\approx B)\rightarrowtail(\neg A\approx B),$$
$$(\neg A\approx B)\approx(A\approx B),$$
$$(A\approx B)\approx(B\approx A),$$
$$(A\approx B)\approx(A\approx(B\rightarrowtail C)),$$
$$(A\approx C)\approx(A\approx(B\rightarrowtail C)),$$
$$(A\approx(B\approx C))\approx(\neg(A\approx B)\rightarrowtail(A\approx C)),$$
$$(A\rightarrowtail B)\rightarrowtail(A\approx B),$$
$$(A\rightarrowtail B)\rightarrowtail(A\rightarrow B),$$
$$A\rightarrowtail A,$$
$$(A\rightarrow B)\rightarrowtail((A\approx B)\rightarrowtail(A\rightarrowtail B)),$$
$$\neg A\rightarrowtail(A\rightarrow B),$$
$$B\rightarrowtail(A\rightarrow B),$$
$$(A\rightarrow(C\rightarrowtail D))\rightarrowtail((A\rightarrow C)\rightarrowtail(A\rightarrow D)),$$
$$(\neg A\rightarrow\neg B)\rightarrowtail((\neg A\rightarrow B)\rightarrowtail A).$$

Lze ukázat, že tento systém, kterému můžeme říkat SVP, je rozhodnutelný; věta o dedukci neplatí pro $\rightarrowtail$, ale platí pro ‚nadstavbový' operátor $\rightarrow$. Pro tento systém lze definovat i jistou sémantiku, kterou se my zde ovšem nebudeme zabývat.

Větší pozornost než počtům tohoto druhu je ovšem zejména v poslední době věnována tzv. *relevančním logikám* [*relevance logics* nebo *relevant logics*], které k témuž problému přistupují trochu jinak, a to tak, že nestavějí na klasické implikaci, ale jsou založeny přímo na axiomech vymezujících implikaci alternativní. Cílem těchto logik je zredukovat axiomatický systém KVP tak, aby teorémy nebyly některé nebo všechny z následujících výroků:

(a) $A\to(B\to A)$,
(b) $A\to(B\to B)$,
(c) $A\to((A\to B)\to B)$,
(d) $A\to(\neg A\to B)$,
(e) $(A\wedge\neg A)\to B$,
(f) $A\to(B\to(A\wedge B))$.

Jak se takových teorémů zbavíme? Soustřeďme se nejprve pouze na implikaci. Vyjdeme-li z KVP, pak první věcí, kterou vidíme, je to, že musíme odmítnout axiom (1), který je totožný s (a). Tím však přijdeme i o teorémy [1]–[4], které se zdají artikulovat vlastnosti implikace, jež nemusejí být v rozporu ani s jejím relevančním chápáním. Přijměmě tedy tyto teorémy za axiomy relevanční logiky implikace. Snadno zjistíme, že pak nepotřebujeme axiom (2), protože ten je z nich odvoditelný. Máme tedy axiomy

$A\to A$,
$(A\to B)\to((B\to C)\to(A\to C))$,
$(A\to(B\to C))\to(B\to(A\to C))$,
$(A\to(A\to B))\to(A\to B)$.

Ty spolu s pravidlem *modus ponens* tvoří základ jedné z možných axiomatizací systému relevanční logiky, který Anderson a Belnap (1975; 1992) nazvali R a kterému my budeme říkat RVP-R. Teorémy RVP-R nejsou (a) ani (b), jeho teorémem však zůstává (c).

Není jednoduché tento systém rozšířit o axiomy pro další operátory (kdybychom prostě přidali příslušné axiomy KVP, relevančnost implikace bychom opět narušili). Anderson a Belnap doplnili RVP-R axiomy

$A\to(A\vee B)$,
$B\to(A\vee B)$,

$(A \wedge B) \rightarrow A$,
$(A \wedge B) \rightarrow B$,
$(A \wedge (B \vee C)) \rightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$,
$((A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow (B \wedge C))$,
$((A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)$,
$\neg\neg A \rightarrow A$,
$(A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow \neg A)$

a odvozovacím pravidlem

$A, B \,/\, A \wedge B$.

Titíž autoři hledali i variantu relevanční logiky, jejímž teorémem by nebyl ani (c). Výsledkem byl relevantní výrokový počet RVP-E: axiomy tohoto počtu pro implikaci se shodují s axiomy pro implikaci RVP-R, s tím rozdílem, že poslední z uvedených axiomů RVP-R (tj. $(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B))$ je nahrazen axiomem

$(A \rightarrow C) \rightarrow (((A \rightarrow C) \rightarrow B) \rightarrow B)$.

Systém axiomů pro ostatní operátory RVP-E se pak skládá z axiomů RVP-R plus dvou dalších:

$(A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A$,
$(((A \rightarrow A) \rightarrow A) \wedge ((B \rightarrow B) \rightarrow B)) \rightarrow (((A \wedge B) \rightarrow (A \wedge B)) \rightarrow (A \wedge B))$.

Odvozovací pravidla jsou tatáž.

Routley, Plumwood, Meyer a Brady (1982) definovali pro relevanční logiku sémantiku (kterou se my budeme zabývat až v oddíle 6.2), a v souvislosti s tím zkoumali řadu dalších relevančních logik, z nichž si všimneme té, které budeme říkat RVP-B a která je, jak uvidíme, v jistém smyslu minimální. Její axiomatický systém je následující (protože teď již jsme se dostali k systémům, které mají více odvozovacích pravidel než jenom (*mp*), musíme již explicitně uvádět i pravidla):

$A \rightarrow A$,
$A \rightarrow (A \vee B)$,
$B \rightarrow (A \vee B)$,
$(A \wedge B) \rightarrow A$,

$(A \wedge B) \rightarrow B$,
$(A \wedge (B \vee C)) \rightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$,
$((A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge C))$,
$((A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)$,
$\neg\neg A \rightarrow A$,

$A, A \rightarrow B \ / \ B$,
$A, B \ / \ A \wedge B$,
$A \rightarrow B \ / \ (C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B)$,
$A \rightarrow B \ / \ (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$,
$A \rightarrow \neg B \ / \ B \rightarrow \neg A$.

Tento systém je možné zesilovat přidáváním některých z následujících axiomů:

$(A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow \neg A)$,
$(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$,
$(A \rightarrow B) \rightarrow ((C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B))$,
$A \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B)$,
$(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$.

Dá se ukázat, že přidáme-li k axiomům RVP-B tyto axiomy všechny, dostaneme po úpravách (vyvolaných tím, že se jejich přidáním některé z původních axiomů a pravidel RVP-B stanou nadbytečnými) systém RVP-R.

Pro relevanční logiky samozřejmě nemůže platit věta o dedukci: kdyby totiž platila, byly by automaticky teorémy některé z výroků, které relevanční logika odmítá, například $A \rightarrow (B \rightarrow A)$. Platí ovšem některé její varianty – například pro implikační fragment RVP-R je tomu tak, že $A_n \rightarrow A_{n+1}$ je odvoditelný z $A_1, ..., A_{n-1}$ právě tehdy, když je A_n odvoditelný z $A_1, ..., A_{n-1}$ *a A_n je pro A_{n+1} relevantní* (to jest hraje v odvození A_n z $A_1, ..., A_{n-1}$ ‚netriviální roli‘).

Pokud jde o rozhodnutelnost, bylo dokázáno, že zatímco RVP-B rozhodnutelný je, silnější systémy R a E rozhodnutelné nejsou. Vzhledem k axiomatické složitosti a neprůhlednosti nebudeme tyto systémy dále zkoumat; o jejich sémantice budeme pojednávat v oddíle 6.2.

4 Modální výroková logika a možné světy

4.1 Operátor nutnosti

Představme si, že bychom chtěli nikoli reformovat operátory KVP či některý z nich nahradit nějakou lepší variantou, ale přidat ke KVP nějaký zcela nový operátor, s tím, že ty existující ponecháme tak, jak jsou. Jaké další operátory bychom mohli ke KVP přidávat? Pokud bychom zůstali u standardní sémantiky, pak ovšem netriviálně žádné: fakt denotační nasycenosti KVP ukazuje, že v takovém případě nemůžeme dodat žádný operátor, který by již nebyl v KVP implicitně obsažen.

Podíváme-li se ovšem na KVP z hlediska jeho axiomatiky, nezdá se být rozšíření ničím nepřirozeným. Proč bychom nemohli přidat nový operátor a axiomy, které vymezují jeho fungování? Už od antiky se například uvažovalo o operátorech nutnosti a možnosti. Ty by bylo možné rekonstruovat jako unární výrokové operátory, podobně jako negaci. Zamysleme se nad operátorem nutnosti, pro nějž se v rámci moderní logiky začalo užívat znaku □. Vidíme-li □*A* jako zachycení *nutně A*, pak se zdá, že nemůže neplatit například

$$\Box A \rightarrow A,$$

a tento výrok bychom tedy mohli přijmout jako axiom.

Představme si, že bychom takový operátor nutnosti chtěli přidat do KVP. Přijetí právě uvedeného axiomu by zřejmě znamenalo zaplnění jednoho řádku v pravdivostní tabulce příslušné □ (protože tento axiom je v KVP ekvivalentní $\neg A \rightarrow \neg\Box A$):

A	□A
P	?
N	N

Z tohoto hlediska se zdá být k úplné specifikaci nového operátoru potřeba, abychom do tabulky doplnili onu druhou, chybějící hodnotu. Tou by ovšem mohlo být jedině buď P, nebo N. V tom prvním případě by se stal výrok □*A* prostě ekvivalentem *A* (a □ by tedy byl operátorem | z Oddílu 2.3); v tom druhém by byl výrok □*A* vždy nepravdivým (takže □ by splynul s ⌠). Ani v jednom z těchto případů by □ tak samozřejmě nemohl být smysluplně považován za operátor nutnosti.

Budeme-li výroku $\Box A$ říkat *necesitace výroku A*, pak můžeme problém, před kterým stojíme, formulovat následujícím způsobem: neplatí ani to, že by byla necesitace každého pravdivého výroku pravdivá, ani to, že by byla necesitace každého pravdivého výroku nepravdivá. Zdá se tedy, že abychom mohli pro □ vyrobit pravdivostní tabulku, museli bychom rozlišit dva druhy pravdivých výroků – takové, které jsou pravdivé *nutně,* a takové, které jsou pravdivé jenom *kontingentně*, tedy nikoli nutně:

A	□A
NP	P
KP	N
N	N

Teď ovšem musíme i v druhém sloupci tabulky nahradit zrušenou hodnotu P jednou z jejích nástupkyní. To se však nezdá být problematické – nemůžeme se zde sice asi opřít o žádnou jasnou evidenci, nezdá se však nepřirozené ustanovit, že je-li *A* nutně pravdivý, bude $\Box A$ pravdivý nikoli kontingentně, ale nutně:

A	□A
NP	NP
KP	N
N	N

Nyní, když jsme nahradili hodnotu P hodnotami NP a KP, ovšem přestávají fungovat tradiční pravdivostní tabulky pro negaci, konjunkci atd. – musíme je nahradit podrobnějšími tabulkami s novými hodnotami. Negace bude nyní zřejmě přiřazovat hodnotám NP i KP hodnotu N, a hodnotě N jednu z hodnot KP a NP. Kterou? Bude negace nepravdivého výroku kontingentně, či nutně pravdivá? To zjevně závisí na tom, o jaký výrok půjde: negace výroku „Václav Havel je hokejista“ bude pravdivá kontingentně, zatímco negace výroku „Václav Havel je hokejista a není hokejista“ bude pravdivá nutně. To znamená, že musíme dále rozlišit nepravdivé výroky, které jsou nepravdivé kontingentně, od těch, které jsou nepravdivé nutně; to jest nahradit hodnotu N hodnotami NN a KN. Tabulkou pro negaci pak bude

A	¬A
NP	NN
KP	KN
KN	KP
NN	NP

a tabulku pro □ pak upravíme následujícím způsobem:

A	□A
NP	NP
KP	NN
KN	NN
NN	NN

Od naší původní dvojhodnotové sémantiky jsme se tedy již dostali k sémantice čtyřhodnotové. Jak to nyní bude s konjunkcí? Zdá se být zřejmé, že konjunkce nutně nepravdivého výroku s jakýmkoli výrokem bude nutně nepravdivá. Dále se zdá, že konjunkce nutně pravdivého výroku s jakýmkoli výrokem by měla mít tu hodnotu, kterou má onen druhý výrok. Jak to však bude s hodnotami konjunkcí, jejichž konjunkty budou kontingentně pravdivé nebo nepravdivé? Konjunkce dvou kontingentně pravdivých výroků zřejmě musí být pravdivá, a zdá se, že nemůže být pravdivá nutně, bude tedy pravdivá kontingentně. S konjunkcí kontingentně pravdivého výroku s výrokem kontingentně nepravdivým, a podobně s konjunkcí dvou kontingentně nepravdivých výroků, je ovšem problém: ty musí být jistě nepravdivé, avšak zdá se, že některé z nich by měly být nepravdivé kontingentně („Václav Havel je dramatik a Václav Havel je hokejista“), zatímco jiné nutně („Václav Havel je dramatik a Václav Havel není dramatik“).

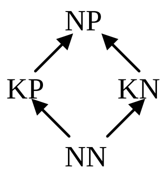
Zdá se tedy, že k tomu, abychom mohli sestavit adekvátní tabulku pro konjunkci, bychom potřebovali hodnoty dále ‚rozmělňovat‘. (Potřebovali bychom například rozlišit mezi způsobem, jak je nepravdivá věta „Václav Havel je hokejista“, a tím, jak je nepravdivá věta „Václav Havel není dramatik“ – to jest přiřadit každé z nich jinou hodnotu.) Doplňme nicméně tabulku provizorně tak, že takovým výrokům přiřadíme hodnotu KN:

$A \wedge B$		*B*			
		NP	**KP**	**KN**	**NN**
A	**NP**	NP	KP	KN	NN
	KP	KP	KP	KN	NN
	KN	KN	KN	KN	NN
	NN	NN	NN	NN	NN

Zkonstruujeme-li analogicky tabulku pro disjunkci

$A \vee B$		*B*			
		NP	**KP**	**KN**	**NN**
A	**NP**	NP	NP	NP	NP
	KP	NP	KP	KP	KP
	KN	NP	KP	KN	KN
	NN	NP	KP	KN	NN

pak uspořádáme-li čtyři uvažované hodnoty do následujícího diagramu, můžeme tuto definici konjunkce charakterizovat tak, že dvěma hodnotám přiřazuje jejich infimum (jak jsme ho definovali v oddíle 3.3):



Disjunkce pak bude zřejmě suprémem. Z hlediska konjunkce a disjunkce se tedy naše současná sémantika podobá sémantice parakonzistentní čtyřhodnotové logiky, kterou jsme se zabývali v oddíle 3.3. Kdybychom tedy ztotožnili naše hodnoty NP, KP, KN a NN s hodnotami P, X, O a N této logiky, splynuly by nám tyto dva počty? Nikoli – rozdíl je v negaci: zatímco v rámci parakonzistentní logiky má negace výroku s hodnotou X opět hodnotu X a negace výroku s hodnotou O hodnotu O, hodnotou negace výroku s hodnotou KP je KN a naopak. Tento zdánlivě drobný rozdíl je ovšem podstatný: vede totiž k tomu, že naše čtveřice hodnot, na rozdíl od čtveřice hodnot parakonzistentní logiky, tvoří tzv. *Boolovu algebru*. Vysvětleme nyní podrobněji, co to Boolova algebra je.

4.2 Boolovy algebry a ‚možné světy'

Boolovou algebrou nazýváme jakoukoli množinu, která je částečně uspořádána tak, že každé dva její prvky mají suprémum a infimum, navíc existují maximální a minimální prvek celé této množiny; a dále každý její prvek *x* má *doplněk*, což je takový prvek *y*, že infimem *x* a *y* je minimální prvek celé množiny, zatímco suprémem *x* a *y* je prvek maximální[30]. Prototypickým příkladem Boolovy algebry je množina všech podmnožin jakékoli množiny *M*: jejím maximálním prvkem je celá *M*, minimálním prázdná množina, suprémem sjednocení, infimem průnik a doplňkem doplněk v množinovém smyslu.

V případě naší čtyřprvkové Boolovy algebry je maximem NP, minimem NN, a suprémem, infimem a doplňkem jsou funkce definované tabulkami pro disjunkci, konjunkci a negaci. (Důvodem, proč čtyři hodnoty spolu s operacemi definovanými tabulkami operátorů parakonzistentní logiky Boolovu algebru netvoří, je to, že její negace není schopna hrát roli doplňku: například negace hodnoty X je opět X, a suprémum X a X je zřejmě opět X, nikoli maximální prvek P.)

Boolovu algebru ovšem tvoří i samotné dvě hodnoty KVP – v jeho případě je konjunkce infimem, disjunkce suprémem a negace doplňkem, uspořádáme-li pravdivostní hodnoty následujícím způsobem:

$$\begin{array}{c} \mathrm{P} \\ \uparrow \\ \mathrm{N} \end{array}$$

Všimněme si, že fakt, že operátory konjunkce, disjunkce a negace jsou v obou případech schopny realizovat infimum, suprémum a doplněk Boolovy algebry, je dán axiomy KVP. Tak například to, že disjunkce v roli supréma a negace v roli doplňku splňuje požadavek, že suprémum každého prvku a jeho doplňku je maximální prvek, je garantováno faktem, že $A \vee \neg A$ je teorémem (a tudíž je odvoditelný z jakéhokoli výroku). Axiomatika KVP a principy konstitutivní Boolově algebře jsou dvě stránky téže mince.

Tzv. Stonova věta, která se dokazuje v teorii Boolových algeber[31], říká, že algebra podmnožin nějaké množiny je nejenom prototypickým případem

[30] Podrobněji *viz* Kapitola 7 nebo Rieger (1967, Kapitola 6).

[31] Rieger (1967, §6.3).

Boolovy algebry, ale i případem reprezentativním v tom smyslu, že na něj lze každou jinou Boolovu algebru převést. Každá Boolova algebra je totiž podle této věty izomorfní právě určité algebře, jejímiž prvky jsou podmnožiny určité množiny (i když ne nutně všechny), a jejímž suprémem, infimem a doplňkem jsou sjednocení, průnik a doplněk v množinovém smyslu. Například ona dvouprvková Boolova algebra, na níž je založena sémantika KVP, je ztotožnitelná s algebrou podmnožin jednoprvkové množiny tak, že N ztotožníme s prázdnou množinou a P s množinou tvořenou jejím jediným prvkem.

Označíme-li tedy tento prvek symbolem SS (proč volíme právě tento symbol, se ukáže později), bude N = ∅ a P = {SS}. Pak můžeme předchozí diagram přepsat jako

$$\begin{array}{c}\{\mathrm{SS}\}\\ \uparrow\\ \varnothing\end{array}$$

Snadno se přesvědčíme, že tabulky pro konjunkci, disjunkci a negaci budou skutečně odpovídat operacím sjednocení, průniku a doplňku. Tak například z tabulky pro konjunkci se stane

A	*B*	*A*∧*B*
{SS}	{SS}	{SS}
{SS}	∅	∅
∅	{SS}	∅
∅	∅	∅

Vzhledem k tomu, že průnik {SS} s {SS} je opět {SS}, zatímco průnikem jakékoli množiny s ∅ je ∅, je hodnota odpovídající *A*∧*B* skutečně vždy průnikem hodnot odpovídajícím *A* a *B*.

Výše uvedená čtyřhodnotová sémantika pak odpovídá druhé nejjednodušší Boolově algebře, algebře všech podmnožin dvouprvkové množiny. Označíme-li ony dva prvky SS a AS, transformuje se příslušný diagram na

$$\begin{tikzcd} & \{SS,AS\} & \\ \{SS\} \arrow[ur] & & \{AS\} \arrow[ul] \\ & \emptyset \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

K čemu nám takové převádění hodnot na množiny je? Ukazuje se, že na něm můžeme založit velice intuitivní chápání těchto hodnot; a sice začneme-li se na prvky oné množiny, jejímiž podmnožinami naše hodnoty jsou, dívat jako na ‚možné světy'. Výrokům jsou pak tedy přiřazovány množiny možných světů; a můžeme si to představit tak, že konkrétnímu výroku je přiřazena právě množina těch možných světů, ve kterých je tento výrok pravdivý.

Standardní interpretaci KVP si ovšem můžeme představit jako záležitost jediného světa – jde nám jenom o to, zda je ten který výrok pravdivý právě v tomto, ‚skutečném' světě (odtud symbol „SS"). Pravda se tak pro nás stává *pravdou ve* (nebo *o*) *skutečném světě* (to je ovšem zjevně to, co *pravdou* normálně myslíme), a nepravda se stává *nepravdou ve* (*o*) *skutečném světě*. Všimněme si však, že pravda ve skutečném světě splývá s pravdou v každém světě (protože jiný než ten skutečný v rámci této sémantiky nemáme) a nepravda ve skutečném světě splývá s tím, že výrok není pravdivý v žádném světě.

V případě naší čtyřhodnotové sémantiky máme světy dva: skutečný svět SS a ‚alternativní' svět AS. Představme si (a odhlédněme na okamžik od těžké stravitelnosti takové představy), že existují pouze dvě možnosti, jak by se mohly věci v našem světě mít – možnosti představované SS a AS. Z hlediska pravdivosti výroku pak máme čtyři možnosti: výrok může být pravdivý v obou těchto světech (pak je podle podle předpokladu pravdivý za všech okolností, a tedy pravdivý nutně), nebo není pravdivý v žádném z nich (nutná nepravda), nebo je pravdivý ve skutečném světě, ale ne ve všech (tedy není pravdivý v tom alternativním – kontingentní pravda), nebo je nepravdivý ve skutečném, ale nikoli ve všech (tedy je pravdivý v alternativním – kontingentní nepravda).

Samozřejmě, že fakticky je možných stavů věcí jistě více. A abychom tedy mohli nutnou pravdivost smysluplně explikovat jakožto pravdivosti ve všech možných světech, potřebovali bychom jich mnohem více než dva; a dále uvidíme, že k adekvátní explikaci modalit, jako jsou nutnost a možnost, byla právě taková sémantika navržena. Protože sémantiku založenou na možných světech navrhl jako první Saul Kripke, budeme jí říkat *kripkovská*. Nejprve si ukážeme, že kripkovskou sémantiku můžeme vybudovat i pro KVP.

4.3 Kripkovská sémantika pro KVP

Viděli jsme, že hodnoty, se kterými pracuje sémantika KVP, musí – kvůli axiomům KVP – tvořit Boolovu algebru; a že vystačíme už s tou nejjednodušší možnou Boolovou algebrou, jejíž nosič je tvořen dvěma prvky, a je tedy ztotožnitelný s množinou podmnožin jednoprvkové množiny. Existence méně triviální kripkovské sémantiky pro klasickou logiku je dána tím, že se na tuto nejjednodušší algebru omezit sice *můžeme*, ale *nemusíme*.

Klasický výrokový počet tedy lze opatřit i obecnější kripkovskou sémantikou, ve které se neomezíme na jediný svět. Pro každou množinu M nazvěme přiřazení podmnožin M výrokům KVP *kvaziinterpretací* jazyka KVP, platí-li:

(i) negaci $\neg A$ výroku A je přiřazen doplněk množiny přiřazené A, tj. $\|\neg A\| = \{w \mid w \notin \|A\|\}$,

(ii.i) konjunkci $A \wedge A'$ výroků A a A' je přiřazen průnik množin přiřazených A a A', tj. $\|A \wedge A'\| = \{w \mid w \in \|A\| \text{ a } w \in \|A'\|\}$,

(ii.ii) disjunkci $A \vee A'$ výroků A a A' je přiřazeno sjednocení množin přiřazených A a A', tj. $\|A \vee A'\| = \{w \mid w \in \|A\| \text{ nebo } w \in \|A'\|\}$,

(ii.iii) implikaci $A \rightarrow A'$ výroků A a A' je přiřazeno sjednocení množiny přiřazené A' s doplňkem množiny přiřazené A, tj. $\|A \rightarrow A'\| = \{w \mid w \notin \|A\| \text{ nebo } w \in \|A'\|\}$.

Množině M pak říkáme *univerzum* této kvaziinterpretace; a o jejích prvcích hovoříme jako o *možných světech*.

Výrok KVP nazveme *kvazitautologií* právě tehdy, když mu každá kvaziinterpretace přiřazuje celé své univerzum. Řekneme, že výrok A *kvazivyplývá* z množiny X výroků, jestliže každá kvaziinterpretace, která přiřazuje každému z výroků množiny X celé univerzum, přiřazuje celé univerzum i výroku A. Není těžké ukázat, že tato alternativní sémantika je ekvivalentní té standardní v tom smyslu, že pojem kvazitautologie splývá s pojmem tautologie a pojem kvazivyplývání s pojmem vyplývání.

Platí: Výrok KVP je kvazitautologií právě tehdy, když je tautologií (a tedy když je teorémem), a kvazivyplývá z jiných výroků právě tehdy, když z nich vyplývá (a tedy když je z nich odvoditelný).

Důkaz: Nejprve ukážeme, že ke každé interpretaci I existuje kvaziinterpretace I^*, která přiřazuje celé univerzum právě těm výrokům, kterým I přiřazuje hodnotu P. Takovou kvaziinterpretaci zkonstruujeme tak, že za M vezmeme jednoprvkovou množinu, takže obor I^* bude mít pouze dvě hodnoty (a sice M a $\emptyset$) stejně tak jako I. Pak prostě definujeme I^* jako přiřazující M právě těm výrokům, kterým I přiřazuje P. Snadno se ověří, že takto definovaná I^* je skutečně kvaziinterpretací. Z toho plyne, že každá kvazitautologie je tautologie a každý případ kvazivyplývání je případem vyplývání.

Důkaz opačné inkluze je poněkud složitější. Mějme kvaziinterpretaci s univerzem M. Pro každý prvek w množiny M definujme přiřazení I_w pravdivostních hodnot výrokům tak, že výroku A je přiřazena hodnota P právě tehdy, když $w \in \|A\|$. Pak zřejmě platí, že I_w je interpretací. Současně ovšem platí, že $\|A\| = M$ právě tehdy, když $I_w(A)$ = P pro každý $w \in M$. To znamená, že ke každé kvaziinterpretaci existuje množina interpretací tak, že všechny interpretace z této množiny přiřazují kterémukoli danému výroku P právě tehdy, když mu uvažovaná kvaziinterpretace přiřazuje celé univerzum. To ale znamená, že výrok, který platí při každé interpretaci, musí platit i při každé kvaziinterpretaci neboli že každá tautologie je kvazitautologie a každý případ vyplývání je případem kvazivyplývání.

Nyní se můžeme ptát: Nahradíme-li standardní sémantiku KVP touto alternativní, kripkovskou, bude výsledkem jenom jiné vymezení KVP, nebo jím bude jiný výrokový počet? Odpověď na tuto otázku záleží na tom, podle jakých kritérií chceme rozhodovat, kdy jsou dva logické počty totožné. Pokud má být kritériem to, jaké výroky prohlašují za teorémy/tautologie, bude krok od standardní k naší alternativní sémantice znamenat pouze jiné vymezení téže logiky, pokud však budeme identitu KVP pevně spojovat se sémantikou pravdivostních hodnot (jak se to často děje), půjde o jinou logiku. My se zde budeme držet první varianty.

Ukážeme nyní jednu zásadní vlastnost, kterou se tato alternativní sémantika liší od té standardní; k tomu však nejprve definujme některé pojmy. Interpretaci nazveme *modelem* dané množiny výroků, jestliže přiřazuje P všem výrokům, které do této množiny patří; a nazveme ji *charakteristickým* modelem této množiny, přiřazuje-li P těmto výrokům *a žádným jiným*. Z věty o úplnosti KVP plyne, že každá interpretace je modelem množiny všech teorémů KVP, nebo, jak budeme zkráceně říkat, modelem KVP. (Z definice tautologie totiž plyne, že každá interpretace je modelem množiny všech tautologií, a ta s množinou všech teorémů, jak víme, splývá.) Žádná interpretace však není jejím *charakteristickým* modelem – to jest žádná interpretace nepřiřazuje hodnotu P všem teorémům *a jenom jim*. (To plyne například z faktu, že je-li A atomický, pak každá interpretace musí přiřadit P buďto jemu, nebo jeho negaci; avšak žádný atomický výrok ani žádná negace atomického výroku zřejmě nemůže být tautologií, a tudíž ani teorémem.)

Situace se ovšem v tomto ohledu změní, nahradíme-li standardní sémantiku naší alternativní (to jest začneme-li říkat „interpretace" tomu, co jsme výše definovali jako *kvazi*interpretaci): pak již charakteristický model existovat bude. Ukažme, jak lze takový model zkonstruovat.

Charakteristickým modelem množiny teorémů je v rámci této sémantiky zřejmě množina možných světů taková, že každý z teorémů KVP je pravdivý v každém z těchto světů a současně pro každý výrok, který teorémem není, existuje svět, ve kterém tento výrok pravdivý není. My nyní potřebné možné světy vybudujeme *z jazyka*: každý takový svět bude prostě množinou výroků. (Všimněme si, že v definici kvaziinterpretace se na množinu M nekladou žádná omezení, takže není důvod, proč by její prvky nemohly být množinami výroků.) Hledanou interpretací by pak mělo být to přiřazení množin světů výrokům, kterým je výroku přiřazena množina všech těch světů (tj. množin výroků), do kterých patří. Problémem nyní je, *jaké* množiny výroků bychom měli použít, aby byla výsledná interpretace skutečně charakteristickým modelem KVP.

Nazvěme množinu výroků *teorií*, obsahuje-li všechny výroky, které jsou z ní odvoditelné. (Množina X je tedy teorií, jestliže pro každý výrok A, který je odvoditelný z X, platí, že $A \in X$.) Je zřejmé, že každá teorie obsahuje všechny teorémy. (Každý teorém je totiž odvoditelný z prázdné množiny, a tudíž tím spíše z jakékoli neprázdné množiny výroků.) Kdybychom tudíž jako možné světy použili všechny teorie, vyšel by z toho každý teorém jistě jako pravdivý v každém možném světě. Kdyby se nám tedy podařilo ukázat, že pro každý výrok, který není teorémem, existuje teorie, do které tento výrok nepatří, měli bychom vyhráno.

Že taková teorie skutečně existuje, plyne z úplnosti KVP. Není-li totiž A teorémem, pak není ani tautologií, takže existuje interpretace, která mu přiřazuje N – a protože výroky, kterým interpretace přiřazuje P, tvoří teorii, máme teorii, která A neobsahuje. Uveďme zde však jiný důkaz, který úplnost nepředpokládá:

Platí: Pro každý výrok A, který není teorémem KVP, existuje teorie KVP, která ho neobsahuje.

Důkaz: Předpokládejme, že A není teorémem; a seřaďme všechny výroky KVP podle nějakého kritéria (třeba podle nějak rozšířené abecedy) do nekonečné posloupnosti B_1, B_2, ... (v této posloupnosti se tedy někde vyskytuje i A, řekněme že na j-tém místě – je tedy totožný s B_j). Definujme nyní nekonečnou posloupnost množin výroků Y_0, Y_1, ... následujícím způsobem:

$Y_0 = \emptyset$,
$Y_{i+1} = Y_i \cup \{B_i\}$, není-li z $Y_i \cup \{B_i\}$ odvoditelný výrok A
$= Y_i$ jinak.

Y pak definujeme jako sjednocení všech množin Y_0, Y_1, ...

Snadno nyní nahlédneme, že A není prvkem Y. Vzhledem ke způsobu konstrukce množiny Y by se do ní totiž A mohl dostat jedině tehdy, kdyby nebyl odvoditelný z $Y_j \cup \{B_j\}$, tedy z $Y_j \cup \{A\}$, a to jistě nenastává.

A ovšem není z Y ani odvoditelný. Předpokládejme totiž, že by tomu tak bylo: pak by musel být A odvoditelný (v důsledku kompaktnosti odvozování) z nějaké Y_i; vezměme tedy nejmenší takové i. Protože A není teorémem, a není tudíž odvoditelný z prázdné množiny, je $i>0$; a zřejmě tedy musí platit $Y_i = Y_{i-1} \cup \{B_{i-1}\}$ (protože kdyby byla množina Y_i totožná s Y_{i-1}, musel by být A odvoditelný již z Y_{i-1}, zatímco my jsme předpokládali, že i je nejmenším indexem množiny, pro kterou toto platí). A to by mohlo (v důsledku definice Y_i) nastat jedině tehdy, kdyby A z $Y_{i-1} \cup \{B_{i-1}\}$ odvoditelný *nebyl*.

Z faktu, že z Y není odvoditelný A, ihned také plyne, že Y je axiomaticky konzistentní. (Jak jsme totiž ukázali v oddíle 2.2, je množina výroků axiomaticky konzistentní právě tehdy, když z ní nejsou odvoditelné všechny výroky.)

Nyní ukažme, že Y je teorií. Předpokládejme, že je z Y odvoditelný nějaký výrok B_i. Pak je ovšem cokoli, co je odvoditelné z $Y \cup \{B_i\}$, odvoditelné z Y samotné – a protože z Y není odvoditelný A, nemůže být A odvoditelný ani z $Y \cup \{B_i\}$, a tudíž tím spíše ne z $Y_i \cup \{B_i\}$. To znamená, že $Y_{i+1} = Y_i \cup \{B_i\}$. B_i je tedy prvkem Y_{i+1}, a tudíž i Y.

Všimněme si nyní, že v tomto důkazu jsme se neopřeli o žádné specifické vlastnosti KVP. Co jsme dokázali, je tedy přenositelné do jakéhokoli jiného výrokového počtu. Pro KVP však lze toto tvrzení ještě zesílit. Nazvěme teorii *maximální*, jestliže do ní patří negace každého výroku, který do ní nepatří. Platí, že ke každému výroku A, který není teorémem, existuje maximální axiomaticky konzistentní teorie (zkráceně *mk-teorie*), která ho neobsahuje. To nám zřejmě dovolí omezit univerzum charakteristického modelu právě na mk-teorie.

Platí: Pro každý výrok A, který není teorémem KVP, existuje mk-teorie KVP, která ho neobsahuje.

Důkaz: Zřejmě stačí ukázat, že teorie Y, kterou jsme vybudovali v důkazu předchozího tvrzení, je maximální. Předpokládejme tedy, že do Y nepatří B_i. To může nastat jedině tehdy, je-li z $Y_i \cup \{B_i\}$, a tedy i z $Y \cup \{B_i\}$, odvoditelný A. Pak ovšem nemůže být A odvoditelný z $Y \cup \{\neg B_i\}$ (protože kdyby byl, byl by A s pomocí teorému [11], $(B_i \to A) \to ((\neg B_i \to A) \to A))$, odvoditelný ze samotného Y). Je-li tedy výrok $\neg B_i$ k-tým prvkem posloupnosti B_1, B_2, ..., to jest je-li totožný s B_k, pak musí být prvkem Y_{k+1}, a tudíž i Y.

Platí tedy i: Výrok je teorémem KVP právě tehdy, když je obsažen v každé mk-teorii KVP.

Důkaz: Je-li *A* teorémem, pak je obsažen v každé teorii, a tím spíše každé mk-teorii. Pokud teorémem není, pak, jak jsme právě dokázali, existuje mk-teorie, která ho neobsahuje. Je-li tedy obsažen v každé mk-teorii, musí *A* být teorémem.

Charakteristický model KVP tedy můžeme definovat tak, že jeho univerzem bude množina všech mk-teorií a každému výroku bude přiřazena množina všech těch z nich, do kterých patří.

Proč je existence charakteristického modelu obecně podstatná? Přímočaře z ní vyplývá úplnost. Připomeňme, že výrokový počet je úplný, když je každá tautologie teorémem neboli, což je zřejmě totéž, když žádný výrok, který není teorémem, není tautologií. A máme-li charakteristický model, víme, že žádný výrok, který není teorémem, tautologií být nemůže – neplatí totiž v charakteristickém modelu, a tím spíše neplatí v každém modelu.

S tím souvisí podstatný rozdíl mezi standardní a kripkovskou sémantikou pro KVP: zatímco u té standardní nutně potřebujeme *pluralitu* interpretací (jenom všechny dohromady nám totiž dokáží vymezit množinu tautologií), u té kripkovské bychom se *de facto* mohli omezit na jedinou: totiž právě na nějakou, která tvoří charakteristický model množiny teorémů.

Všimněme si také, že důkaz úplnosti KVP vzhledem k jeho alternativní sémantice, který jsme provedli pomocí charakteristického modelu, můžeme přímočaře zobecnit na důkaz *silné* úplnosti, to jest na důkaz toho, že kdykoli výrok *A* vyplývá z množiny *X* výroků, pak je z *X* odvoditelný.

Abychom totiž dokázali, že není-li *A* odvoditelný z *X*, pak z ní nevyplývá, stačí zkonstruovat interpretaci, která bude modelem *X*, avšak nikoli *A* (všimněme si, že z toho, že z *X* není odvoditelný *A*, plyne, že *X* je konzistentní). Potřebujeme tedy interpretaci s takovým univerzem, že všechny prvky *X* budou pravdivé ve všech jeho možných světech, bude však existovat alespoň jeden svět, ve kterém nebude pravdivý *A*. Takové univerzum můžeme vytvořit z těch mk-teorií, které obsahují *X*: budou-li možnými světy ony, pak bude *X* triviálně pravdivý v každém z nich; a nám tedy stačí ukázat, že není-li z *X* odvoditelný *A*, pak existuje mk-teorie, která obsahuje *X*, ale nikoli *A*. Tvrzení, že tomu tak je, budeme říkat *věta o rozšíření*:

Platí: Není-li z množiny výroků *X* v KVP odvoditelný výrok *A*, pak existuje mk-teorie KVP, která obsahuje *X* a neobsahuje *A*.

Důkaz: Mk-teorii, která obsahuje X, avšak nikoli A, zřejmě zkonstruujeme způsobem zcela analogickým tomu, jakým jsme v předchozích důkazech konstruovali Y: pouze za Y_0 nevezmeme prázdnou množinu, ale X.

Důsledkem tohoto posledního tvrzení je

Platí tedy i: A je odvoditelný z X právě tehdy, když je obsažen v každé mk-teorii, která obsahuje X.

Důkaz: Je-li A odvoditelný z X, pak je obsažen v každé teorii, která obsahuje X, a tím spíše v každé takové mk-teorii. Pokud z ní odvoditelný není, pak, jak jsme právě dokázali, existuje mk-teorie obsahující X, která ho neobsahuje. Je-li tedy obsažen v každé takové teorii, musí být z X odvoditelný.

Dalším důsledkem je to, co se obvykle nazývá *Lindenbaumovým lemmatem*:

Platí tedy i: Každá axiomaticky konzistentní množina výroků KVP je rozšířitelná na mk-teorii KVP.

Důkaz: Je-li X konzistentní, pak nutně existuje nějaký A, který není z X odvoditelný, a existuje tedy mk-teorie, která obsahuje X (a neobsahuje A).

Poznamenejme, že z Lindenbaumova lemmatu lze naopak odvodit větu o rozšíření (a tato dvě tvrzení jsou tedy ekvivalentní); stačí ukázat, že není-li A odvoditelný z X, pak je axiomaticky konzistentní množina $X \cup \{\neg A\}$:

Platí: Není-li z X odvoditelný A, pak je množina $X \cup \{\neg A\}$ axiomaticky konzistentní.

Důkaz: Nechť A není odvoditelný z X. Kdyby $X \cup \{\neg A\}$ nebyla axiomaticky konzistentní, byl by z $X \cup \{\neg A\}$ odvoditelný každý výrok, a tedy i A. Podle věty o dedukci by tedy byl z X odvoditelný $\neg A \rightarrow A$. Ale protože z X je jistě odvoditelný i $A \rightarrow A$ (to je totiž teorém, takže je odvoditelný z prázdné, a tím spíše z každé neprázdné množiny výroků), byl by z X, v důsledku teorému [11], odvoditelný i A. A to je spor.

Jestliže tedy A není odvoditelný z X, je množina $X \cup \{\neg A\}$ podle Lindenbaumova lemmatu rozšířitelná na mk-teorii, a tato mk-teorie neobsahuje A (protože je konzistentní a obsahuje $\neg A$).

4.4 Nutnost a možnost

Vraťme se nyní k úvahám o operátoru nutnosti a ke čtyřhodnotové sémantice, ke které jsme se výše v kontextu těchto úvah dopracovali. Tato čtyřhodnotová sémantika, jak jsme viděli, odpovídá algebře podmnožin dvouprvkové množiny tvořené ‚skutečným světem' a ‚alternativním světem'. Nutná pravda je pak explikována jako pravda ve všech světech (to jest ve skutečném i v alternativním), kontingentní pravda jako pravda ve skutečném světě, ale nikoli ve všech světech (to jest nikoli v alternativním), kontingentní nepravda naopak jako pravdivost v nějakém světě, který není skutečný (to jest v alternativním), a nutná nepravda jako pravdivost v žádném světě.

Intuitivně je však tato explikace jistě problematická. Nezdá se totiž, že by bylo rozumné rekonstruovat náš jazyk tak, že by konjunkcí kontingentní pravdy s kontingentní nepravdou byla vždy nutná nepravda. Jak již jsme viděli, tak se tomu zdá být jenom v případě *některých* dvojic vět („Václav Havel je dramatik a Václav Havel není dramatik"), zatímco v případě jiných se zdá být výsledkem nepravda pouze kontingentní („Václav Havel je dramatik a Václav Havel je hokejista").

Zdá se, že tedy potřebujeme další ‚rozmělnění' našich hodnot. My ovšem nyní již víme, že můžeme přejít jedině k jiné Boolově algebře, to jest k algebře podmnožin nějaké větší než dvouprvkové množiny. A z hlediska přirozeného jazyka by počet uvažovaných možných světů měl být nekonečný. (Uvažme nekonečnou množinu vět {„Počet planet ve Vesmíru je 1", „Počet planet ve Vesmíru je 2", ...}. Zdá se, že ke každé z těchto vět by měl existovat možný svět, kde je pravdivá a kde jsou nepravdivé všechny ostatní. Ale protože těchto vět je nekonečný počet, mělo by být nekonečně i světů.)

Operátory KVP jsou charakterizované tím, že vytvářejí výroky, jejichž pravdivost či nepravdivost (v jediném uvažovaném, tj. skutečném světě) závisí jen na pravdivosti či nepravdivosti jejich argumentů (v tomto světě). Máme-li pouze jeden svět, pak zřejmě pravdivost ve skutečném světě splývá s pravdivostí v každém možném světě (tj. s nutností) i s pravdivostí v alespoň jednom možném světě (tj. s možností). Jakmile však máme možných světů více, můžeme (a vlastně musíme) tyto tři věci rozlišit.

Vezměme například implikaci. V rámci KVP je definována jako pravdivá právě tehdy, když je její antecedent nepravdivý nebo její konsekvent pravdivý. Hovořme o *standardní* implikaci, když k její pravdivosti ve skutečném světě (a podobně případně v kterémkoli jiném světě) stačí splnění této podmínky *v tomto světě*. Kromě této standardní implikace můžeme ovšem definovat i *silnou* implikaci tak, že její pravdivost ve světě *w* vyžaduje splnění této podmínky *v každém možném* světě a *slabou* implikaci jako vyžadující splnění této podmínky *alespoň v jednom možném* světě. Platí tedy:

A ve *w* (standardně) implikuje *B*, je-li ve *w A* nepravdivý nebo *B* pravdivý;
A ve *w* silně implikuje *B*, je-li v každém světě *A* nepravdivý nebo *B* pravdivý;
A ve *w* slabě implikuje *B*, je-li v nějakém světě *A* nepravdivý nebo *B* pravdivý.

Je zřejmé, že jestliže *A* v nějakém světě silně implikuje *B*, pak ho v tomto světě implikuje standardně (ale obecně nikoli naopak), a jestliže *A* v nějakém světě standardně implikuje *B*, pak ho v tomto světě implikuje slabě (ale opět obecně nikoli naopak).

Analogické ‚silné' a ‚slabé' verze bychom mohli definovat pro všechny operátory. Jednodušší je ovšem definovat operátor □ nutnosti a ◊ možnosti tak, že □*A* je ve *w* pravdivý právě tehdy, když je *A* pravdivý ve všech možných světech, a ◊*A* je ve *w* pravdivý právě tehdy, když je *A* pravdivý alespoň v jednom možném světě. Silnou implikaci pak bude zřejmě možné vyjádřit pomocí nutnosti a standardní implikace, totiž jako □($A \rightarrow B$), a podobně slabou implikaci jako ◊($A \rightarrow B$). Analogicky pak lze vyjádřit i silné a slabé verze všech ostatních operátorů.

Navíc, jak snadno nahlédneme, je výrok □*A* pravdivý právě tehdy, když je pravdivý výrok ¬◊¬*A*. ¬◊¬*A* je totiž v daném možném světě pravdivý právě tehdy, když v tomto světě není pravdivý ◊¬*A*, a ten je v tomto světě nepravdivý právě tehdy, když není ¬*A* pravdivý v žádném světě, to jest když je *A* pravdivý v každém. ¬◊¬*A* je tedy v možném světě pravdivý právě tehdy, když je tam pravdivý □*A*. Takže nepotřebujeme ani operátor možnosti, protože ho můžeme vyjádřit pomocí nutnosti a negace.

4.5 Modální výrokový počet S5

Modální výrokový počet, který vznikne tak, že se k jazyku KVP přidá operátor □ s právě probranou sémantikou, budeme z důvodů, které vyjdou najevo později, označovat jako MVP-S5 nebo prostě S5. Definujme nyní tuto logiku exaktněji:

Jazyk MVP-S5 vznikne z jazyka KVP tak, že k němu přidáme unární výrokový operátor □. Dále používáme ◊ jako zkratku za ¬□¬. Sémantika tohoto jazyka vychází z následující alternativní, kripkovské sémantiky KVP.

Interpretací jazyka S5 nazveme takové přiřazení podmnožin množiny M (které říkáme *univerzum* této interpretace) výrokům jazyka S5, že:

(i.i) negaci $\neg A$ výroku A je přiřazen doplněk množiny přiřazené A,
tj. $\|\neg A\| = \{w \mid w \notin \|A\|\}$;
(i.ii) necesitaci $\Box A$ výroku A je v případě, že je $\|A\| = M$, přiřazena množina M a jinak je jí přiřazena $\emptyset$,
tj. $\|\Box A\| = \{w \mid w' \in \|A\|$ pro každý možný svět $w'\}$;
(ii.i) konjunkci $A \wedge B$ výroků A a B je přiřazen průnik množin přiřazených A a B, tj. $\|A \wedge B\| = \{w \mid w \in \|A\|$ a $w \in \|B\|\}$;
(ii.ii) disjunkci $A \vee B$ výroků A a B je přiřazeno sjednocení množin přiřazených A a B, tj. $\|A \vee B\| = \{w \mid w \in \|A\|$ nebo $w \in \|B\|\}$;
(ii.iii) implikaci $A \rightarrow B$ výroků A a B je přiřazeno sjednocení množiny přiřazené B s doplňkem množiny přiřazené A,
tj. $\|A \rightarrow B\| = \{w \mid w \notin \|A\|$ nebo $w \in \|B\|\}$.

Říkáme-li prvkům M možné světy a čteme-li

$w \in \|A\|$

jako

A je pravdivý v možném světě w,

můžeme tuto definici názorněji přeformulovat jako vyjádření toho, co musí platit pro každý možný svět w:

(i.i′) $\neg A$ je ve w pravdivý, právě když je A ve w nepravdivý;
(i.ii′) $\Box A$ je ve w pravdivý, právě když je A pravdivý v každém světě;
(ii.i′) $A \wedge B$ je ve w pravdivý, právě když je ve w pravdivý jak A, tak B;
(ii.ii′) $A \vee B$ je ve w pravdivý, právě když je ve w pravdivý A nebo B;
(ii.iii′) $A \rightarrow B$ je ve w pravdivý, právě když je ve w nepravdivý A nebo pravdivý B.

Výrok S5 nazveme *tautologií* právě tehdy, když mu každá interpretace přiřazuje celé své univerzum, to jest když je tento výrok při každé interpretaci pravdivý v každém možném světě. Řekneme, že výrok A *lokálně vyplývá* z výroků A_1, ...,

A_n, jestliže pro každou interpretaci a každý svět z jejího univerza platí, že jsou-li v tomto světě pravdivé A_1, ..., A_n, je v něm pravdivý i A. Řekneme, že výrok A *globálně vyplývá* z výroků A_1, ..., A_n, jestliže každá interpretace, která přiřazuje celé univerzum každému z výroků A_1, ..., A_n, přiřazuje celé univerzum také výroku A. Je zřejmé, že vyplývá-li A z A_1, ..., A_n lokálně, vyplývá z nich i globálně. Naopak to však neplatí: například výrok $\Box A$ globálně vyplývá z výroku A, nevyplývá z něj však lokálně (stačí uvážit interpretaci se světem, ve kterém platí A a ze kterého je dosažitelný nějaký svět, ve kterém A neplatí).

Jak by mohla vypadat příslušná axiomatika? Které výroky by měla ustanovovat jako nutně pravdivé – to jest pro které A by měl být teorémem $\Box A$? Zdá se, že minimálním požadavkem je, aby byly jako nutně pravdivé zachyceny všechny teorémy. To nám dává nové odvozovací pravidlo, $A / \Box A$. V konkrétních případech pak můžeme za nutně pravdivé prohlásit i některé další výroky – rozhodně to ale nemohou být výroky, které jsou nepravdivé, což nám dává axiom $\neg A \to \neg\Box A$ neboli $\Box A \to A$. Navíc bychom měli požadovat, aby množina nutných pravd byla vždy uzavřená na *modus ponens* – to jest aby kdykoli A nutně implikuje B a A je nutně pravdivý, byl nutně pravdivý i B. Máme tedy axiom $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$. Za jakých podmínek by měly být teorémy necesitace necesitací či negací necesitací, to jest výroky tvarů $\Box\Box A$ a $\Box\neg\Box A$? Zdá se, že nejjednodušší je předpokládat, že je-li výrok nutný, pak už je nutný nutně, tj. $\Box A \to \Box\Box A$, a podobně není-li nutný, není nutný nutně $\neg\Box A \to \Box\neg\Box A$. Tento poslední výrok je možné ekvivalentně formulovat i jako $\Diamond A \to \Box\Diamond A$.

A ukazuje se, že toto skutečně stačí k axiomatizaci S5; to jest k vytvoření axiomatiky, která je korektní a úplná vzhledem k výše uvedené sémantice. Axiomatický systém S5 tedy můžeme sestavit z axiomů a odvozovacího pravidla KVP plus následujících axiomů a pravidla (způsob, jakým jednotlivé axiomy značíme, má důvody historické a budeme o něm ještě mluvit):

(K) $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$,
(T) $\Box A \to A$,
(S4) $\Box A \to \Box\Box A$,
(S5) $\Diamond A \to \Box\Diamond A$,

(*nec*) $A / \Box A$.

Ukazuje se ovšem, že axiom (S4) je dokazatelný v axiomatickém systému, který se skládá ze zbývajících tří. Ukažme ale nejprve, že v takto redukovaném systému je dokazatelný výrok

(B) $A \rightarrow \Box\Diamond A$:

1. $\Box\neg A \rightarrow \neg A$	(T)
2. $\neg\neg A \rightarrow \neg\Box\neg A$	1., [8]
3. $A \rightarrow \neg\neg A$	[7]
4. $A \rightarrow \neg\Box\neg A$	3., 2., [2]
5. $A \rightarrow \Diamond A$	4., definice $\Diamond$
6. $\Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$	(S5)
7. $A \rightarrow \Box\Diamond A$	5., 6., [2]

Nyní proveďme důkaz (S4):

1. $\Diamond\neg A \rightarrow \Box\Diamond\neg A$	(S5)
2. $\neg\Box\Diamond\neg A \rightarrow \neg\Diamond\neg A$	1., [8]
3. $\neg\Box\Diamond\neg A \rightarrow \neg\neg\Box\neg\neg A$	2. definice $\Diamond$
4. $\neg\neg\Box\neg\neg A \rightarrow \Box\neg\neg A$	(10)
5. $\neg\Box\Diamond\neg A \rightarrow \Box\neg\neg A$	3., 4., [2]
6. $\neg\neg A \rightarrow A$	(10)
7. $\Box(\neg\neg A \rightarrow A)$	6., (*nec*)
8. $\Box\neg\neg A \rightarrow \Box A$	7., (K)
9. $\neg\Box\Diamond\neg A \rightarrow \Box A$	5., 8., [2]
10. $A \rightarrow \neg\neg A$	[7]
11. $\Box(A \rightarrow \neg\neg A)$	10., (*nec*)
12. $\Box A \rightarrow \Box\neg\neg A$	11., (K)
13. $\neg\Box\neg\neg A \rightarrow \neg\Box A$	12., [8]
14. $\Diamond\neg A \rightarrow \neg\Box A$	13., definice $\Diamond$
15. $\Box(\Diamond\neg A \rightarrow \neg\Box A)$	14., (*nec*)
16. $\Box\Diamond\neg A \rightarrow \Box\neg\Box A$	15., (K)
17. $\neg\Box\neg\Box A \rightarrow \neg\Box\Diamond\neg A$	16., [8]
18. $\Diamond\Box A \rightarrow \neg\Box\Diamond\neg A$	17., definice $\Diamond$
19. $\Diamond\Box A \rightarrow \Box A$	18., 9., [2]
20. $\Box(\Diamond\Box A \rightarrow \Box A)$	19., (*nec*)
21. $\Box\Diamond\Box A \rightarrow \Box\Box A$	20., (K)
22. $\Box A \rightarrow \Box\Diamond\Box A$	(B)
23. $\Box A \rightarrow \Box\Box A$	22., 21., [2]

To znamená, že S5 můžeme ekvivalentně axiomatizovat i tak, že k axiomům a odvozovacímu pravidlu KVP přidáme (K), (T), (S5) a (*nec*). Další alternativní axiomatizace vznikne, nahradíme-li v původní axiomatizaci axiom (S5) výše uvedeným výrokem (B) (takže vedle axiomů a odvozovacího pravidla KVP máme (K), (T), (S4), (B) a (*nec*)). K tomu, abychom dokázali, že i toto je axiomatizace S5, zřejmě stačí ukázat, že je v ní dokazatelný výrok (S5):

1. $\Box\neg A\rightarrow\Box\Box\neg A$	(S4)
2. $\neg\Box\Box\neg A\rightarrow\neg\Box\neg A$	1., [8]
3. $\Box\neg A\rightarrow\neg\neg\Box\neg A$	[7]
4. $\Box(\Box\neg A\rightarrow\neg\neg\Box\neg A)$	3., (*nec*)
5. $\Box\Box\neg A\rightarrow\Box\neg\neg\Box\neg A$	4., (K)
6. $\neg\Box\neg\neg\Box\neg A\rightarrow\neg\Box\Box\neg A$	5., [8]
7. $\neg\Box\neg\neg\Box\neg A\rightarrow\neg\Box\neg A$	6., 2., [2]
8. $\Diamond\Diamond A\rightarrow\Diamond A$	7., definice $\Diamond$
9. $\Box(\Diamond\Diamond A\rightarrow\Diamond A)$	8., (*nec*)
10. $\Box\Diamond\Diamond A\rightarrow\Box\Diamond A$	9., (K)
11. $\Diamond A\rightarrow\Box\Diamond\Diamond A$	(B)
12. $\Diamond A\rightarrow\Box\Diamond A$	11., 10., [2]

4.6 Kripkovská sémantika a modální výrokový počet K

Je ovšem možné uvažovat i o obecnější sémantice nutnosti. Zdá se, že v některých možných smyslech slova ‚nutnost' může být něco nutné v jednom možném světě, aniž by to bylo nutné v nějakém jiném. (Toto například rozhodně platí pro ten druh nutnosti, který se obvykle označuje jako *fyzikální nutnost*: například to, že je předmět přitahován k zemi určitou silou, je fyzikálně nutné v našem světě, nemusí to však být fyzikálně nutné ve světě, kde platí jiné fyzikální zákony.) Z tohoto hlediska se ovšem může zdát výše uvedená sémantika pro S5 příliš úzká.

Kripke (1963a; 1963b) proto navrhl sémantickou interpretaci obecnější[32]. Zakládá se na tom, že máme nejenom množinu možných světů (které opět

[32] Srozumitelné úvody do kripkovských sémantik a do modálních logik vůbec předkládají například Popkorn (1992) či Girle (2000).

říkáme *univerzum* této interpretace), ale navíc binární relaci na této množině. Této relaci se říká *relace dosažitelnosti* a spojuje daný možný svět se všemi těmi světy, které je třeba brát v úvahu, když uvažujeme o nutnosti a možnosti *v tomto světě*. (Tak v případě, kdy by nám šlo o fyzickou nutnost, bychom za ‚dosažitelné' z daného světa prohlásili právě všechny možné světy, kde platí stejné fyzikální zákony.) Univerzum doplněné o takovouto relaci dosažitelnosti budeme nazývat (*modálním*) *rámcem*.

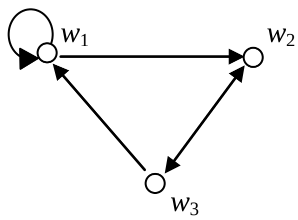
Označíme-li relaci dosažitelnosti písmenem R, mění se pak klauzule (i.ii) definice sémantiky pro S5 na

(i.ii) necesitaci $\Box A$ výroku A je přiřazena množina všech takových světů, ze kterých jsou dosažitelné jenom světy, ve kterých platí A,
tj. $\|\Box A\| = \{w \mid w' \in \|A\|$ pro každý w' takový, že $w\mathrm{R}w'$ $\}$;

či vyjádřeno jinak

(i.ii′) $\Box A$ je ve w pravdivý, právě když je pravdivý v každém světě dosažitelném z w.

Například je-li, tak jako na následujícím obrázku, univerzum tvořeno možnými světy w_1, w_2 a w_3 tak, že z w_1 jsou dosažitelné w_1 a w_2, z w_2 je dosažitelný w_3 a z w_3 jsou dosažitelné w_1 a w_2, a je-li A pravdivý ve w_1 a ve w_2, ale nikoli ve w_3, bude $\Box A$ pravdivý ve w_1 a w_3, ale nikoli ve w_2 – z w_2 je totiž dosažitelný svět, ve kterém není pravdivý A, totiž w_3.



O výroku pak řekneme, že je *platný při dané interpretaci*, jestliže mu tato interpretace přiřazuje celé univerzum (to jest je pravdivý v každém možném světě tohoto univerza). Řekneme, že je *platný v daném rámci*, jestliže je platný při každé interpretaci v tomto rámci. Definice pojmů tautologie a lokálního i globálního vyplývání zůstávají stejné jako u S5. (Tautologičnost bychom ovšem nyní mohli alternativně definovat i jako platnost v každém rámci.)

Výrokový počet, který touto definicí sémantiky dostaneme, budeme označovat jako MVP-K nebo prostě K. (Všimněme si, že sémantika MVP-S5, kterým jsme se zabývali v předchozím oddíle, by byla z tohoto hlediska nahlédnutelná jako speciální případ naší současné sémantiky, při které je každý svět vždy dosažitelný z každého jiného.) Axiomatika tohoto MVP je tvořena axiomy a odvozovacím pravidlem KVP plus následujícím axiomem a pravidlem:

(K) $\Box(A\rightarrow B)\rightarrow(\Box A\rightarrow\Box B)$,

(*nec*) A / $\Box A$.

4.7 Úplnost

Snadno se přesvědčíme o tom, že je-li A odvoditelný z $A_1,\ldots, A_n$, pak z nich globálně vyplývá – K je tedy silně korektní (vzhledem ke globálnímu vyplývání). Dokázat silnou úplnost tak triviální není; lze to však provést prostřednictvím konstrukce charakteristického modelu – tak jak jsme to udělali v důkaze věty o rozšíření v oddíle 4.3 pro alternativní sémantiku KVP.

Než to provedeme, definujme ještě slabší formu odvoditelnosti; půjde v podstatě o odvoditelnost bez použití pravidla necesitace. Řekneme, že A je *klasicky odvoditelný* z $A_1, \ldots, A_n$, je-li výrok $(A_1\rightarrow(\ldots(A_n\rightarrow A)\ldots))$ teorémem K. (A je tedy klasicky odvoditelný z prázdné množiny právě tehdy, když je teorémem K, to jest A je klasickým teorémem právě tehdy, když je teorémem. A je klasicky odvoditelný z nekonečné množiny, je-li klasicky odvoditelný z nějaké její podmnožiny.) Rozdíl mezi odvoditelností a klasickou odvoditelností lze ilustrovat pomocí faktu, že zatímco výrok $\Box A$ je *odvoditelný* z výroku A (pomocí pravidla (*nec*)), *klasicky odvoditelný* z něj není.

Tato definice přímo zaručuje, že pro klasické odvozování platí věta o dedukci. V důsledku toho můžeme pro *klasickou* odvoditelnost v rámci K dokázat obdobu věty, kterou jsme výše (na str. 101) formulovali pro KVP. Dokážeme však mírně modifikované tvrzení. Nazvěme množinu výroků jazyka MVP *klasicky konzistentní teorií*, patří-li do ní každý výrok, který je z ní klasicky odvoditelný, a není-li z ní klasicky odvoditelný žádný výrok spolu se svou negací. Pak

Platí: Jestliže A není v K odvoditelný z X, pak existuje maximální klasicky konzistentní teorie (*mkk-teorie*), která obsahuje vše, co je odvoditelné (nikoli jenom klasicky, to jest i s použitím necesitace) z X, ale neobsahuje A.

Důkaz: Buď X^* množina všech výroků, které jsou odvoditelné z X. Není-li A odvoditelný z X, pak jistě není odvoditelný ani z X^*, a X^* je tedy konzistentní, a tím spíše klasicky konzistentní. Pomocí konstrukce popsané ve větě o rozšíření (uvedené na straně 102) ji tedy lze rozšířit na klasicky konzistentní teorii, která neobsahuje A. Navíc protože pro klasické odvozování platí věta o dedukci a protože [11] je teorémem K, lze způsobem analogickým důkazu věty na str. 103 ukázat, že je to *maximální* klasicky konzistentní teorie.

Všimněme si, že fakt, že pro K platí odboba věty na str. 101, znamená, že pro K platí i obdoby všech jejích důsledků na str. 102 a 103. Takže mj.

Platí: A je v K klasicky odvoditelný z X právě tehdy, když je obsažen v každé mkk-teorii, která obsahuje X.

Nyní jsme připraveni dokázat silnou úplnost K – avšak namísto toho, abychom dokázali přímo, že cokoli globálně vyplývá, je odvoditelné, dokážeme tvrzení, které je tomuto zřejmě ekvivalentní, totiž že cokoli není odvoditelné, globálně nevyplývá.

Platí: Není-li výrok A odvoditelný z množiny výroků X, pak z ní globálně nevyplývá, to jest existuje interpretace jazyka K, při které jsou všechny prvky X pravdivé ve všech možných světech, ale A v některém ne.

Důkaz: Buď W množina všech maximálních klasicky konzistentních rozšíření množiny X^* všech výroků, které jsou odvoditelné z X. Definujme na W binární relaci R následujícím předpisem:

$$w \mathrm{R} w' \equiv_{\mathrm{Def.}} \{C \mid \Box C \in w\} \subseteq w'$$

Nechť výrok platí ve w právě tehdy, když je jeho prvkem. Pak zřejmě všechny výroky, které patří do X^*, platí ve všech prvcích W a A alespoň v jednom neplatí (v důsledku toho, co jsme ukázali výše). Abychom dokázali, že jsme zkonstruovali požadovaný model, stačí nyní dokázat, že pro každé B a pro každé $w \in W$

$\Box B \in w$ právě tehdy, když pro každé w' takové, že $w \mathrm{R} w'$, platí $B \in w'$

Přímá implikace je zřejmá; takže stačí dokázat nepřímou. Nechť tedy pro každý w' takový, že w R w', platí $B \in w'$

To znamená, že

pro každý w' takový, že $\{C \mid \Box C \in w\} \subseteq w'$, platí $B \in w'$

Jinými slovy

každá mkk-teorie, která obsahuje X^* a $\{C \mid \Box C \in w\}$, obsahuje i B.

To ale, jak jsme ukázali výše, je totéž jako

B je klasicky odvoditelný z X^* a $\{C \mid \Box C \in w\}$

a tedy totéž jako

existují $D_1,...,D_m$ z X^* a $C_1,...,C_n$ z $\{C \mid \Box C \in w\}$ tak, že z $D_1,...,D_m$, $C_1,...,C_n$ je klasicky odvoditelný B.

Podle definice klasické odvoditelnosti toto znamená, že

$(D_1 \rightarrow (...(D_m \rightarrow (C_1 \rightarrow (...(C_n \rightarrow B)...)))...))$ je teorémem K;

a z toho s použitím pravidla (*nec*) plyne, že

$\Box(D_1 \rightarrow (...(D_m \rightarrow (C_1 \rightarrow (...(C_n \rightarrow B)...)))...))$ je teorémem K,

a z toho zase opakovaným použitím axiomu (K) plyne, že

$(\Box D_1 \rightarrow (...(\Box D_m \rightarrow (\Box C_1 \rightarrow (...(\Box C_n \rightarrow \Box B)...)))...))$ je teorémem K.

To ale podle definice klasické odvoditelnosti znamená, že

$\Box B$ je klasicky odvoditelný z $\Box D_1,\dots, \Box D_m$, $\Box C_1,...,\Box C_n$

Přitom $\Box D_1,...,\Box D_m$ patří do X^* (protože X^* je uzavřená na necesitaci), a tudíž do w' a $\Box C_1,...,\Box C_m$ patří do w'. To znamená, že do w' patří i $\Box B$.

K je tedy silně korektní a úplný, to jest A je odvoditelný z X právě tehdy, když z ní globálně vyplývá.

Vedlejším produktem tohoto důkazu je důkaz existence charakteristického modelu, to jest takové interpretace, při které je výrok pravdivý právě tehdy, když je teorémem. Z právě dokázané věty totiž plyne, že není-li výrok A teorémem, pak existuje interpretace jazyka K, při které je tento výrok nepravdivý – stačí vzít za X prázdnou množinu. Přitom interpretace, kterou v rámci tohoto důkazu konstruujeme, je tatáž pro jakýkoli výrok A – tato interpretace tedy přiřazuje N všem výrokům, které nejsou teorémy, a je tedy charakteristickým modelem. Charakteristickým modelem je tudíž interpretace, jejíž univerzum je tvořeno všemi mkk-teoriemi a svět w' je na něm dosažitelný ze světa w právě tehdy, když $\{C \mid \Box C \in w\} \subseteq w'$.

Dalším, přímým důsledkem silné úplnosti je kompaktnost K:

Platí tedy i: K je kompaktní, to jest výrok A vyplývá z množiny výroků X právě tehdy, když vyplývá z nějaké její konečné podmnožiny.

Důkaz: Dokázali jsme, že A vyplývá z X právě tehdy, když je z ní odvoditelný; a odvoditelný z nekonečné množiny je zřejmě právě tehdy, když je odvoditelný z nějaké její konečné podmnožiny.

Je zřejmé, že neomezíme-li se na klasickou odvoditelnost, pak v K věta o dedukci neplatí: podle pravidla (*nec*) je $\Box A$ je odvoditelný z A pro každé A, ale $A \to \Box A$ obecně teorémem není[33].

Analogicky, jako jsme dokázali, že se globální vyplývání kryje s odvoditelností, lze nyní dokázat to, že se lokální vyplývání kryje s klasickou odvoditelností. Prověření toho, že je-li A klasicky odvoditelný z $A_1, \ldots, A_n$, pak z nich

[33] Podobně jako například v případě FVP-Ł ovšem pro MVP-K platí něco, co se větě o dedukci v jistém smyslu blíží: totiž výrok B je odvoditelný z množiny $X \cup \{A\}$ právě tehdy, když existuje m takové, že z X je odvoditelný výrok $(A \wedge \Box A \wedge \Box\Box A \wedge \ldots \wedge \Box^m A) \to B$ (kde $\Box^m$ značí řetězec m operátorů $\Box$). V rámci některých logik, které budeme zavádět dále, můžeme výrok $(A \wedge \Box A \wedge \Box\Box A \wedge \ldots \wedge \Box^m A) \to B$ zjednodušovat: tak v rámci logiky MVP-T ho můžeme zjednodušit na $\Box^m A \to B$ (protože $\Box^m A$ implikuje $\Box^{m-1} A$, a tudíž $\Box^j A$ pro každé $j \leq m$); a v rámci MVP-S4 pak dále na $\Box A \to B$ (protože $\Box A$ implikuje $\Box^j A$ pro jakékoli $j \geq 1$).

lokálně vyplývá, je opět rutinní záležitostí, takže znovu dokážeme jenom obrácenou implikaci.

Platí: Není-li výrok A klasicky odvoditelný z množiny výroků X, pak z ní lokálně nevyplývá.

Důkaz: Musíme ukázat, že pro každou množinu X a každý výrok A takový, že A není klasicky odvoditelný z X, existuje interpretace a svět v jejím univerzu tak, že jsou v tomto světě pravdivé všechny prvky X, avšak nikoli A. Takovou interpretaci vytvoříme tak, že za její univerzum vezmeme všechny mkk-teorie (to jest množiny výroků, které obsahují všechny výroky, které jsou z nich *klasicky* odvoditelné, ze kterých není *klasicky* odvoditelný žádný výrok spolu se svou negací a které obsahují negaci každého výroku, který neobsahují) a relaci dosažitelnosti na tomto univerzu definujeme tak jako v předchozím případě předpisem

$$w \mathrm{R}\, w' \equiv_{\mathrm{Def.}} \{C \mid \Box C \in w\} \subseteq w'.$$

Opět musíme dokázat, že je tato definice definicí skutečné interpretace, to jest že $\Box B \in w$ právě tehdy, když $B \in w'$ pro každý w' takový, že $w \mathrm{R}\, w'$.

Je zřejmé, že

$$B \in w' \text{ pro každý } w' \text{ takový, že } w \mathrm{R}\, w'$$

platí právě tehdy, když

B je klasicky odvoditelný z výroků $B_1,\ldots, B_n$, které jsou všechny prvky $\{C \mid \Box C \in w\}$.

Způsobem, který byl podrobně předveden v přechozím důkazu, lze ukázat, že pak

$\Box B$ je klasicky odvoditelný z $\Box B_1,\ldots, \Box B_n$, kde $\{B_1,\ldots, B_n\} \subseteq \{C \mid \Box C \in w\}$,

a tedy že

$\Box B$ je klasicky odvoditelný z w.

A protože w je teorie (vzhledem ke klasické odvoditelnosti),

$$\Box B \in w.$$

Opět jsme tedy definovali skutečnou interpretaci. Přitom v jejím univerzu zřejmě existuje svět, ve kterém jsou pravdivé všechny prvky *X*, avšak nikoli *A*: již dobře známým způsobem totiž umíme zkonstruovat maximální klasicky axiomaticky konzistentní teorii, která obsahuje *X*, avšak jejím prvkem není *A*.

4.8 Rozhodnutelnost

Jak bychom dokázali rozhodnout, zda je daný výrok v K platný, tj. zda je teorémem? Víme, že je platný právě tehdy, když je pravdivý v charakteristickém modelu K; ale charakteristický model má nekonečný počet světů, takže je nemůžeme všechny prostě projít.

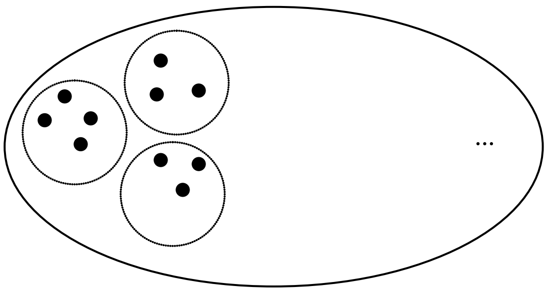
U KVP byla ovšem situace analogická: měli jsme nekonečný počet interpretací a také jsme je nemohli všechny projít, abychom zjistili, zda je při nich daný výrok pravdivý, a zda je tedy tautologií. Přesto jsme rozhodovací proceduru našli – využili jsme toho, že pravdivost daného výroku při dané interpretaci závisí jenom na tom, jaké pravdivostní hodnoty tato interpretace přiřazuje atomickým podvýrokům tohoto výroku, takže není potřeba rozlišovat mezi interpretacemi, které se pro tyto atomické výroky shodují. Tím jsme *de facto* redukovali nekonečnou množinu interpretací na konečnou množinu skupin těchto interpretací.

Něco podobného můžeme udělat i v případě K. V univerzu našeho charakteristického modelu se totiž opět některé možné světy liší způsobem, který není z hlediska zkoumaného výroku relevantní, a my mezi takovými možnými světy nemusíme rozlišovat. Je-li *A* výrok, nazvěme dva světy charakteristického modelu *A*-ekvivalentní, jestliže v nich mají všechny podvýroky *A* (včetně *A* samotného) totožné pravdivostní hodnoty. Je zřejmé, že je-li n počet podvýroků *A*, rozdělí nám *A*-ekvivalence univerzum charakteristického modelu do nejvýše 2^n ekvivalenčních tříd, a prvky každé z těchto tříd nám z hlediska *A* splývají vždy v jediný svět. Pokud by se nám podařilo ukázat, že *A* platí v charakteristickém modelu právě tehdy, když platí v nějaké jeho mutaci s takto redukovaným univerzem obsahujícím jenom 2^n světů, měli bychom vyhráno – ke zjištění platnosti *A* by nám stačilo otestovat jeho pravdivost v *konečném* počtu světů.

Platí: Lze rozhodnout, zda je daný výrok *A* MVP-K tautologií (a tedy teorémem).

Důkaz: Vezměme univerzum tvořené *A*-ekvivalenčními třídami světů univerza charakteristického modelu K (to jest třídami světů, které jsou nerozlišitelné z hlediska *A* i všech jeho podvýroků) a přiřaďme každému podvýroku *A* množinu těch světů tohoto nového, redukovaného univerza, ve kterých je tento podvýrok pravdivý (to jest je pravdivý v těch světech původního univerza, ze kterých se tyto nové světy skládají). Je zřejmé, že toto přiřazení přiřazuje výroku *A* celé univerzum právě tehdy, když mu je celé univerzum přiřazováno původním, charakteristickým modelem, a tedy když je tautologií.

Pokud by tedy bylo přiřazení množin světů našeho redukovaného univerza podvýrokům *A*, které jsme právě definovali, rozšiřitelné na interpretaci, měli bychom interpretaci s univerzem tvořeným 2^n světy, která by *A* přiřazovala celé univerzum právě tehdy, když je tautologií, a k tomu, abychom rozhodli, zda je *A* tautologií, by stačilo projít všechny interpretace s 2^n-prvkovými univerzy. Jde tedy o to ukázat, že lze definovat relaci dosažitelnosti, která by spolu s naším přiřazením množin světů podvýrokům *A* a spolu s nějakým přiřazením množin světů ostatním výrokům tvořila interpretaci. Definujme tuto relaci tak, že ekvivalenční třída W' světů je dosažitelná z jiné ekvivalenční třídy W právě tehdy, obsahuje-li W' alespoň jeden svět, který je v původním charakteristickém modelu dosažitelný z nějakého světa obsaženého ve W. (Tato nová relace se v literatuře obvykle nazývá *filtrací* té původní.) Vztah mezi univerzem původního charakteristického modelu a jeho redukovanou verzí si tedy můžeme znázornit následujícím způsobem



Světy toho původního jsou vyznačeny jako černé kroužky, zatímco světy toho redukovaného (které jsou jejich množinami) jsou vymezeny tečkovaně. Pro ty první používáme malá písmena w, w', ...; pro ty druhé písmena velká: W, W', ...

Potřebujeme nyní dokázat, že přiřadíme-li každému podvýroku *A* množinu všech těch světů redukovaného univerza, ve kterých je pravdivý (tedy které jsou tvořeny takovými světy charakteristického modelu, ve kterých je pravdivý), budeme moci přiřadit podmnožiny tohoto univerza všem ostatním výrokům a definovat relaci dosažitelnosti tak, aby bylo toto přiřazení interpretací. Definujme

$W \mathrm{R}^* W' \equiv_{\mathrm{Def}}$ existují w a w' tak, že $w \in W$, $w' \in W'$ a $w \mathrm{R} w'$.

Je zřejmé, že výrokům, které nejsou podvýroky *A*, můžeme přiřadit podmnožiny univerza tak, aby byly splněny klauzule (i.i)–(ii.iii) definice interpretace (atomickým výrokům totiž můžeme tyto množiny přiřadit zcela libovolně a ostatním pak tyto množiny přiřadíme právě podle (i.i)–(ii.iii)). I v případě podvýroků *A* není žádný problém s klauzulemi (i.i) a (ii.i)–(ii.iii); potřebujeme tedy dokázat jenom to, že bude platit i (i.ii), to jest že pro každý podvýrok *A* tvaru □*B* bude platit

$\|\Box B\| = \{W \mid W' \in \|B\|$ pro každý W' takový, že $W\,\mathrm{R}^*\,W'\}$.

Jinými slovy, musíme ukázat, že □ *B* bude ve světě *W* pravdivý právě tehdy, když bude *B* pravdivý v každém světě, který je z něj dosažitelný.

Problém je v tom, že □*B* by měl současně být ve *W* pravdivý právě tehdy, když je pravdivý v každém *w* takovém, že $w \in W$, to jest

$\|\Box B\| = \{W \mid \Box B$ platí v každém w takovém, že $w \in W\}$,

takže co musíme ukázat, je, že množina $\{W \mid \Box B$ platí v každém w takovém, že $w \in W\}$ je totožná s množinou $\{W \mid W' \in \|B\|$ pro každý W' takový, že $W\,\mathrm{R}^*\,W'\}$ (čili že □ *B* je při původním charakteristickém modelu pravdivý v kterémkoli $w \in W$ právě tehdy, když je při naší nové interpretaci s redukovaným univerzem pravdivý v každém světě dosažitelném z *W*). Předpokládejme tedy, že

□*B* je při charakteristickém modelu pravdivý v každém světě patřícím do ekvivalenční třídy *W*.

Z definice sémantiky operátoru nutnosti plyne, že tento případ nastává, právě když

B je pravdivý v každém světě *w′* univerza charakteristického modelu takovém, že $w\,\mathrm{R}\,w'$ pro nějaký svět $w \in W$.

Protože je však *B* pravdivý ve světě *w′* charakteristického modelu právě tehdy, když je pravdivý v tom světě *W′* redukovaného modelu, do kterého *w′* patří, můžeme toto dále ekvivalentně přepsat jako

B je pravdivý v každém světě *W′* redukovaného modelu takovém, že $w\,\mathrm{R}\,w'$ pro nějaký svět $w \in W$ a nějaký svět $w' \in W'$.

Z naší definice relace dosažitelnosti R^* však vyplývá, že toto nastává právě tehdy, když

B je pravdivý v každém světě *W′* redukovaného univerza takovém, že $W\,\mathrm{R}^*\,W'$;

a to je to, co bylo třeba dokázat.

5 Další variace na modální logiku

5.1 Modální výrokové počty T, B a S4

Uvažme nyní modální výrokový počet, který vznikne z K přidáním axiomu

(T) $\Box A \to A$.

Výsledné logice budeme říkat MVP-T nebo prostě T (původně byla formulována Feysem, 1937; 1938, a potom v trochu jiné podobě von Wrightem, 1951). Tento modální výrokový počet je obvykle považován za minimální modální logiku, kterou lze brát za skutečnou logiku *nutnosti* (a *možnosti*). (To, že platí-li něco nutně, pak to platí, se totiž, jak už jsme poznamenali, jeví být zcela základní a nevyhnutelnou charakteristikou nutnosti.) Jaká sémantika by k této axiomatice pasovala?

Protože T vznikl rozšířením K, je každý teorém K (a tedy i každá tautologie K) teorémem T; existují ale i teorémy T, které nejsou teorémy K (sám axiom (T) a teorémy, které přibyly v důsledku jeho ustanovení) a pro které tedy existuje nějaká interpretace K, při které neplatí. Vhodnou sémantiku pro T bychom tedy snad mohli dostat tak, že bychom ze sémantiky K odstranili právě všechny takovéto interpretace. Otázkou ovšem je, je-li možné najít nějaké kritérium, které nám dovolí tyto interpretace z množiny interpretací K oddělit.

Ukazuje se, že ano. Jaké povahy musí být kripkovská interpretace, aby v ní platil axiom (T)? Podívejme se, co tento axiom říká z hlediska sémantiky. $\Box A$ říká, že A platí ve všech dosažitelných světech – to znamená, že axiom (T) říká, že z pravdivosti ve všech světech dosažitelných z w musí plynout pravdivost ve w. Snadno nahlédneme, že toto může být zcela obecně zaručeno jenom tehdy, když bude w sám vždy mezi těmi, které jsou z w dosažitelné, to jest když bude každý svět vždy dosažitelný sám ze sebe.

Sémantika T je tedy dána všemi kripkovskými interpretacemi jazyka MVP, které mají tu vlastnost, že pro každý w platí, že $w \mathrm{R} w$; to jest jejichž relace dosažitelnosti jsou *reflexivní*. Schematicky si takovou vlastnost relace dosažitelnosti můžeme znázornit pomocí dvou obrázků: na prvním bude nějaká konfigurace světů a šipek dosažitelnosti mezi nimi (v případě reflexivity to ovšem bude bude pouze jediný svět bez jakékoli šipky), na druhém tatáž konfigurace doplněná o šipky, které musí být přítomny, má-li mít relace tu vlastnost, o kterou jde:

Reflexivita tedy podle tohoto obrázku znamená, že kdykoli je přítomen svět, musí být přítomna i šipka spojující jej s ním samým – jinými slovy kdykoli je každý svět šipkou dosažitelnosti spojen sám se sebou.

Korektnost T vzhledem k této sémantice je zřejmá. Její úplnost se dokáže tak, že postupem analogickým tomu, který jsme používali v předchozí kapitole, zkonstruujeme charakteristický model T a přesvědčíme se, že je v něm R reflexivní – z toho plyne, že pro každý výrok T, který není teorémem, existuje kripkovská interpretace s reflexivní R, ve které tento výrok neplatí. Analogicky se ukáže i jeho silná korektnost a úplnost, kompaktnost a rozhodnutelnost.

Proč bude R v charakteristickém modelu T reflexivní? Připomeňme, že R je v tomto modelu dána následující definicí:

$$w\mathrm{R}w' \equiv_{\mathrm{Def}} \{A \mid \Box A \in w\} \subseteq w'.$$

Avšak protože každá mk-teorie v rámci T, která obsahuje $\Box A$, obsahuje i A, musí každá taková teorie obsahovat všechny výroky, jejichž necesitace obsahuje, tedy pro každý w musí platit

$$\{A \mid \Box A \in w\} \subseteq w.$$

Podle výše uvedené definice však toto znamená, že

$$w\mathrm{R}w.$$

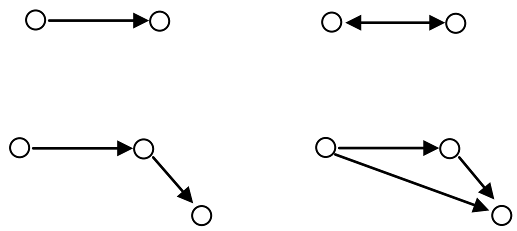
Definujme nyní další dva modální výrokové počty, každý z nich jako rozšíření T. MVP-B vznikne z T přidáním axiomu

(B) $A \to \Box\Diamond A$;

zatímco MVP-S4 vznikne, přidá-li se k T axiom

(S4) $\Box A \to \Box\Box A$.

Sémantik pro tyto logiky se můžeme dobrat nám již dobře známým postupem; výsledkem je, že MVP-B je korektní a úplný vzhledem k množině všech kripkovských interpretací, v nichž je R nejen reflexivní, ale i *symetrická* (tj. pro každé dva světy *w* a *w′* platí, že jestliže *w*R*w′*, pak i *w′*R*w*), zatímco S4 je korektní a úplný vzhledem k množině všech kripkovských interpretací, v nichž je R nejen reflexivní, ale i *tranzitivní* (tj. pro každé tři světy *w*, *w′* a *w″* platí, že jestliže *w*R*w′* a *w′*R*w″*, pak i *w*R*w″*). První z těchto vlastností znázorňuje první z následujících diagramů, druhou ten druhý:



Nyní si uvědomme, že MVP-S5, který jsme probírali v předchozí kapitole, vznikne kombinací těchto dvou rozšíření – to jest vznikne tak, že k T přidáme jak axiom (B), tak axiom (S4). Z toho také vyplývá, že S5 je korektní a úplný vzhledem k množině všech kripkovských interpretací, v nichž je R reflexivní, symetrická i tranzitivní – to jest je *ekvivalencí*.

Teď jsme ale zřejmě dospěli k *jiné* sémantice, než jakou jsme pro S5 definovali v předchozí kapitole. Tam jsme se totiž obešli zcela bez relace dosažitelnosti – což ale bylo z naší současné perspektivy zřejmě totéž, jako kdybychom brali každý svět za dosažitelný z každého jiného. Lze tedy říci, že v minulé kapitole jsme sémantiku S5 definovali jako třídu všech interpretací, v nichž je R *univerzální* (to jest *w*R*w′* platí pro *každé* dva světy *w* a *w′*), zatímco teď jsme dospěli k tomu, že S5 je korektní a úplný vzhledem ke třídě všech interpretací, v nichž je R ekvivalencí.

Snadno se ovšem nahlédne, že korektnost a úplnost vzhledem k oběma těmto třídám interpretací splývá. Z jedné strany je to zřejmé: každá univerzální relace je ekvivalencí, a tudíž z platnosti při každé interpretaci s relací dosažitelnosti, která je ekvivalencí, plyne platnost při každé interpretaci, jejíž relace dosažitelnosti je univerzální. Z druhé strany nám ale ekvivalence definuje rozdělení univerza do souboru vzájemně nedosažitelných ekvivalenčních tříd světů, z nichž každou lze vzít za univerzum nějaké interpretace, jejíž relace dosažitelnosti bude univerzální; přičemž platnost při té původní, ‚ekvivalenční‘, bude splývat s platností při všech těch nových, ‚univerzálních‘. Takže z platnosti při každé univerzální interpretaci plyne platnost při každé ekvivalenční interpretaci.

Snadno také nahlédneme, že T, B, S4 i S5 jsou rozhodnutelné: v jejich případě zřejmě stačí rozhodovací proceduru, kterou jsme předvedli pro K, modifikovat tak, že se uvažují pouze interpretace s relací dosažitelnosti, která má potřebnou vlastnost (tj. je reflexivní, symetrická ap.). Vezměme například T. Snadno se ověří, že relace dosažitelnosti, definovaná způsobem uvedeným v oddíle 0 na redukovaném univerzu charakteristického modelu T, bude reflexivní – to znamená, že výsledná interpretace bude interpretací T. Z toho vyplývá, že k tomu, abychom zjistili, zda je daný výrok teorémem T, stačí projít všechny interpretace T s univerzy obsahujícími nejvýše 2^n prvků – mezi nimi se totiž nachází ta, kterou vyrobíme redukcí charakteristického modelu a ve které tedy tento výrok, pokud není tautologií, neplatí. A podobně je to s ostatními uvažovanými modálními výrokovými počty.

5.2 Některé teorémy MVP

Abychom předvedli axiomatiku modálních výrokových počtů ‚v akci‘, dokažme několik teorémů. V K, a tudíž v každém modálním výrokovém počtu například platí, že $\square(A\wedge B)$ je ekvivalentní $\square A\wedge\square B$. Abychom to ukázali, dokažme nejprve

$\square(A\wedge B)\rightarrow(\square A\wedge\square B)$:

1. $(A\wedge B)\rightarrow A$	(3)
2. $\square((A\wedge B)\rightarrow A)$	1., (*nec*)
3. $\square(A\wedge B)\rightarrow\square A$	2., (K)
4. $(A\wedge B)\rightarrow B$	(4)
5. $\square((A\wedge B)\rightarrow B)$	4., (*nec*)
6. $\square(A\wedge B)\rightarrow\square B$	5., (K)
7. $\square A\rightarrow(\square B\rightarrow(\square A\wedge\square B))$	(5)
8. $\square(A\wedge B)\rightarrow(\square B\rightarrow(\square A\wedge\square B))$	3., 7., [2]
9. $\square B\rightarrow(\square(A\wedge B)\rightarrow(\square A\wedge\square B))$	8., [3]
10. $\square(A\wedge B)\rightarrow(\square(A\wedge B)\rightarrow(\square A\wedge\square B))$	6., 9., [2]
11. $\square(A\wedge B)\rightarrow(\square A\wedge\square B)$	10., [4]

Nyní dokážeme obrácenou implikaci,

$(\Box A \wedge \Box B) \rightarrow \Box(A \wedge B)$:

1. $A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$	(5)
2. $\Box(A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B)))$	1., (*nec*)
3. $\Box A \rightarrow \Box(B \rightarrow (A \wedge B))$	2., (K)
4. $\Box(B \rightarrow (A \wedge B)) \rightarrow (\Box B \rightarrow \Box(A \wedge B))$	(K)
5. $\Box A \rightarrow (\Box B \rightarrow \Box(A \wedge B))$	3., 4., [2]
6. $(\Box A \wedge \Box B) \rightarrow \Box A$	(3)
7. $(\Box A \wedge \Box B) \rightarrow (\Box B \rightarrow \Box(A \wedge B))$	6., 5., [2]
8. $\Box B \rightarrow ((\Box A \wedge \Box B) \rightarrow \Box(A \wedge B))$	7., [3]
9. $(\Box A \wedge \Box B) \rightarrow \Box B$	(4)
10. $(\Box A \wedge \Box B) \rightarrow ((\Box A \wedge \Box B) \rightarrow \Box(A \wedge B))$	9., 8., [2]
11. $(\Box A \wedge \Box B) \rightarrow \Box(A \wedge B)$	10., [4]

V K neplatí, že A implikuje $\Diamond A$. To platí až v T:

1. $\Box\neg A \rightarrow \neg A$	(T)
2. $\neg\neg A \rightarrow \neg\Box\neg A$	1., [8]
3. $A \rightarrow \neg\neg A$	[7]
4. $A \rightarrow \neg\Box\neg A$	3., 2., [2]
5. $A \rightarrow \Diamond A$	4., definice $\Diamond$

Další z výroků, který dokážeme,

$\Box(A \rightarrow B) \rightarrow \Box(\Box A \rightarrow \Box B)$,

není teorémem T, je však dokazatelný v S4:

1. $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$	(K)
2. $\Box(\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B))$	1., (*nec*)
3. $\Box\Box(A \rightarrow B) \rightarrow \Box(\Box A \rightarrow \Box B)$	2., (K)
4. $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow \Box\Box(A \rightarrow B)$	(S4)
5. $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow \Box(\Box A \rightarrow \Box B)$	4., 3., [2]

Příklady výroků, které nejsou teorémy S4, jsou však dokazatelné v S5, jsme viděli v oddíle 4.5.

5.3 Korespondenční teorie

Viděli jsme, že pro každý z axiomů MVP, o kterých jsme dosud uvažovali, existuje nějaká jednoduchá vlastnost relace dosažitelnosti, která tomuto axiomu odpovídá: přijetí toho kterého axiomu je vždy totéž jako omezení se na interpretace, jejichž relace dosažitelnosti má příslušnou vlastnost. (Přesněji řečeno, axiom je v kterémkoli rámci platný právě tehdy, když má relace dosažitelnosti tohoto rámce odpovídající vlastnost.) Tak například axiomu (T), jak jsme viděli, odpovídá reflexivita, axiomu (B) symetričnost atd.

Existuje i celá řada dalších axiomů, kterým tímto způsobem odpovídají další vlastnosti relace dosažitelnosti. Uveďme přehled vybraných případů:

$\Box A\to A$	R je reflexivní, tj. pro každý w platí $w\mathrm{R}w$
$A\to\Box\Diamond A$	R je symetrická, tj. pro každé w a w' takové, že $w\mathrm{R}w'$, platí $w'\mathrm{R}w$
$\Box A\to\Box\Box A$	R je tranzitivní, tj. pro každé w, w' a w'' takové, že $w\mathrm{R}w'$ a $w'\mathrm{R}w''$, platí $w\mathrm{R}w''$
$\Diamond A\to\Box\Diamond A$	R je eukleidovská, tj. pro každé w, w' a w'' takové, že $w\mathrm{R}w'$ a $w\mathrm{R}w''$, platí $w'\mathrm{R}w''$
$\Box A\to\Diamond A$	R je totální, tj. pro každý w existuje w' tak, že $w\mathrm{R}w'$
$\Diamond A\to\Box A$	R je parciální funkce, tj. pro každé w, w' a w'' takové, že $w\mathrm{R}w'$ a $w\mathrm{R}w''$, platí $w'=w''$
$\Diamond A\leftrightarrow\Box A$	R je (totální) funkce, tj. pro každý w existuje právě jeden w' tak, že $w\mathrm{R}w'$
$\Box\Box A\to\Box A$	R je slabě hustá, tj. pro každé w a w' takové, že $w\mathrm{R}w'$, existuje w'' tak, že $w\mathrm{R}w''$ a $w''\mathrm{R}w'$
$\Diamond\Box A\to\Box\Diamond A$	R je slabě usměrněná, tj. pro každé w, w' a w'' takové, že $w\mathrm{R}w'$ a $w\mathrm{R}w''$, existuje w''' tak, že $w'\mathrm{R}w'''$ a $w''\mathrm{R}w'''$

Naskýtá se otázka, kam až tato ‚korespondence'[34] sahá: existují axiomy, pro které žádnou takovou vlastnost nelze artikulovat; či vlastnosti, které nelze takto axiomatizovat? To je samozřejmě otázka poněkud vágní a je možné ji zpřesňovat různými způsoby. Pro první část uvedené otázky se naskýtá zpřesnění vycházející z faktu, že všechny uvedené vlastnosti relací lze vyjádřit pomocí (relativně jednoduchých) výroků elementární klasické logiky. (Nikoli ovšem klasického *výrokového* počtu; je k tomu potřeba klasický *predikátový* počet, kterým se hodláme systematicky zabývat v pokračování této knihy – například tranzitivitu vyjádříme výrokem $\forall ww'w''((w\mathrm{R}w' \wedge w'\mathrm{R}w'') \rightarrow w\mathrm{R}w'')$.) Můžeme se tedy ptát, zda existují axiomy korespondující s vlastnostmi, které nelze vyjádřit v rámci elementární klasické logiky?

Odpověď na tuto otázku je, jak se ukazuje, pozitivní. Boolos (1979, s. 82) například ukázal, že takovým axiomem je

$\Box(\Box A \rightarrow A) \rightarrow \Box A$[35].

Jiným příkladem výroku, kterému neodpovídá žádná vlastnost relace dosažitelnosti vyjádřitelná v klasické logice, je[36]

$\Box\Diamond A \rightarrow \Diamond\Box A$.

---

[34] V literatuře se zde skutečně hovoří o *teorii korespondence* (*viz* např. Kracht, 1993). (Poznamenejme, že tento pojem *korespondence* nijak nesouvisí s pojmem, který stojí v základě tzv. *korespondenční teorie pravdy*, o které pojednává například Kolář, 1999.)

[35] Tento výrok totiž platí při kripkovské interpretaci právě tehdy, když je její relace dosažitelnosti R tranzitivní a současně neexistuje nekonečná posloupnost světů w_1, w_2 ... taková, že $w_i\mathrm{R}w_{i+1}$ pro i=1,2, ... Současně je faktem, že třídu takovýchto rámců není možné pomocí predikátového počtu prvního řádu charakterizovat. Důsledkem jeho kompaktnosti je totiž to, že platí-li nějaká jeho formule o každém rámci, ve které existuje libovolně dlouhá *konečná* posloupnost světů tohoto typu, pak musí platit i o rámci, ve kterém je tato posloupnost nekonečná. (Situaci si můžeme představit tak, že kompaktnost brání logice rozlišovat mezi neomezenou konečností a skutečnou nekonečností.) To znamená, že výrok klasického predikátového počtu, který by charakterizoval tu vlastnost relace dosažitelnosti, jež odpovídá $\Box(\Box A \rightarrow A) \rightarrow \Box A$, nemůže existovat.

[36] Důkaz *viz* Goldblatt (1975).

Z druhé strany se můžeme ptát, zda existuje nějaká vlastnost relace dosažitelnosti vyjádřitelná klasickou logikou, ke které by neexistoval žádný modální výrok, který by ji axiomatizoval. K odpovědi na tuto otázku bude zapotřebí dokázat pomocné tvrzení. Nejprve však definici.

Máme-li dvě interpretace MVP, $\|...\|_1$ a $\|...\|_2$, s univerzy U_1 a U_2 a s relacemi dosažitelnosti R_1 a R_2, pak zobrazení f z U_1 do U_2 nazveme *p-morfismem* $\|...\|_1$ *do* $\|...\|_2$[37], jestliže platí:

(i) jestliže w R_1 w', pak $f(w)$ R_2 $f(w')$;
(ii) jestliže $f(w)$ R_2 w', pak existuje w'' tak, že w R_1 w'' a $f(w'') = w'$;
(iii) pro každý atomický výrok A platí, že $w \in \|A\|_1$ právě tehdy, když $f(w) \in \|A\|_2$.

Zobrazení je tedy p-morfismem, právě když (i) obraz světa w' dosažitelného ze světa w je vždy dosažitelný z obrazu w; (ii) svět dosažitelný z obrazu w je vždy obrazem nějakého světa dosažitelného z w; a (iii) atomický výrok platí ve světě w, právě když platí v jeho obraze.

Funkce f splňující podmínky (i) a (ii) se nazývá *p-morfismem rámce* $<U_1,R_1>$ *do rámce* $<U_2,R_2>$. Existuje-li p-morfismus $<U_1,R_1>$ *na* $<U_2,R_2>$ (to jest takový, při kterém pro každý $w \in U_2$ existuje $w' \in U_1$ tak, že $f(w') = w$), pak $<U_2,R_2>$ nazveme *p-morfickým obrazem* $<U_1,R_1>$.

Platí: Je-li f p-morfismem, pak pro *každý* (nejenom atomický) výrok A platí, že $w \in \|A\|_1$ právě tehdy, když $f(w) \in \|A\|_2$. Je-li $<U_2,R_2>$ p-morfickým obrazem $<U_1,R_1>$, pak každý výrok, který je platný v $<U_1,R_1>$, je platný i v $<U_2,R_2>$.

Důkaz: Dokázat první část tvrzení je tak snadné, že to lze ponechat jako cvičení. Abychom dokázali druhou část, předpokládejme, že A není platný v $<U_2,R_2>$. Existuje tedy interpretace $\|...\|_2$ v tomto rámci taková, že pro nějaký $w^* \in U_2$ platí $w^* \notin \|A\|_2$. Definujme interpretaci $\|...\|_1$ v rámci $<U_1,R_1>$ tak, že pro každý výrok B a pro každý svět w bude $w \in \|B\|_1$ právě tehdy, když $f(w) \in \|B\|_2$. Snadno se nyní nahlédne, že f je p-morfismus $\|...\|_1$ do $\|...\|_2$ a že pro ono $w^{**} \in U_2$, pro které $f(w^{**}) = w^*$, musí platit $w^{**} \notin \|A\|_1$; a A tedy není platný v $<U_1,R_1>$.

[37] Tento termín se vyvinul z původního „pseudo-epimorfismus“.

Uvažme nyní tu vlastnost relace dosažitelnosti, které se říká *ireflexivita* a kterou má relace dosažitelnosti právě tehdy, když žádný svět není dosažitelný sám ze sebe, to jest když pro žádný *w* neplatí *w*R*w*. Vezměme dva rámce: univerzum jednoho z nich je tvořeno přirozenými čísly a relace dosažitelnosti splývá se standardní relací uspořádání těchto čísel (to jest z každého čísla jsou dosažitelná právě všechna ta čísla, která jsou větší než ono), zatímco univerzum druhého je tvořeno jediným prvkem, číslem 0, který je sám ze sebe dosažitelný. Snadno se ověří, že funkce, která zobrazuje všechny prvky univerza toho prvního na jediný prvek univerza onoho druhého, je p-morfismem; takže druhý rámec je p-morfickým obrazem prvního. Avšak zatímco relace dosažitelnosti prvního rámce je ireflexivní, relace dosažitelnosti druhého nikoli: takže nemůže existovat výrok jazyka MVP, který by byl platný v tom prvním a nebyl platný v onom druhém.

Podobně není axiomatizovatelná ani *propojenost*, to jest vlastnost, kterou má R právě tehdy, když jsou každé dva různé světy jeden z druhého alespoň v jednom směru dosažitelné, to jest když pro každé dva světy *w* a *w*′ platí

jestliže *w*≠*w*′, pak buď *w*R*w*′ nebo *w*′R *w*.

To lze nahlédnout následujícím způsobem. Každý výrok MVP, který je platný ve dvou různých rámcích s disjunktními univerzy, zřejmě musí být platný i v rámci, který vznikne jejich ‚sjednocením‘, to jest v rámci, jehož univerzum i relace dosažitelnosti jsou sjednocením univerz a relací dosažitelnosti obou původních rámců. Avšak takovéto ‚sjednocení‘ dvou rámců s propojenými relacemi dosažitelnosti (a neprázdnými univerzy) dá rámec, jehož relace dosažitelnosti zřejmě *není* propojená; a nemůže tedy existovat výrok, který by byl platný právě jen ve všech rámcích s propojenými relacemi dosažitelnosti.

5.4 Slabé modální logiky

C. I. Lewis, který se jako první modálními operátory zabýval v rámci moderní formální logiky, původně navrhl pět různých modálních systémů, které nazval S1 až S5[38]. Za primitivní modální operátor ovšem nevzal nutnost, ale ‚striktní

[38] *Viz* jeho dodatek k Lewis a Langford (1932).

implikaci‘. Ta je však definovatelná prostřednictvím nutnosti, protože *A* striktně implikuje *B*, právě když mezi *A* a *B* nutně platí obyčejná implikace, tj. když $\Box(A\to B)$. Proto můžeme původní Lewisovy systémy převést do podoby kompatibilní s naším dosavadním výkladem modálních logik; ostatně u S4 a S5 jsme tak již učinili[39].

Lewisovy logiky S1-S3 jsou pozoruhodné tím, že v nich neplatí pravidlo (*nec*) – to znamená, že v jejich rámci existují výroky, které jsou samy dokazatelné, ale jejich necesitace nikoli. Tyto systémy se tudíž nevejdou do naší výše uvedené definice modálního výrokového počtu a nemají tedy ani standardní kripkovskou sémantiku. Z toho plyne, že chceme-li dát nějaký sémantický smysl i těmto Lewisovým systémům, musíme pro ně definovat nějakou jinou sémantiku.

Nejprve si však tyto systémy charakterizujme. S1 je možné axiomatizovat například následujícím způsobem. Axiomy jsou všechny axiomy nějaké axiomatizace KVP plus následující dva modální axiomy:

(T) $\Box A\to A$,
(S1) $\Box(A\to B)\to(\Box(B\to C)\to\Box(A\to C))$.

Odvozovacími pravidly jsou pak *modus ponens* plus následující dvě:

(nec_K) A / $\Box A$, je-li *A* teorémem KVP,
(US) $A\leftrightarrow B$ / $C\leftrightarrow C[A/B]$
(kde $C[A/B]$ je jakýkoli výrok, který vznikne z *C* náhradou nějakého výskytu výroku *A* výrokem *B*).

K alternativní axiomatizaci můžeme dospět tak, že přidáme jako další axiomy necesitace všech axiomů KVP: tím se stanou nadbytečné samy axiomy KVP (protože každý z nich je pomocí (*mp*) a (T) odvoditelný ze své necesitace), a jak se ukazuje, také pravidlo (nec_K) (protože necesitace všech teorémů KVP budou odvoditelné pomocí ostatních axiomů a pravidel). Axiomatizací S1 tedy bude:

$\Box(A\to(B\to A))$,
$\Box((A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C)))$,

[39] V původní verzi je uvádí například Mleziva (1970, §4.3).

$\Box((\neg A\to\neg B)\to((\neg A\to B)\to A))$,
$\Box A\to A$,
$\Box(A\to B)\to(\Box(B\to C)\to\Box(A\to C))$,

$A, A\to B / B$,
$A\leftrightarrow B / C\leftrightarrow C[A/B]$.

(Všimněme si ovšem, že tato nová axiomatizace *není* ekvivalentní té původní v takovém smyslu, že by byl každý výrok *A*, který je v rámci jedné z nich odvoditelný z výroků A_1, ..., A_n, z těchto výroků odvoditelný i v rámci té druhé. Například z výroku $A\to A$ je v rámci té původní, avšak nikoli v rámci oné nové, odvoditelný výrok $\Box(A\to A)$.)

Axiomatizace S2 se od naší původní axiomatizace S1 liší jedním axiomem a jedním pravidlem – namísto (S1) má totiž nám dobře známý axiom

(K) $\Box(A\to B)\to(\Box A\to\Box B)$

a namísto pravidla (US) pravidlo

(*nec**) $\Box(A\to B) / \Box(\Box A\to\Box B)$.

Při této axiomatizaci má tedy S2 stejné axiomy jako T – liší se odvozovacími pravidly.

Alternativní axiomatizací S2 tedy bude:

$\Box(A\to(B\to A))$,
$\Box((A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C)))$,
$\Box((\neg A\to\neg B)\to((\neg A\to B)\to A))$,
$\Box A\to A$,
$\Box(A\to B)\to(\Box A\to\Box B)$,

$A, A\to B / B$,
$\Box(A\to B) / \Box(\Box A\to\Box B)$.

Axiomatický systém pro S3 vznikne tak, že k axiomům S2 přidáme axiom

$\Box(A\to B)\to \Box(\Box A\to\Box B)$, čímž se stanou nadbytečnými axiom (K) i pravidlo (*nec**). Alternativně tedy můžeme S3 axiomatizovat následujícím způsobem

$\Box(A\to(B\to A))$,
$\Box((A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C)))$,
$\Box((\neg A\to\neg B)\to((\neg A\to B)\to A))$,
$\Box A\to A$,
$\Box(A\to B)\to \Box(\Box A\to\Box B)$,

$A, A\to B\ /\ B$.

Všimněme si, že pro tuto axiomatizaci musí platit věta o dedukci – má totiž za teorémy axiomy (1) i (2) KVP a za jediné odvozovací pravidlo má (*mp*). (To ovšem neznamená, že věta o dedukci platí i pro onu předchozí axiomatizaci S3!)

Jakou sémantiku by mohly mít tyto takzvané *slabé* modální výrokové počty (SMVP)? Je zřejmé, že standardní kripkovská je pro ně nepoužitelná: protože v SMVP obecně neplatí pravidlo necesitace, je možné, aby byl A teorém a $\Box A$ nikoli – avšak ve standardní kripkovské interpretaci musí být $\Box A$ platný, jakmile je platný A. (To plyne z faktu, že kdykoli je A platný, je pravdivý v každém světě, a tedy tím spíš v každém světě dosažitelném z kteréhokoli světa.) To znamená, že úplná kripkovská sémantika pro SMVP by musela obsahovat světy, v nichž by mohly neplatit necesitace teorémů.

A ukazuje se, že tímto způsobem skutečně můžeme vhodnou sémantiku pro některé SMVP vybudovat – je třeba jenom tu standardní kripkovskou obohatit o tzv. *nenormální* možné světy. Nenormální svět je charakterizován tím, že v něm neplatí žádná necesitace; jinak je stejný jako normální svět. Interpretací SMVP je pak kripkovská interpretace s univerzem, které může obsahovat i nenormální světy. Výrok je pak ovšem při takovéto interpretaci definován jako platný, jestliže je pravdivý v každém *normálním* světě. Říkejme této sémantice *nestandardní kripkovská* sémantika[40].

To znamená, že například $\Box($ $A\to A)$ je platný při každé nestandardní kripkovské interpretaci. To plyne z faktu, že tento výrok je platný právě tehdy, když je v každém možném světě dosažitelném z jakéhokoli normálního možného světa pravdivý výrok $(A\to A)$; a ten zřejmě platí v každém, normálním

[40] *Viz* Kripke (1965a).

i nenormálním světě. Avšak výrok $\Box\Box(A\rightarrow A)$ již platný není – může totiž existovat normální možný svět, ze kterého je dosažitelný nějaký nenormální svět, a protože v tomto nenormálním světě není pravda $\Box(A\rightarrow A)$, neplatí v uvažovaném normálním světě $\Box\Box(A\rightarrow A)$.

Jak lze ukázat, je S2 úplný vzhledem ke všem nestandardním kripkovským rámcům s *reflexivní* relací dosažitelnosti, zatímco S3 vzhledem ke všem nestandardním kripkovským rámcům s relací dosažitelnosti, která je *reflexivní* a *tranzitivní*. (Pro S1 ani nestandardní kripkovskou sémantiku vybudovat nelze.) S2 je tedy v tomto smyslu jakousi ‚slabou variantou' T, zatímco S3 je ‚slabou variantou' S4.

5.5 Temporální logika

Z hlediska přirozeného jazyka se zdají být podstatné i modality časové. K nim přitom lze přistoupit způsobem analogickým tomu, jakým jsme přistupovali k modalitám, kterými jsme se zabývali dosud. Řekneme-li, že něco platí *vždy*, můžeme tomu totiž jistě rozumět tak, že říkáme, že to platí v každém časovém okamžiku; a zdá se tudíž, že *vždy* se vzhledem k časovým okamžikům chová analogicky jako *nutně* vzhledem k možným světům. Podobně *někdy* je možné nahlédnout jako jakousi ‚časovou analogii' *možná*[41]. Z tohoto hlediska se tedy nejjednodušší temporální logikou jeví být prostě MVP-S5 s prvky univerza chápanými nikoli jako světy, ale jako časové okamžiky.

U temporální logiky, kterou se jako první začal systematicky zabývat Artur Prior, nám ale obvykle nejde jenom o tyto dvě standardní modality: jako druh modalit lze totiž chápat i samy gramatické časy. Máme-li výrok *A* v přítomném čase, pak jeho uvedení do minulého, resp. budoucího času můžeme chápat jako aplikaci modálního operátoru **P**, resp. **F** (z anglického *past*, resp. *future*): **P***A* tedy říká, že tomu bylo tak, že *A*, zatímco **F***A* říká, že tomu bude tak, že *A*. Jinými slovy, **P***A* říká, že *existuje časový okamžik dřívější než ten současný, v němž A*, zatímco **F***A* říká, že *existuje časový okamžik pozdější než ten*

[41] Je ovšem třeba mít na paměti, že výrazy *nutně* a *možná* jsou v přirozeném jazyce mnohoznačné, takže ten jejich smysl, který explikuje modální logika, je jenom jedním z mnoha. Jeden ze smyslů *nutně* se například téměř kryje s významem *vždy*; a některé tradiční úvahy o nutnosti a možnosti by tak z dnešního hlediska mohly spadat spíše do temporální než do modální logiky.

současný, v němž A. To naznačuje, že i tyto operátory se vzhledem k časovým okamžikům chovají podobně jako modální operátory vzhledem k možným světům: to, zda je v daném časovém okamžiku pravdivý **P***A* nebo **F***A*, je věcí toho, zda je *A* pravdivý v jiných časových okamžicích.

Abychom ovšem mohli tuto paralelu vytěžit a definovat temporální operátory kripkovským způsobem, musíme vzít v úvahu, že časové okamžiky jsou *uspořádány*: tvoří časovou osu, přímku, která vede z minulosti do budoucnosti. Formální aparát, který jsme vyvinuli v rámci budování sémantiky pro modální logiku, nám ovšem poskytuje nástroj, který nám uspořádání dovoluje ustanovit: relaci dosažitelnosti. V tomto případě budeme považovat časový okamžik t' za dosažitelný z časového okamžiku t právě tehdy, když je t' pozdější než t. (Vzhledem k tomu, že ze současnosti do budoucnosti se jednou dostaneme, zatímco do minulosti již nikoli, zde termín *dosažitelnost* dává dokonce přímočařejší smysl než v případě modálních logik.) Kýžené lineární (to jest ‚přímkové') uspořádání časových okamžiků vznikne zřejmě tehdy, budeme-li mít relaci dosažitelnosti, která je tranzitivní, ireflexivní a propojená. (Můžeme samozřejmě uvažovat i o dalších vlastnostech: například časová osa by měla být pravděpodobně i *hustá*, to jest taková, aby mezi každými dvěma okamžiky ležel nějaký další.)

Operátory **F** a **P** můžeme nyní definovat následujícím způsobem

$$\|\mathbf{F}A\| = \{t \mid \text{existuje } t' \text{ tak, že } t' \in \|A\| \text{ a tRt}'\};$$
$$\|\mathbf{P}A\| = \{t \mid \text{existuje } t' \text{ tak, že } t' \in \|A\| \text{ a t}'\text{Rt}\}.$$

Operátory *někdy*, **S** (*sometimes*), a *vždy*, **A** (*always*), pak můžeme definovat jejich pomocí:

$$\mathbf{S}A \equiv_{\text{Def.}} \mathbf{P}A \lor A \lor \mathbf{F}A,$$
$$\mathbf{A}A \equiv_{\text{Def.}} \neg\mathbf{S}\neg A.$$

Jakou axiomatiku by měla temporální logika mít? Řekli jsme, že bychom potřebovali relaci dosažitelnosti, která je minimálně tranzitivní, ireflexivní a propojená. Tranzitivitě, jak víme, odpovídá axiom

$$\Box A \to \Box\Box A;$$

avšak, jak také víme, ireflexivitu a propojenost axiomatizovat neumíme. Takto přímočará axiomatizace temporální logiky tedy není možná; v literatuře je ovšem probírána celá řada návrhů sofistikovanějších axiomatických systémů temporální logiky[42].

5.6 Deontická logika

Jako určitý druh modality je možné nahlédnout i základní pojem tzv. deontické logiky, *přikázání*. Rekonstruujeme-li *je přikázáno* jako modální operátor **O** a *je povoleno* jako **P** (písmena jsou vzata z anglických termínů *obliged* a *permitted*), bude mezi těmito dvěma operátory obdoba vztahu mezi nutností a možností:

$$\mathbf{O}A \leftrightarrow \neg\mathbf{P}\neg A.$$

Představme si nyní, že máme univerzum možných světů s relací dosažitelnosti, která nepropojuje svět *w* se všemi světy, ve kterých nastává to, co je ve *w možné*, ale se všemi těmi, ve kterých nastává jen to, co je ve *w povoleno*. Pak bude zřejmě ve *w* pravdivý výrok **P***A* právě tehdy, když bude *A* pravdivý v nějakém dosažitelném světě, a výrok **O***A* bude ve *w* pravdivý právě tehdy, když bude *A* pravdivý v každém dosažitelném světě. Jinými slovy, budeme-li kripkovské interpretace chápat tímto ‚deontickým' způsobem, budeme moci pro tento druh deontické logiky použít přímo standardní kripkovskou sémantiku.

Obvykle se má za to, že vedle minimální modální axiomatiky, odpovídající MVP- K, je v případě deontické logiky v každém případě třeba přijmout axiom

$$\text{(D)}\ \neg(\mathbf{O}A\wedge\mathbf{O}\neg A)$$

stanovící, že nic nemůže být přikázáno a současně zakázáno. Za minimální rozumný deontický výrokový počet je tedy často považován počet charakterizovaný (vedle axiomů a pravidla KVP) deontickou obdobou axiomu (K), axiomem (D) a deontickou verzí pravidla (*nec*). Snadno nahlédneme, že (D) je ekvivalentní axiomu

[42] *Viz* Prior (1957); a také Girle (2000, Kapitola 8) a Goldblatt (1987).

(D′) $\mathbf{O}A\rightarrow\mathbf{P}A$,

a tomu, jak jsme viděli v oddíle 5.3, odpovídá to omezení na relaci dosažitelnosti, které stanoví, že je tato relace *totální*, to jest že neexistuje svět, ze kterého by nebyl dosažitelný žádný svět. Modely takové deontické logiky jsou tedy všechny množiny možných světů s totálními relacemi dosažitelnosti.

Tak jako v případě modální logiky můžeme i tuto deontickou logiku zesilovat přidáváním dalších axiomů. Zdá se však, že není příliš rozumné uvažovat o obdobě axiomu (T),

$\mathbf{O}A\rightarrow A$,

protože přijímat, že cokoli je přikázáno, automaticky nastává, se nezdá dávat velký smysl. Někteří autoři však přijímají obdoby modálních axiomů (B) a (S4), to jest

$\mathbf{O}A\rightarrow\mathbf{OO}A$,
$A\rightarrow\mathbf{OP}A$

(což však zřejmě předpokládá, že dokážeme dát nějaký rozumný smysl do sebe vnořeným modalitám). Deontický výrokový počet, jehož axiomatizace je tvořena těmito dvěma axiomy plus axiomy (K) a (D) a pravidlem (*nec*) (plus, samozřejmě, axiomy a pravidlem KVP), pak charakterizuje relaci dosažitelnosti, která je totální, symetrická a tranzitivní[43].

[43] *Viz* Chellas (1980, Kapitola 6) a Girle (2000, Kapitola 11). Je ovšem třeba podotknout, že toto je jenom *jeden z možných* přístupů k deontické logice. Jiný se ubírá cestami zcela nepodobnými cestám modální logiky: nechápe totiž tuto logiku jako logiku specifických modalit, ale spíše jako logiku ‚rozkazovacího způsobu řeči‘ (*viz* Kolář a Svoboda, 1997).

6 Další variace na kripkovskou sémantiku

6.1 Kripkovská sémantika pro IVP

Viděli jsme, že pro KVP i pro široké spektrum modálních výrokových počtů můžeme zkonstruovat kripkovskou sémantiku. Sémantiku tohoto druhu však mají i některé další logiky – především logika intuicionistická.

Kripke ukázal, že pro IVP je takovou sémantiku možné definovat následujícím způsobem[44]:

Nazvěme *interpretací* jazyka IVP funkci přiřazující každému výroku podmnožinu dané množiny M, které říkáme *univerzum* této interpretace a na které je definována reflexivní a tranzitivní binární relace R tak, že platí:

(0) pro každý atomický výrok A platí, že je-li pravdivý v možném světě w, pak je pravdivý i v každém z něj dosažitelném možném světě, tj. $\{w' \mid w \mathrm{R}\, w'$ pro nějaký $w \in \|A\|\} \subseteq \|A\|$;

(i) negaci $\neg A$ výroku A je přiřazena množina těch světů, ze kterých není dosažitelný žádný svět, ve kterém by platil A, tj. $\|\neg A\| = \{w \mid w' \notin \|A\|$ pro každý w' takový, že $w \mathrm{R}\, w'\}$;

(ii.i) konjunkci $A \wedge A'$ výroků A a A' je přiřazen průnik množin přiřazených A a A', tj. $\|A \wedge A'\| = \{w \mid w \in \|A\|$ a $w \in \|A'\|\}$;

(ii.ii) disjunkci $A \vee A'$ výroků A a A' je přiřazeno sjednocení množin přiřazených A a A', tj. $\|A \vee A'\| = \{w \mid w \in \|A\|$ nebo $w \in \|A'\|\}$;

(ii.iii) implikaci $A \rightarrow A'$ je přiřazena množina těch světů, ze kterých není dosažitelný žádný svět, ve kterém by platil A a neplatil A', tj. $\|A \rightarrow A'\| = \{w \mid w' \notin \|A\|$ nebo $w' \in \|A'\|$ pro každý w' takový, že $w \mathrm{R}\, w'\}$.

Zatímco klauzule pro konjunkci a disjunkci jsou zcela standardní (to jest jsou totožné s příslušnými klauzulemi kripkovské sémantiky pro KVP a potažmo MVP), ostatní tři klauzule se odvolávají nejenom na skutečný svět, ale i na světy z něj dosažitelné. To je, jak víme, charakteristické pro *modální* operátory (zejména operátor $\Box$). Intuicionistické atomické výroky, implikace a negace se

---

[44] *Viz* Kripke (1965b). *Viz* také Epstein (2001, §VII.C) a Švejdar (2002, §5.1.1)

tedy z hlediska této interpretace chovají jako výroky *modální*. Konkrétně můžeme říci, že atomický výrok A se chová jako svá vlastní necesitace $\Box A$, implikace $A \to B$ jako $\Box(A \to B)$ a negace $\neg A$ jako $\Box\neg A$. IVP se tedy z tohoto hlediska vlastně jeví jako ‚zakuklená' modální logika.

Všimněme si, že pro každý výrok IVP, který je pravdivý v nějakém světě, platí, že je pravdivý i v každém světě z něj dosažitelném. Pro atomické výrazy to vyplývá přímo z definice a pro ty ostatní to lze dokázat indukcí. Předpokládejme totiž, že A je pravdivý ve w, tj. že $w \in \|A\|$, a w R w'. Pak:

(i) je-li A tvaru $\neg B$, pak pro každý svět w'' dosažitelný z w' platí, že $w'' \notin \|B\|$ (neboť z tranzitivity R vyplývá, že w'' musí být dosažitelný i z w); a tedy $w' \in \|\neg B\| = \|A\|$;

(ii.i) je-li A tvaru $B \wedge C$, pak $w \in \|B\|$ a $w \in \|C\|$, a tedy podle indukčního předpokladu $w' \in \|B\|$ a $w' \in \|C\|$, a tudíž $w' \in \|B \wedge C\| = \|A\|$;

(ii.ii) je-li A tvaru $B \vee C$, pak $w \in \|B\|$ nebo $w \in \|C\|$, a tedy podle indukčního předpokladu $w' \in \|B\|$ nebo $w' \in \|C\|$, a tudíž $w' \in \|B \vee C\| = \|A\|$;

(ii.iii) je-li A tvaru $B \to C$, pak pro každý svět w'' dosažitelný z w' platí, že $w'' \notin \|B\|$ nebo $w'' \in \|C\|$ (opět proto, že z tranzitivity R vyplývá, že w'' musí být dosažitelný i z w); a tedy $w' \in \|B \to C\| = \|A\|$.

Korektnost intuicionistické logiky vzhledem k této sémantice se snadno ověří; důkaz úplnosti můžeme provést nám již dobře známou cestou konstrukce charakteristického modelu:

Platí: IVP je vzhledem k výše uvedené sémantice úplný, to jest každá tautologie je teorémem.

Důkaz: Způsobem zcela analogickým tomu, jak jsme to dělali v oddíle 4.3, zkonstruujeme pro daný výrok A teorii, která ho neobsahuje. Nechť je tedy B_1, B_2, ... uspořádání výroků jazyka IVP (v této posloupnosti se tudíž někde vyskytuje i A, řekněme, že na j-tém místě, takže je totožný s B_j); definujme Y_0, Y_1, ... předpisem:

$$
\begin{aligned}
Y_0 &= \emptyset, \\
Y_{i+1} &= Y_i \cup \{B_i\}, \text{ není-li z } Y_i \cup \{B_i\} \text{ odvoditelný výrok } A \\
&= Y_i, \text{ jinak.}
\end{aligned}
$$

Y je pak opět sjednocením všech Y_0, Y_1, ...

Stejně jako v případě KVP nyní platí, že A není prvkem Y; že A z Y není ani odvoditelný, a že Y je tedy konzistentní; a také to, že Y je teorií. Do IVP ovšem nemůžeme přenést důkaz toho, že je Y maximální: ten se totiž opíral o teorém [11] KVP, který není teorémem IVP.

Lze však ukázat, že Y je *plná*, což znamená, že kdykoli obsahuje $B \vee C$, pak obsahuje buď B, nebo C. Předpokládejme totiž, že Y obsahuje $B \vee C$, ale neobsahuje B ani C. Je-li B i-tým a C j-tým prvkem posloupnosti B_1, B_2, ..., pak musí platit, že A je odvoditelný z $Y_i \cup \{B\}$ i z $Y_j \cup \{C\}$. A je tedy odvoditelný jak z $Y \cup \{B\}$, tak z $Y \cup \{C\}$; a podle věty o dedukci jsou tudíž z Y odvoditelné $B \rightarrow A$ a $C \rightarrow A$. Pak je ovšem, pomocí axiomu (8), z Y odvoditelný i $(B \vee C) \rightarrow A$, a protože $B \vee C$ patří podle předpokladu do Y, je z Y odvoditelný i A. A to je spor.

To znamená, že A je teorémem, právě když je prvkem všech plných axiomaticky konzistentních teorií (budeme zkráceně říkat *pk-teorií*). Pokud tedy na univerzu tvořeném všemi pk-teoriemi dokážeme zkonstruovat reflexivní a tranzitivní relaci dosažitelnosti tak, že přiřadíme-li každému výroku množinu všech těch pk-teorií, do kterých patří, budou platit (0), (i) a (ii.iii), máme charakteristický model, z čeho pak přímo plyne úplnost. A ukazuje se, že tuto relaci lze definovat překvapivě snadno – prostě jako relaci *inkluze*: svět w' bude dosažitelný ze světa w právě tehdy, když bude množina těch výroků, které tvoří w, částí množiny, která tvoří w'.

Že je tato relace reflexivní a tranzitivní, je zřejmé; a stejně tak je zřejmé, že platí (0). Potřebujeme tedy jen ověřit, že platí (i) a (ii.iii). Platnost (i) je zřejmě za daných okolností ekvivalentní tomu, že platí

(i*) $\neg A$ patří do pk-teorie w právě tehdy, když A nepatří do žádné pk-teorie, ve které je w obsažena,

zatímco platnost (ii.iii) je ekvivalentní

(ii.iii*) $A \rightarrow A'$ patří do pk-teorie w právě tehdy, když do každé pk-teorie, která w obsahuje, patří A' nebo nepatří A.

Ukažme nejprve, že platí (i*). To, že patří-li $\neg A$ do w, pak A nepatří do žádné pk-teorie, která je rozšířením w, je zřejmé – teorie, která by osahovala $\neg A$ i A, by nebyla konzistentní. Zbývá tedy dokázat, že pk-teorie, jejíž žádné plné axiomaticky konzistentní rozšíření neobsahuje A, obsahuje $\neg A$. Předpokládejme tedy, že žádné plné axiomaticky konzistentní rozšíření w neobsahuje A. $w \cup \{A\}$ tedy není podmnožinou žádné pk-teorie, a je tedy nekonzistentní (kdyby totiž tato množina konzistentní byla, existoval by výrok B, který by z ní nebyl odvoditelný, a způsobem analogickým výše uvedenému bychom dokázali zkonstruovat pk-teorii, která by obsahovala $w \cup \{A\}$, avšak nikoli B). To znamená, že z $w \cup \{A\}$ je odvoditelný kterýkoli výrok, a tudíž i $\neg A$. Podle věty o dedukci z toho plyne, že z w je odvoditelný $A\rightarrow\neg A$. Avšak protože z w je odvoditelný i $A\rightarrow A$ (neboť je teorémem), je z w za pomoci axiomu (9) odvoditelný $\neg A$. A protože w je teorie, plyne z toho, že $\neg A\in w$.

Nyní ukažme, že platí (ii.iii*). Předpokládejme nejprve, že $A\rightarrow A'$ patří do w a že nějaká pk-teorie w', která je rozšířením w, obsahuje A. Pak je z ní odvoditelný, a tudíž do ní patří výrok A'. Předpokládejme z druhé strany, že každá pk-teorie, která obsahuje w, obsahuje A' nebo neobsahuje A; to jest, že každá pk-teorie, která obsahuje w a A, obsahuje i A'. To znamená, že A' je odvoditelný z $w\cup\{A\}$ (kdyby nebyl, dokázali bychom zkonstruovat pk-teorii, která obsahuje $w\cup\{A\}$, ale ne A'). Pak je podle věty o dedukci z w odvoditelný $A\rightarrow A'$, a protože w je teorie, $A\rightarrow A'\in w$.

Pro kripkovskou sémantiku IVP je charakteristické to, že se v ní možné světy do sebe jaksi ‚vnořují‘, a tím se přestávají jevit jako *světy* v pravém slova smyslu – každý z nich je nahlédnutelný spíše jako jakýsi více či méně úplný *popis stavu* světa. Relace dosažitelnosti pak vede vždy od méně úplného k úplnějšímu popisu. Takové popisy můžeme chápat také jako zachycení toho, co v nějakém okamžiku o světě víme – tedy jako naše ‚informační stavy‘; a relaci dosažitelnosti pak jako diagram možných variant ‚informačního vývoje‘. (Z tohoto pohledu pak například negace $\neg A$ neříká doslova to, že A není pravdivý, ale spíše to, že už za žádných okolností nemůže přijít informace, že by pravdivý byl.)

Vraťme se nyní ještě k souvislosti mezi IVP a modální logikou. Vezměme MVP s reflexivní a tranzitivní relací dosažitelnosti, to jest S4. Přiřaďme každému výroku A jazyka IVP výrok A^* jazyka MVP tak, že

$A^* = \Box A$, je-li A atomický,
$(\neg A)^* = \Box\neg A^*$,
$(A\wedge B)^* = A^*\wedge B^*$,
$(A\vee B)^* = A^*\vee B^*$,
$(A\rightarrow B)^* = \Box(A^*\rightarrow B^*)$.

Zřejmě platí, že je-li $\|...\|_{S4}$ interpretace S4, pak jestliže pro každý výrok A IVP definujeme

$$\|A\| \equiv_{\mathrm{Def}} \|A^*\|_{S4},$$

bude $\|\ldots\|$ interpretací IVP. Z toho vyplývá, že je-li *A* tautologií IVP, je A^* nutně tautologií S4. Je-li totiž *A* pravdivý při každé interpretaci IVP, pak musí být A^* pravdivý při každé interpretaci S4 (protože kdyby nebyl, nemohl by být při té interpretaci IVP, která ji odpovídá, pravdivý ani *A*).

Z druhé strany: je-li $\|\ldots\|_{\mathrm{IVP}}$ interpretací IVP, pak zřejmě existuje interpretace $\|\ldots\|$ S4 tak, že

$$\|A\|_{\mathrm{IVP}} = \|A^*\|;$$

takže výrok *A* je tautologií IVP *právě tehdy*, *když* je A^* tautologií S4. Z toho vyplývá, že je IVP rozhodnutelný: rozhodnout, zda je tautologií S4 výrok A^*, totiž umíme.

6.2 Kripkovská sémantika pro relevanční logiky

Také pro některé relevanční výrokové počty lze, jak se ukazuje, vybudovat kripkovskou sémantiku. Při jejím budování vycházíme z kripkovské sémantiky pro KVP, sémantiku implikace však definujme ‚modálně' (v duchu MVP-S5):

(ii.iii) $A \rightarrow A'$ platí v možném světě právě tehdy, když v každém světě platí A' nebo neplatí *A*,
tj. $\|A \rightarrow A'\| = \{w \mid$ pro každý w' platí $w' \notin \|A\|$ nebo $w' \in \|A'\|\}$.

Tím vyřadíme paradoxy implikace; přesto však stále zůstanou tautologiemi některé z implikací, které by jimi z hlediska relevanční logiky být neměly. Jednou z nich je

$$(\neg A \wedge A) \rightarrow B.$$

Tento výrok je v rámci KVP ekvivalentní paradoxu implikace

$$\neg A \rightarrow (A \rightarrow B),$$

na rozdíl od něj však zjevně zůstává tautologií i po ‚modalizaci' implikace. Důvodem je to, že výrok $\neg A \wedge A$ není pravdivý v žádném možném světě a jakákoli implikace, jejíž antecedent tvoří, je tedy nutně pravdivá. Takže abychom dosáhli vyřazení i této implikace z množiny teorémů, musíme najít nějakou cestu, jak připustit možné světy, ve kterých může být pravdivý výrok spolu se svou negací.

Představme si, že ke každému světu w existuje svět w^*, kterému budeme říkat *pendant* w. (V některých případech může platit $w^* = w$, obecně to ale nepředpokládáme.) Definujme

(i′) negace $\neg A$ výroku A je v možném světě pravdivá právě tehdy, když A není pravdivý v jeho pendantu, tj. $\|\neg A\| = \{w \mid w^* \notin \|A\|\}$.

V případě, že je svět totožný se svým pendantem, tj. $w = w^*$, splývá tato definice s klasickou; avšak pokud $w \neq w^*$, mohou být ve w současně pravdivé A i $\neg A$. (Výsledná logika se tak stává parakonzistentní ve smyslu oddílu 3.3.3.)

Při takto definované sémantice přestává být tautologií výrok

$$(\neg A \wedge A) \rightarrow B$$

a také výrok

$$B \rightarrow (\neg A \vee A).$$

Tautologiemi však stále ještě zůstávají některé další z hlediska relevanční logiky nežádoucí výroky, například

$$A \rightarrow (B \rightarrow B).$$

Tento výrok je zřejmě tautologií proto, že tautologií je $B \rightarrow B$ a implikace s tautologickým konsekventem nemůže tautologií nebýt. Vyřadit tuto tautologii můžeme pomocí obratu, který jsme použili při budování sémantiky pro slabé modální logiky: zavedení ‚nenormálních‘ světů (i když nyní ‚nenormálních‘ trochu jiným způsobem než v případě SMVP). V každém takovém nenormálním světě může každá implikace nabývat jakékoli pravdivostní hodnoty bez omezení – takže v něm může být nepravdivý například i $B \rightarrow B$. Tautologičnost ale bude, tak jako v případě slabých modálních logik, definována jako pravdivost ve všech *normálních* možných světech, takže $B \rightarrow B$ sám nadále tautologií bude. Současně však už nebude platit, že $B \rightarrow B$ je pravdivý v *každém* možném světě, a tudíž tautologií nebude $A \rightarrow (B \rightarrow B)$.

Ukazuje se ovšem, že takováto sémantika je z hlediska relevanční logiky teď už až příliš slabá – tautologiemi v jejím rámci přestávají být i některé výroky, které jsou obvykle v relevančních logikách teorémy. Příkladem je

(*) $((A\to B)\wedge(A\to C))\to(A\to(B\wedge C))$.

Tento výrok je v rámci výše uvedené sémantiky ve w pravdivý právě tehdy, když pro každý w' platí $w'\notin\|(A\to B)\wedge(A\to C)\|$ nebo $w'\in\|A\to(B\wedge C)\|$. Avšak protože přiřazení pravdivostních hodnot implikacím v nenormálních světech nepodléhá žádným omezením, můžeme mít svět w', ve kterém platí $(A\to B)$ i $(A\to C)$ (a tudíž i $(A\to B)\wedge(A\to C)$), ale neplatí v něm $A\to(B\wedge C)$.

Potřebného ‚doladění' této sémantiky lze dosáhnout tak, že na univerzu možných světů definujeme ternární relaci R takovou, že pro každý normální svět w platí $\mathrm{R}ww'w''$ právě tehdy, když $w' = w''$. Klauzuli pro implikaci nyní modifikujeme následujícím způsobem:

(ii.iii) $A\to A'$ platí v možném světě w, právě když pro všechny možné světy w' a w'' takové, že $\mathrm{R}ww'w''$ a že A platí ve w', platí A' ve w'',
tj. $\|A\to A'\| = \{w \mid$ pro každé w' a w'' takové, že $\mathrm{R}ww'w''$, platí $w'\notin\|A\|$ nebo $w''\in\|A'\|\}$.

Všimněme si, že při takto definované sémantice se už (*) stává tautologií. (*) totiž platí ve w právě tehdy, když

jsou-li w' a w'' takové světy, že $\mathrm{R}ww'w''$ a $(A\to B)\wedge(A\to C)$ platí ve w', pak $A\to(B\wedge C)$ platí ve w''.

Je-li však w normální (a z hlediska tautologičnosti (*) nás zajímá jeho pravdivost jenom v normálních světech), platí $\mathrm{R}ww'w''$ právě tehdy, když $w' = w''$, takže předchozí podmínka se redukuje na:

platí-li ve w' $(A\to B)\wedge(A\to C)$, pak ve w' platí i $A\to(B\wedge C)$.

To je dále ekvivalentní podmínce

platí-li ve w' jak $A\to B$, tak $A\to C$, pak jsou-li w'' a w''' takové světy, že $\mathrm{R}w'w''w'''$ a že A platí ve w'', pak $B\wedge C$ platí ve w''', a dále podmínce

> jestliže pro každé dva světy w'' a w''' takové, že R$w'w''w'''$ a že A platí ve w'', platí B a C ve w''', pak pro každé dva světy w'' a w''' takové, že R$w'w''w'''$ a že A platí ve w'', platí $B \wedge C$ ve w''',

která je zřejmě automaticky splněna. To znamená, že (*) nyní platí v každém normálním možném světě, a je tedy tautologií.

Zrekapitulujme, jak jsme sémantiku pro RVP, ke které jsme se právě dopracovali, dostali ze standardní kripkovské sémantiky pro modální logiky. Provedli jsme tři modifikace:

(i) Zavedli jsme funkci, která světům přiřazuje jejich pendanty (tu pak využíváme pro definici sémantiky negace).

(ii) Připustili jsme nenormální možné světy, ve kterých mohou implikace nabývat jakýchkoli pravdivostních hodnot.

(iii) Nahradili jsme relaci dosažitelnosti *ternární* relací R mezi možnými světy, pro kterou platí, že je-li svět w normální, pak pro kterékoli dva světy w' a w'' platí R$ww'w''$ právě tehdy, když $w' = w''$. (Tuto relaci využíváme pro definici sémantiky implikace.)

Přesná definice interpretace jazyka RVP tudíž vypadá takto: Buď M množina, N její podmnožina, * funkce z M do M a R ternární relace na M taková, že pro každý $w \in M$, který nepatří do N, platí, že R$ww'w''$ právě tehdy, když $w' = w''$. Interpretací jazyka RVP nazveme funkci přiřazující výrokům podmnožiny M tak, že

(i.1′) $\neg A$ je ve w pravdivý, právě když je A nepravdivý ve w^*;
(ii.1′) $A \wedge B$ je ve w pravdivý, právě když je ve w pravdivý jak A, tak B;
(ii.2′) $A \vee B$ je ve w pravdivý, právě když je ve w pravdivý A nebo B;
(ii.3′) $A \rightarrow B$ je ve w pravdivý, právě když pro každé w' a w'' takové, že R$ww'w''$ a že A je pravdivý ve w', je B pravdivý ve w''.

Výrok RVP je pak tautologií, jestliže mu každá interpretace přiřazuje množinu světů, která obsahuje všechny ty prvky M, které nejsou prvky N (to jest je-li pravdivý ve všech normálních světech).

Platí, že tato sémantika je axiomatizována axiomy RVP-B (Oddíl 3.5): že je tedy tento počet vzhledem k této sémantice korektní a úplný. Zde to ale dokazovat nebudeme[45].

Podobně jako v případě MVP lze i zde odhalit určitou korespondenci mezi axiomy, které lze přidávat k RVP-B, a omezeními na relaci R. Tak například platí, že axiomu

$$(A\rightarrow\neg B)\rightarrow(B\rightarrow\neg A)$$

odpovídá podmínka

jestliže $\mathrm{R}w_1w_2w_3$, pak $\mathrm{R}w_1w_3{}^*w_2{}^*$.

Podobně axiomu

$$(A\rightarrow B)\rightarrow((B\rightarrow C)\rightarrow(A\rightarrow C))$$

odpovídá podmínka

jestliže pro nějaký w platí $\mathrm{R}w_1w_2w$ a $\mathrm{R}ww_3w_4$, pak pro nějaký w' platí $\mathrm{R}w_1w_3w'$ a $\mathrm{R}w_2w'w_4$.

A protože relativně jednoduché korespondující vlastnosti relace R existují pro všechny axiomy, o které je třeba rozšířit RVP-B, abychom dostali RVP-R, můžeme tímto způsobem definovat sémantiku i pro RVP-R. Obdobně, i když komplikovaněji lze vybudovat sémantiku pro RVP-E. Podrobnosti *viz* Priest (2001, kapitoly 9,10) a literatura tam citovaná.

6.3 Multimodální logiky a dynamický výrokový počet

Jiné druhy logik vznikají, když začneme uvažovat o jazycích, ve kterých existuje více na sobě nezávislých modalit (tj. více nezávislých operátorů ‚nutnosti'). Představme si, že náš jazyk obsahuje vedle operátoru □ i operátor ■, pro který máme axiomy analogické těm pro □; že tedy platí

[45] *Viz* Routley et al. (1982).

(K□) $\Box(A\to B)\to(\Box A\to\Box B)$,
(K■) $\blacksquare(A\to B)\to(\blacksquare A\to\blacksquare B)$,

(*nec*□) A / $\Box A$,
(*nec*■) A / $\blacksquare A$.

Lze ukázat, že zobecníme-li kripkovskou sémantiku tak, aby rámce obsahovaly dvě relace dosažitelnosti $R_{\Box}$ a $R_{\blacksquare}$ (první pro □ a druhou pro ■), můžeme jak důkaz korektnosti a úplnosti, tak důkaz rozhodnutelnosti pro standardní modální logiku přímočaře zobecnit a ukázat, že je i tato ‚bimodální' logika korektní, úplná a rozhodnutelná.

Můžeme však samozřejmě vytvářet i bimodální logiky, v nichž budou obě modality ‚interagovat', to jest logiky, které budou obsahovat axiomy jako například

$\neg\blacksquare\neg\Box A \to \Box\neg\blacksquare\neg A$.

Takové axiomy pak budou korespondovat s určitými vztahy mezi příslušnými relacemi dosažitelnosti. Například právě uvedenému axiomu odpovídá vztah tzv. *konfluence*:

$\forall w_1 w_2 w_3\ ((w_1 R_{\blacksquare} w_2 \wedge w_1 R_{\Box} w_3)\to\exists w_4(w_2 R_{\Box} w_4 \wedge w_3 R_{\blacksquare} w_4))$.

Analogicky můžeme zavést více než dvě modality. Výsledným logikám se pak říká *multimodální*.

Pozoruhodným případem multimodální logiky je logika, ve které máme nejenom více modalit, ale i pravidla, jak z existujících modalit skládat nové. Představme si, že uvažujeme o nějakém souboru událostí $\{U_i\}_{i\in I}$, pro každou máme operátor $\Box_i$ a výrok $\Box_i A$ interpretujeme jako

po proběhnutí události U_i platí A.

Příslušný kripkovský model se pak jeví jako diagram jakéhosi ‚přechodového systému': jednotlivé možné světy reprezentují stavy a jednotlivé relace dosažitelnosti různé možné typy přechodů mezi nimi.

Představme si, že máme počítač a nějakou základní sadu instrukcí, které na něm lze vykonávat. Víme, jak každá z těchto instrukcí mění stav počítače.

Můžeme si tedy představit, že máme množinu možných stavů a že máme pro každou instrukci binární relaci (v typickém, ‚deterministickém' případě funkci) na množině stavů. Na takový systém se můžeme dívat jako na kripkovský model – je tu univerzum ‚světů' (možných stavů) a soubor ‚relací dosažitelnosti' (přechodů) mezi nimi. V příslušné multimodální logice bude necesitace výroku *A* v nějakém stavu pravdivá právě tehdy, když se počítač z tohoto stavu nemůže příslušnou instrukcí dostat do žádného stavu, kde by neplatilo *A*.

Z instrukcí pak samozřejmě můžeme skládat programy; a za předpokladu, že existuje způsob, jak skládat jim odpovídající přechody, dokážeme ‚vyrobit' přechod odpovídající každému programu. Na této myšlence je založen tzv. *dynamický výrokový počet* (DVP), kterým se jako první zabýval Pratt (1976).

Jazyk DVP vznikne z jazyka KVP tak, že k němu přidáme soubor *atomických programů* $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, ... a operátory $\oplus$, $\cup$, * a ?. *Programy* DVP a *výroky* DVP pak vymezujeme následujícím způsobem[46]:

(i.i) Každý atomický program je program;
(i.ii) je-li *X* program, je i *X** program (nazývaný *iterace* programu *X*);
(i.iii) jsou-li *X* a *Y* programy, jsou i $X\oplus Y$ (*zřetězení X* a *Y*) a $X\cup Y$ (*alternace X* a *Y*) programy;
(i.iv) je-li *A* výrok, je *A*? program (*A-test*);
(ii.i) každý atomický výrok je výrok;
(ii.ii) je-li *A* výrok, je i $\neg A$ výrok;
(ii.iii) jsou-li *A* a *B* výroky, jsou i $(A\wedge B)$, $(A\vee B)$ a $(A\rightarrow B)$ výroky;
(ii.iv) je-li *A* výrok a *X* program, je i $[X]A$ výrok;
programem není nic jiného, než co stanoví (i.i)–(i.iv); a výrokem není nic jiného, než co stanoví (ii.i)–(ii.iv).

Rámec pro interpretaci DVP je tvořen množinou *M* a přiřazením binární relace R_P na *M* každému atomickému programu *P*. Na základě tohoto přiřazení můžeme definovat přiřazení binárních relací na *M* všem programům, které

[46] Všimněme si, že i když se v definici výroku odvoláváme na programy (takže se zdá, že programy bychom měli mít definovány dříve než výroky) a v definici programu se naopak odvoláváme na výroky (takže se zdá, že definice programu naopak předpokládá definici výroku), je tato definice korektní. Musíme se na ni ale dívat jako na jedinou, provázanou definici, která definuje výroky a programy paralelně.

ovšem musíme opět definovat současně s interpretací jazyka DVP v tomto rámci:

(i.ii) $R_{X*} = \{<w,w'> \mid$ existují $w_1, ..., w_n$ tak, že $w = w_1$, $w' = w_n$ a $\{<w_1,w_2>, ..., <w_{n-1},w_n>\} \subseteq R_X\}$;
(i.iii.i) $R_{X\oplus Y} = \{<w,w'> \mid$ existuje w'' tak, že $<w,w''> \in R_X$ a $<w'',w'> \in R_Y\}$;
(i.iii.ii) $R_{X\cup Y} = \{<w,w'> \mid <w,w'> \in R_X$ nebo $<w,w'> \in R_Y\}$;
(i.iv) $R_{A?} = \{<w,w'> \mid w = w'$ a $w \in \|A\|\}$;
(ii.ii) $\|\neg A\| = \{w \mid w \notin \|A\|\}$;
(ii.iii.i) $\|A\wedge A'\| = \{w \mid w \in \|A\|$ a $w \in \|A'\|\}$;
(ii.iii.ii) $\|A\vee A'\| = \{w \mid w \in \|A\|$ nebo $w \in \|A'\|\}$;
(ii.iii.iii) $\|A\rightarrow A'\| = \{w \mid w \notin \|A\|$ nebo $w \in \|A'\|\}$;
(ii.iv) $\|[X]A\| = \{w \mid w' \in \|A\|$ pro všechny w' takové, že $<w,w'> \in R_X\}$.

Axiomatický systém DVP nyní tvoří následující axiomy a pravidla:

(i) axiomy a odvozovací pravidlo KVP;
(ii) pro každý program X ‚modální' axiom a pravidlo
$[X](A\rightarrow B)\rightarrow([X]A\rightarrow[X]B)$ a
$A \,/\, [X]A$;
(iii) pro každé dva programy X a Y axiomy:
$[X\oplus Y]A \leftrightarrow [X][Y]A$;
$[X\cup Y]A \leftrightarrow ([X]A\wedge[Y]A)$;
$[X^*]A \rightarrow (A\wedge[X][X^*]A)$;
$[X^*](A \rightarrow [X]A) \rightarrow (A \rightarrow [X^*]A)$;
$[A?]B \leftrightarrow (A\rightarrow B)$.

Metodou přímočaře analogickou té, kterou se dokazuje úplnost standardních modálních logik, lze nyní dokázat i úplnost tohoto systému; a lze také ukázat, že je DVP rozhodnutelný (*viz* Goldblatt, 1987, Kapitola 10).

Poznamenejme, že z operátorů DVP je možné skládat ‚modality' odpovídající standardním typům příkazů běžných programovacích jazyků, např.

if A **then** X **else** $Y \equiv_{\text{Def.}} ((A?)\oplus X)\cup(((\neg A)?)\oplus Y)$,
while A **do** $X \equiv_{\text{Def.}} ((A?\oplus X)^*)\oplus((\neg A)?)$
atd.

Všimněme si, že ač programy jsme prezentovali jako pouhé nástroje vytváření operátorů, z hlediska programovacích jazyků, jimiž byl tento druh logiky inspirován, jsou ústředním předmětem zájmu právě ony. Tak jako je za logicky klíčovou jednotku přirozeného jazyka brána oznamovací věta, je za základní jednotku jazyka programovacího brán program – takže z hlediska tohoto jazyka nás primárně zajímají nikoli výroky (ty se z hlediska programovacího jazyka jeví jako tzv. *boolovské výrazy*, jejichž role je omezena na kontexty rozhodovacích příkazů), ale programy. Programy se od výroků liší tím, že je na nich podstatné to, co *dělají* (jakou změnu stavu počítače způsobují), a ne to, zda či kdy jsou pravdivé.

Faktem ovšem je, že i na oznamovací věty přirozeného jazyka je možné se dívat jako na nástroje změn určitých stavů, v tomto případě změn informačních stavů uživatelů jazyka. Tímto směrem se vlastně již v náznaku vydala kripkovská sémantika IVP – viděli jsme, že v jejím rámci se možné světy jevily spíše jako informační stavy a relace dosažitelnosti jako jakýsi diagram informačního vývoje.

V tomto směru ovšem můžeme jít dále: můžeme začít výroky obecně chápat jako něco, co nás vede z jednoho informačního stavu do jiného: máme-li stav *s*, pak nás z něj výrok *A* vede do ‚informačně bohatšího' stavu, který je tvořen všemi informacemi *s* plus tou, která je přinášena výrokem *A* (plus samozřejmě všemi jejich společnými důsledky). Výrok se tedy z tohoto hlediska jeví jako reprezentace ‚přechodu' mezi informačními stavy čili jako funkce, která přiřazuje informačním stavům informační stavy, či obecněji jako relace mezi informačními stavy. Jinými slovy, jako protipól oznamovací věty se nám pak v rámci DVP jeví spíše program než výrok. O variantách takto ‚informatizované' logiky pojednává například van Benthem (1997).

7 Obecná algebraická sémantika pro výrokové počty

7.1 Obecná definice výrokového počtu

V předchozích kapitolách jsme probrali celou řadu různých výrokových počtů; a nyní se můžeme ptát, co mají všechny tyto počty společného. Jak by bylo možné pojem výrokového počtu vymezit obecně?

Je celkem jasné, jak obecně charakterizovat syntax všech jazyků toho typu, jakými jsme se v této knize zabývali: výroky každého jazyka jsou tvořeny pomocí operátorů z nějaké výchozí množiny atomických výroků. Obecná definice syntaxe by tedy mohla vypadat takto:

Výrokovým jazykem nazveme množinu symbolů, kterým říkáme *atomické výroky*, spolu s množinou symbolů (obvykle konečnou[47]), kterým říkáme *operátory*, a z nichž každý má přiřazenou *aritu* (četnost), udanou přirozeným číslem.

Výroky takového výrokového jazyka jsou definovány následovně:

(i) každý atomický výrok je výrok;
(ii) je-li O n-ární operátor a jsou-li A_1, ..., A_n výroky, je $O(A_1,...,A_n)$ výrok;
(iii) nic jiného výrokem není.

Také axiomatiku je jednoduché charakterizovat obecně: množina teorémů každého počtu je prostě množinou všech výroků, které je možné podle nějakých pravidel odvodit z nějakých výchozích axiomů. Všimneme si ovšem, že axiomy a odvozovací pravidla jsme vždy specifikovali čistě ‚strukturálně', to jest axiomem a potažmo teorémem byl výrok vždy čistě v důsledku svého tvaru. To vede k následující definici:

Axiomatickým systémem pro daný výrokový jazyk nazveme množinu výroků tohoto jazyka, kterým říkáme *axiomy*, plus množinu odvozovacích pravidel typu

z A_1, ..., A_n odvoď A, zkráceně A_1, ..., A_n / A.

---

[47] Jediným jazykem, kterým jsme se v této knize zabývali a který měl nekonečný počet výrokových operátorů, byl DVP (viz §6.3).

Teorémy takového výrokového jazyka jsou definovány následovně:

(i) každý axiom je teorém;

(ii) jsou-li A_1, ..., A_n teorémy a je-li A_1, ..., A_n / A odvozovací pravidlo, je A teorémem;

(iii) nic jiného teorémem není.

Poněkud problematičtější je obecná definice sémantiky. Je zřejmé, že sémantika spočívá v přiřazování nějakých hodnot výrokům a že toto přiřazování je ‚kompozicionální' – to jest hodnota složeného výroku je vždy určena hodnotami jeho částí. Jinými slovy, pro každý n-ární operátor O výrokového jazyka existuje nějaká n-ární operace O^* s denotáty tak, že pro každé výroky A_1, ..., A_n je $\|O(A_1,...,A_n)\| = O^*(\|A_1\|,...,\|A_n\|)$. Hodnoty nám ale také musí skýtat nějaký prostředek pro to, abychom mohli definovat pojem tautologie: v nejjednodušším případě je tomu tak, že jednou z nich je přímo pravdivostní hodnota *pravda*, P.

Zatím jenom jako první přiblížení tedy definujme: Sémantikou pro daný výrokový jazyk nazveme množinu M, která má nějaký vyznačený prvek a na které je pro každý operátor tohoto jazyka definována funkce s odpovídající aritou. Interpretací tohoto jazyka nazveme každé přiřazení prvků M výrokům jazyka takové, že pro každý operátor O a pro každé výroky A_1, ..., A_n platí $\|O(A_1,...,A_n)\| = O^*(\|A_1\|,...,\|A_n\|)$, kde O^* je ta funkce, která je na příslušné množině definována pro operátor O. Výrok nazveme tautologií, přiřazuje-li mu každá interpretace vyznačený prvek.

Taková definice by fungovala pro KVP a podobně pro některé vícehodnotové výrokové počty, nefungovala by ale například pro MVP. Množina, jejímiž prvky jsou výroky interpretovány, v jejich případě totiž není dána jednoznačně – může to být množina podmnožin *jakékoli* množiny. To znamená, že abychom výše uvedenou definici učinili aplikovatelnou i na ně, musíme začít hovořit nikoli o jediné množině (s vyznačeným prvkem), ale o *souboru* množin. Všimněme si dále, že v případě MVP je vyznačeným prvkem podmnožina rovnající se celému univerzu.

I takto upravená by se však naše definice nedala aplikovat na 4VP-P či SMVP – problém je v tom, že v jejich případě je vyznačených více než jeden prvek (v případě 4VP-P jsou to hodnoty P a O, zatímco v případě SMVP každá množina světů, která obsahuje všechny normální světy). To ale znamená jenom triviální modifikaci; takže jako výsledek máme:

Sémantikou pro daný výrokový jazyk nazveme soubor množin, z nichž každá má podmnožinu *vyznačených* prvků a navíc je na ní pro každý operátor O tohoto jazyka definována funkce s odpovídající aritou. *Interpretací* tohoto jazyka nazveme každé přiřazení prvků některé z těchto množin výrokům takové, že pro každý operátor O a pro každé výroky A_1, ..., A_n platí $\|O(A_1,...,A_n)\| = O^*(\|A_1\|,...,\|A_n\|)$, kde O^* je ta funkce, která je na příslušné množině definována pro operátor O. Výrok nazveme *tautologií*, přiřazuje-li mu každá interpretace nějaký vyznačený prvek.

Zdá se však, že v této podobě se tato definice stává již poněkud nepřehlednou; a že by se vyplatilo vybudovat nějaký přesnější pojmový aparát. Budovat ho ale naštěstí nemusíme – poskytuje nám ho totiž algebra.

7.2 Algebraická formulace

Nejprve uveďme definice některých algebraických pojmů:

Algebrou nazýváme uspořádanou dvojici $\Omega = \langle N, \langle O_i^{n_i} \rangle_{i \in I} \rangle$, kde N je množina a pro každé $i \in I$ je $O_i^{n_i}$ n_i-ární funkcí z N do N (kde $n_i \geq 0$); množinu N nazýváme *nosičem* Ω a prvky souboru $\langle O_i^{n_i} \rangle_{i \in I}$ *operacemi* Ω.

Jsou-li $\Omega = \langle N, \langle O_i^{n_i} \rangle_{i \in I} \rangle$ a $\Omega' = \langle N', \langle O'^{n_i}_i \rangle_{i \in I} \rangle$ algebry, pak funkci f z N do N' nazveme *homomorfismem* Ω *do* Ω', jestliže pro každé $i \in I$ a každé prvky $a_1, ..., a_{n_i} \in N$ platí $f(O_i^{n_i}(a_1,...,a_{n_i})) = O'^{n_i}_i(f(a_1),..., f(a_{n_i}))$.

Je zřejmé, že výrokový jazyk je z našeho pohledu algebrou: její nosič je tvořen výroky a operace jsou dány logickými operátory: tak například operátoru $\wedge$ odpovídá operace, která z výroků A a B vyrobí výrok $A \wedge B$. Také hodnoty, které výrokům přiřazujeme v rámci sémantiky, však tvoří algebru: tak například v případě KVP je to algebra s nosičem {P,N} a s operacemi danými pravdivostními tabulkami pro jednotlivé operátory; zatímco například v případě MVP-S5 máme algebry s nosiči tvořenými všemi podmnožinami jakékoli výchozí množiny (‚možných světů') a s operacemi, jako je průnik, sjednocení, doplněk atd. Sémantická interpretace je přitom homomorfismem algebry tvořené jazykem do algebry tvořené hodnotami – podmínka vyjádřená v definici homomorfismu totiž není ničím jiným než tím, co jsme výše nazvali kompozicionalitou.

Sémantická interpretace však nemůže být *pouhým* homomorfismem – potřebujeme totiž, aby nám sémantika vymezovala množinu tautologií, a proto potřebujeme mít mezi hodnotami (to jest prvky nosiče algebry hodnot) nějaké vyznačené. Algebru s vyznačenou podmnožinou svého nosiče budeme nazývat matricí:

Matricí nazveme uspořádanou dvojici $<\Omega, V>$, kde Ω je algebra a V neprázdná podmnožina nosiče Ω. Prvkům V budeme říkat *vyznačené prvky* matrice. Matrici nazveme *jednoduchou*, má-li V právě jeden prvek. Je-li Ω algebra a $\Psi = <\Omega', V>$ matrice, pak řekneme, že homomorfismus H z Ω do Ω' *verifikuje* podmnožinu M nosiče Ω, jestliže $H(x) \in V$ pro každý $x \in M$; řekneme, že tuto množinu *charakterizuje*, jestliže $H(x) \in V$ právě tehdy, když $x \in M$. Jestliže množinu M verifikuje (charakterizuje) každý homomorfismus Ω do Ω', pak řekneme, že množinu M verifikuje (charakterizuje) matrice Ψ.

Nyní můžeme konstatovat, že sémantika jazyka je obecně dána nějakým souborem matric – interpretací je pak prostě jakýkoli homomorfismus jazyka do kterékoli z nich. V případě KVP se jedná o soubor s jediným prvkem, totiž matricí tvořenou Boolovou algebrou pravdivostních hodnot P a N s vyznačeným prvkem P. V případě sémantiky S5 však má tento soubor více než jediný prvek, má jich dokonce nekonečně mnoho: patří do něj každá matrice tvořená algebrou podmnožin nějaké množiny M (jejími operacemi jsou doplněk, průnik, sjednocení, operace, která dvěma množinám přiřadí sjednocení doplňku té první s tou druhou, a operace zobrazující celou množinu N samu na sebe a každou její vlastní podmnožinu na $\emptyset$) s univerzální podmnožinou jako jediným vyznačeným prvkem.

7.3 Základní ‚přirozená sémantika'

Nyní si můžeme položit otázku: existuje pro jakoukoli axiomatiku sémantika, která by vedla k množině tautologií splývající s množinou teorémů?

Než se dostaneme k této otázce, položme si otázku jednodušší: existuje pro každou množinu výroků daného jazyka matrice a homomorfismus do této matrice, který charakterizuje právě tuto množinu? Pozitivní odpověď na ni je zřejmě zcela triviální: Je-li totiž J výrokový jazyk a M množina výroků J, je $<J,M>$ zřejmě matrice a identické zobrazení J na sebe sama (které je samozřejmě homomorfismem) charakterizuje *M*. Od ní se ale můžeme přirozenou cestou dostat k méně triviálním matricím.

Mějme nyní na *J* nějakou axiomatiku. Řekneme, že dva výroky *A* a *B* jsou vzhledem k ní *inferenčně ekvivalentní,* a budeme to zapisovat jako $A \equiv B$, je-li *A* odvoditelný z *B* a *B* odvoditelný z *A*. Řekněme, že *A* a *B* jsou vzhledem k této axiomatice *inferenčně intersubstitutivní*, $A \cong B$, je-li každý výrok *C* inferenčně ekvivalentní výroku, který z *C* vznikne, když v něm některý výskyt *A* nahradíme *B*. Je zřejmé, že výroky, které jsou inferenčně intersubstitutivní, jsou z hlediska uvažované axiomatiky, a tedy i z hlediska sémantiky, která by jí byla přiměřená, nerozlišitelné; v rámci sémantické interpretace bychom tedy měli všechny inferenčně intersubstitutivní výroky ztotožnit.

Definujme nejprve obecný pojmový aparát pro přechod od dané algebry (či matrice), na které je zadána nějaká ‚relace nerozlišitelnosti' (taková relace musí být zřejmě ekvivalencí, ale současně musí i ‚respektovat strukturu' výchozí algebry), k algebře (či matrici), v jejímž rámci jsou takto ‚nerozlišitelné' prvky ztotožněny:

Binární relaci *R* na nosiči algebry $\Omega = \langle N, \langle O_i^{n_i} \rangle_{i \in I} \rangle$ nazveme *kongruencí*, je-li ekvivalencí (to jest je-li reflexivní, symetrická a tranzitivní) a jestliže pro každou $O_i^{n_i}$ a každé prvky $a_1, ..., a_{n_i}, a_1', ..., a_{n_i}' \in N$ takové, že $a_1 \mathrm{R} a_1', ..., a_{n_i} \mathrm{R} a_{n_i}'$, platí $O_i^{n_i}(a_1,...,a_{n_i})\ \mathrm{R}\ O_i^{n_i}(a_1',...,a_{n_i}')$. *Faktorovou algebru* Ω *podle R*, Ω/R, definujeme jako $\langle N/R, \langle O_i^{n_i}/R \rangle_{i \in I} \rangle$, kde N/R je množina ekvivalenčních tříd prvků *N* podle *R* a $O_i^{n_i}/R([a_1],...,[a_{n_i}]) = [O_i^{n_i}(a_1,...,a_{n_i})]$ pro všechny prvky $a_1, ..., a_{n_i} \in N$ (kde $[a]$ je ta ekvivalenční třída podle *R*, do které patří *a*). (Korektnost této definice je dána tím, že *R* je kongruencí.) *Přirozeným homomorfismem* Ω *do* Ω/R, H_R, pak nazveme zobrazení, které každému prvku *a* nosiče Ω přiřadí prvek $[a]$ nosiče Ω/R. *Projekcí* dané podmnožiny *M* nosiče Ω/R na nosič Ω pak nazveme množinu všech prvků nosiče Ω, které patří do nějakého prvku *M* (jinými slovy sjednocení všech ekvivalenčních tříd, které tvoří *M*).

Je-li $\Psi = \langle \Omega, V \rangle$ matrice a *R* kongruence na Ω, pak *faktorovou matrici* Ψ *podle R*, Ψ/R, definujeme jako $\langle \Omega/R, V[R] \rangle$, kde $V[R]$ je množina všech prvků nosiče Ω/R, které mají neprázdný průnik s *V*. Pro každou kongruenci *R* na Ω pak zřejmě platí, že *V* je verifikována přirozeným homomorfismem do příslušné faktorové matrice podle *R*; a má-li *V* tu vlastnost, že pro žádné dva prvky nosiče Ω, které jsou v relaci *R*, neplatí, že jeden z nich patří do *V* a druhý nikoli (takovou množinu budeme nazývat *uzavřenou na R*), pak tento přirozený homomorfismus *charakterizuje V*.

Vraťme se tedy k matrici tvořené jazykem J a množinou výroků M. Je zřejmé, že je-li O n-ární operátor J, pak pro všechny výroky A_1, ..., A_n, A_1', ..., A_n' takové, že $A_1 \cong A_1'$, ..., $A_n \cong A_n'$, musí platit $O(A_1,...,A_n) \cong O(A_1',...,A_n')$ – to jest inferenční intersubstitutivita je kongruencí na J. Vytvoříme-li tedy matrici $<J/\cong, M[\cong]>$, pak přirozený homomorfismus $H_{\cong}$ z J do $J/\cong$ verifikuje všechny prvky M; a je-li M uzavřená na $\cong$, pak M dokonce charakterizuje. Speciálně, je-li M množinou všech teorémů, pak je uzavřená na $\cong$ (platí totiž, že $A \cong B$ implikuje $A \equiv B$, a uzavřenost na inferenční ekvivalenci tedy implikuje uzavřenost na inferenční intersubstitutivitu, a M je jistě uzavřená na inferenční ekvivalenci) a $H_{\cong}$ tedy *charakterizuje M*.

Pro každý výrokový jazyk s jakoukoli axiomatikou tedy máme určitou matrici a určitý homomofismus do této matrice, který charakterizuje množinu všech teorémů (budeme zkráceně říkat, že tento homomorfismus charakterizuje příslušnou *axiomatiku*). Ukážeme nyní, že množina teorémů je charakterizována nikoli jenom tímto, ale jakýmkoli homomorfismem do této matrice – to jest že množina teorémů je charakterizována přímo matricí $<J/\cong, M[\cong]>$. K tomu ale potřebujeme ještě několik dalších definic.

Algebru $<N,<O_i^{n_i}>_{i\in I}>$ nazveme *konečně generovanou*, existuje-li konečná podmnožina X množiny N, jejíž prvky nejsou hodnotami žádné z jejích operací a ze které je možné celý nosič N dostat opakovaným aplikováním operací. (Přesněji: Je-li $a\in X$, pak pro žádnou operaci O a žádné a_1, ..., $a_n\in N$ neplatí $O(a_1,...,a_n) = a$; a N je nejmenší z množin, které obsahují X a pro které současně platí, že kdykoli obsahují a_1, ..., a_n, pak pro každou n-ární operaci O obsahují i $O(a_1,...,a_n)$.) Konečně generovanou algebru nazveme (*absolutně*) *volnou*, jestliže $O(a_1,...,a_n) = O'(a_1',...,a_m')$ může pro nějaké operace O a O' a pro nějaké prvky a_1, ..., a_n, a_1', ..., a_m' jejího nosiče nastat jedině tehdy, když je O totožná s O', $n = m$ a $a_1 = a_1'$, ..., $a_n = a_m'$.

Je zřejmé, že jazyky, jak jsme tento pojem chápali v této knize, jsou volnými algebrami (generovanými svými atomickými výroky). Současně platí, že množina všech teorémů jakékoli axiomatiky (alespoň jak jsme pojem *axiomatiky* chápali v této knize) je vždy ‚strukturální' – axiomy i odvozovací pravidla jsou specifikovány čistě prostřednictvím schémat. To jinými slovy znamená, že nahradíme-li v jakémkoli teorému jeho atomické podvýroky jakýmikoli jinými výroky (přičemž totožné atomické podvýroky nahrazujeme totožnými výroky), nutně musíme dostat zase teorém. Definujme nyní pojmy substituce a strukturální množiny výroků přesněji:

Substitučním jádrem na jazyce J nazveme funkci, která každému atomickému výroku jazyka J přiřazuje nějaký výrok jazyka J. Je-li S substitučním jádrem, pak *substitucí indukovanou S* nazveme funkci S^*, která každému výroku J přiřazuje výrok J podle následujícího předpisu:

(i) je-li A atomický, pak $S^*(A) = S(A)$; a
(ii) $S^*(O(A_1,...,A_n)) = O(S^*(A_1),..., S^*(A_n))$.

Tato definice je korektní právě proto, že J je *volnou* algebrou. Substituce je zřejmě homomorfismem J do sebe sama.

Nazvěme nyní množinu výroků M *strukturální*, je-li uzavřená na substituce v tom smyslu, že kdykoli obsahuje výrok A, pak pro každou substituci S^* obsahuje i $S^*(A)$. Platí, že je-li M strukturální, pak je verifikována každým homomorfismem do $<J/R, M[R]>$, kde R je jakákoli kongruence na J. To se ukáže následujícím způsobem. Buď H homomorfismus J do $<J/R, M[R]>$. Ukážeme, že existuje substituce S^* tak, že pro každý výrok A platí

$$H(A) = H_R(S^*(A)).$$

A protože ze strukturálnosti M plyne, že $A \in M$ implikuje $S^*(A) \in M$, platí pro každý $A \in M$, že

$$H_R(S^*(A)) \in M[R],$$

a $A \in M$ tedy implikuje $H(A) \in M[R]$.

To, že existuje substituce S^* tak, že pro každý výrok A platí $H(A) = H_R(S^*(A))$, ukážeme indukcí. H_R je zřejmě zobrazením *na* nosič J/R, to jest pro každý prvek A nosiče J/R existuje nějaký prvek A' nosiče J tak, že

$$H_R(A') = A.$$

Buď tedy S substituční jádro takové, že pro každý atomický výrok A je $S(A)$ nějakým výrokem, pro který

$$H_R(S(A)) = H(A).$$

Indukcí ukážeme, že hledaná substituce je indukovaná S. Je-li $A = O(A_1,...,A_n)$, pak, protože H je homomorfismus, platí

$$H(A) = H(O(A_1,...,A_n)) = O^*(H(A_1),..., H(A_n)),$$

kde O^* je operace algebry J/R odpovídající operaci O algebry J. To ale podle indukčního předpokladu znamená, že

$$H(A) = O^*(H_R(S^*(A_1)),..., H_R(S^*(A_n))),$$

a protože i H_R je homomorfismus, plyne z tohoto dále, že

$$H(A) = H_R(O(S^*(A_1),..., S^*(A_n))).$$

S použitím definice substituce dostáváme

$$H(A) = H_R(S^*(O(A_1,..., A_n))) = H_R(S^*(A)).$$

Je-li tedy množina M strukturální a uzavřená na R, pak je charakterizována matricí $<J/R, M[R]>$. Jak jsme totiž právě viděli, každý prvek M je v takovém případě verifikován každým homomorfismem do této matrice; a současně víme, že přirozený homomorfismus J do $<J/R, M[R]>$ neverifikuje žádný jiný výrok než prvek M. Výrok tedy patří do M tehdy a jen tehdy, když je verifikován každým homomorfismem do $<J/R, M[R]>$. Vezměme nyní za M množinu všech teorémů nějaké dané axiomatiky. Protože, jak jsme řekli, tato množina bude také strukturální, bude i ona charakterizována příslušnou matricí – v tomto případě to zřejmě bude matrice $<J/\cong, M[\cong]>$. Říkejme této matrici *Lindenbaumova matrice* pro danou axiomatiku.

Zdá se, že Lindenbaumova matrice pro danou axiomatiku, a speciálně přirozený homomorfismus do ní, tvoří pro tuto axiomatiku jakousi ‚přirozenou' sémantiku – výrok je totiž verifikován každým homomorfismem do této matrice právě tehdy, když je teorémem. Mohlo by se tedy zdát, že pro *jakoukoli* (strukturální) axiomatiku umíme triviálně vytvořit sémantiku, vzhledem ke které je tato axiomatika korektní a úplná. Skutečnost je však taková, že v důsledku toho, jakými způsoby byl pojem sémantiky historicky pro jednotlivé výrokové počty vymezován, není pro některé jazyky homomorfismus do příslušné Lindenbaumovy algebry legitimní sémantickou interpretací. Není tomu tak například v případě KVP: interpretace jazyka KVP je definována jako homomorfismus do *dvouprvkové* matrice, zatímco nosič jeho Lindenbaumovy matrice má tolik prvků, kolik je ekvivalenčních tříd výroků KVP podle ≅; a těch je rozhodně více než dvě. (Dále uvidíme, proč tomu tak je.)

Může nás také zajímat, kdy má Lindenbaumova matrice jenom jeden a kdy má více vyznačených prvků. Říkejme axiomatice *nejvýše intenzionální*, jestliže pro každé dva výroky A a B z $A \equiv B$ plyne $A \cong B$ (to jest každé dva inferenčně ekvivalentní výroky jsou také inferenčně intersubstitutivní); a nazývejme ji *hyperintenzionální*, není-li nejvýše intenzionální. Platí, že pro nejvýše intenzionální axiomatiky je Lindenbaumova matrice zaručeně jednoduchá, to jest má jediný vyznačený prvek. To plyne z faktu, že pro každé dva teorémy A a B zřejmě platí $A \equiv B$, a jestliže z toho plyne i $A \cong B$, pak teorémy musí tvořit jedinou ekvivalenční třídu podle ≅.

KVP i MVP jsou, jak se snadno ukáže, nejvýše intenzionální; příkladem hyperintenzionálních logik jsou pak SMVP.

7.4 Kripkovské verze ‚přirozené sémantiky'

Pro jakýkoli výrokový počet tedy existuje ‚přirozená', lindenbaumovská sémantika. Pro některé počty ovšem existuje i varianta této sémantiky, ve které jsou výroky interpretovány podmnožinami nějaké dané množiny, na jejíž prvky se pak můžeme dívat jako na možné světy. To platí zejména pro KVP a pro všechny výrokové počty, které jsou jeho nadstavbami.

Zpřesněme nyní definici Boolovy algebry, kterou jsme naznačili v oddíle 4.2. Algebru nazveme *Boolovou*, jsou-li mezi jejími operacemi binární operace *sup*, *inf*, unární operace *com* a nulární operace *map* a *mip* tak, že platí:

$$sup(x,y) = sup(y,x),$$
$$inf(x,y) = inf(y,x),$$
$$sup(x,sup(y,z)) = sup(sup(x,y),z),$$
$$inf(x,inf(y,z)) = inf(inf(x,y),z),$$
$$sup(x,x) = x,$$
$$inf(x,x) = x,$$
$$sup(x,inf(y,z)) = inf(sup(x,y),sup(x,z)),$$
$$inf(x,sup(y,z)) = sup(inf(x,y),inf(x,z)),$$
$$sup(x,map) = map,$$
$$inf(x,mip) = mip,$$
$$sup(x,com(x)) = map,$$
$$inf(x,com(x)) = mip.$$

Lindenbaumova algebra pro KVP je zřejmě Boolova – stačí definovat

$com([A]) = [\neg A]$,
$sup([A],[B]) = [A \vee B]$,
$inf([A],[B]) = [A \wedge B]$,
$mip = [A \wedge \neg A]$,
$map = [A \vee \neg A]$.

To, že je tato definice korektní, vyplývá z toho, že relace $\cong$ (která je pro KVP totožná s $\equiv$) je kongruencí. To, že takto definované operátory splňují klauzule definice Boolovy algebry, je záležitostí rutinního ověření.

Podmnožinu M nosiče Boolovy algebry nazveme *filtrem*, jestliže platí

(i) $mip \notin M$;
(ii) je-li $x \in M$ a $y \in M$, pak $inf(x,y) \in M$;
(iii) je-li $x \in M$ a $sup(x,y)=y$, pak $y \in M$.

Filtr nazveme *ultrafiltrem*, je-li maximální v tom smyslu, že není vlastní částí žádného filtru. Lze ukázat, že filtr je ultrafiltrem, právě když do něj pro každý prvek x nosiče patří (právě) jeden prvek z dvojice x a $com(x)$.

Algebru nazveme *množinovou*, je-li její nosič tvořen podmnožinami nějaké množiny N a jsou-li mezi jejími operacemi binární operace sjednocení a průniku, unární operace doplňku a dvě nulární operace, z nichž jedna dává celou N a druhá prázdnou množinu. Snadno se ověří, že každá množinová algebra je Boolova. Podle Stonovy věty ale naopak platí i to, že každá Boolova algebra Ω je izomorfní s určitou množinovou algebrou, konkrétně s algebrou, jejíž nosič je tvořen množinami ultrafiltrů Ω. Přitom, jak lze ukázat, existuje v případě KVP vzájemně jednoznačné zobrazení mezi ultrafiltry jeho Lindenbaumovy algebry a maximálními axiomaticky konzistentními teoriemi – množina výroků je totiž projekcí (to jest sjednocením prvků) ultrafiltru právě tehdy, když je to maximální axiomaticky konzistentní teorie (mk-teorie).

Abychom to ukázali, všimněme si, že A je v KVP odvoditelný z A_1, ..., A_n právě tehdy, když je

$$sup(inf([A_1], ..., [A_n]),[A]) = [A]$$

(kde $inf([A_1], ..., [A_n])$ je zkratka za $inf([A_1], inf([A_1], ..., inf([A_{n-1}], [A_n])...))$. A je totiž odvoditelný z A_1, ..., A_n právě tehdy, když je výrok $(A_1 \rightarrow ...(A_n \rightarrow A)...)$, a potažmo i jemu ekvivalentní výrok $(A_1\wedge...\wedge A_n)\rightarrow A$, teorémem. To ovšem nastává právě tehdy, když je teorémem výrok $\neg(A_1\wedge...\wedge A_n)\vee A$, a tedy když v příslušné Lindenbaumově algebře platí

$$\begin{aligned} map &= [\neg(A_1\wedge...\wedge A_n)\vee A] = sup([\neg(A_1\wedge...\wedge A_n)],[A]) \\ &= sup(com(inf([A_1], ..., [A_n])), [A]). \end{aligned}$$

A protože v Boolově algebře platí, že $sup(com(x),y) = map$ právě tehdy, když

$$sup(x,y) = y,$$

je A je odvoditelný z $A_1, ..., A_n$ právě tehdy, když

$$sup(inf([A_1], ..., [A_n]), [A]) = [A].$$

Pomocí tohoto výsledku je snadné ukázat, že podmnožina *M* nosiče Lindenbaumovy algebry splňuje (ii) a (iii) právě tehdy, když je její projekce na jazyk KVP teorií, to jest když obsahuje každý výrok, který je z ní odvoditelný; že je tedy filtrem (tj. splňuje (i)–(iii)) právě tehdy, když je její projekce konzistentní teorií; a že je ultrafiltrem, právě když je její projekce mk-teorií. Pro KVP tedy existuje i kripkovská, tj. ‚možnosvětová' varianta ‚přirozené sémantiky', při které jsou výroky interpretovány podmnožinami určité množiny, totiž množiny mk-teorií KVP. Mk-teorie tak v tomto smyslu tvoří ‚přirozené možné světy' KVP.

Analogicky existuje kripkovská varianta přirozené sémantiky i pro každou logiku, která je nadstavbou KVP (v tom smyslu, že má za teorémy všechny teorémy KVP) – i její Lindenbaumova matrice je totiž izomorfní s matricí tvořenou množinami mk-teorií této logiky. V případě hyperintenzionální logiky ovšem nebude vyznačena pouze množina totožná s celým univerzem, ale i některé další.

V případě logik, které nejsou nadstavbami KVP (to jest neplatí v nich všechny axiomy nebo odvozovací pravidla KVP), nebude Lindenbaumova algebra Boolova; přesto však lze někdy najít nějakou její kripkovskou (tj. množinovou) reprezentaci – jak jsme viděli na příkladě IVP a RVP.

7.5 Od ‚kripkovské' k ‚pravdivostně-hodnotové' sémantice

Konstrukce kripkovské varianty ‚přirozené sémantiky', kterou jsme právě předvedli, se opírá o fakt, že výrok je teorémem právě tehdy, když patří do každé mk-teorie. Tento fakt nás ale může vést i k úvahám o dalším druhu sémantiky.

Je-li *M* množina výroků jazyka *J*, pak její *charakteristickou funkcí* nazveme funkci, která každému prvku *M* přiřazuje pravdivostní hodnotu P a každému jinému výroku *J* hodnotu N. Výrok je tedy teorémem, přiřazuje-li mu charakteristická funkce každé mk-teorie hodnotu P – kdyby tedy bylo možné považovat za interpretace přímo tyto charakteristické funkce, měli bychom sémantiku s nesrovnatelně jednodušším souborem hodnot, než jsou množiny možných světů – totiž se souborem tvořeným pouhou dvojicí pravdivostních hodnot.

Co by nám mohlo zabránit v tom, abychom tyto charakteristické funkce za interpretace prostě prohlásili? To, že by nebyly ‚kompozicionální' – to jest že by to nebyly homomorfismy do žádné algebry s nosičem {P,N}. (Jinými slovy že by pro některý operátor nebylo obecně možné ‚spočítat' pravdivostní hodnotu výroku vytvořeného pomocí tohoto operátoru z pravdivostních hodnot jeho složek.)

My víme, že v případě KVP tyto funkce kompozicionální jsou – pro každý operátor máme pravdivostní tabulku. V případě KVP tedy můžeme k ‚pravdivostně-hodnotové sémantice' skutečně přejít – a tak dostáváme právě tu sémantiku, která je pro tento počet normálně brána za standardní. Fakt denotační nasycenosti KVP nám dále říká, že totéž nemůže platit pro žádný jiný výrokový počet, který má být od KVP netriviálně odlišný.

Jak to tedy bude s počty jinými než KVP? Víme, že ne pro každou z námi uvažovaných logik platí, že množina jejich teorémů tvoří právě průnik souboru všech mk-teorií (v důkazu tohoto faktu pro KVP jsme použili teorém [11], který nemusí být teorémem jiných logik). Co však pro každou platí, je to, že množina teorémů tvoří průnik souboru vůbec všech teorií; a pro některé logiky lze tento soubor dále příhodně zredukovat (tak například v rámci IVP se lze, jak jsme viděli, omezit na pk-teorie).

Nešlo by pak charakteristické funkce takových teorií nějakým způsobem ‚kompozicionalizovat' (to jest udělat z nich homomorfismy)? Vezměme IVP: abychom pro každou pk-teorii dostali funkci, která všem jejím prvkům přiřazuje vyznačenou hodnotu a je přitom kompozicionální, musely by mít tyto funkce (jak ukázal Gödel) nekonečný počet hodnot – a to znamená, že bychom takovým způsobem nedostali sémantiku, která by byla jednodušší než výchozí lindenbaumovská sémantika či její kripkovská verze. Podobně je tomu i s MVP.

Na druhé straně však existují logiky, ve kterých sice nevystačíme se dvěma hodnotami, ale nepotřebujeme jich nekonečně mnoho. Například pro 3VP-Ł (Oddíl 3.4) platí, že množina teorémů tvoří průnik souboru všech takových teorií, které pro každý výrok *A* obsahují právě jeden z trojice výroků *A*, $\neg A$ a $\neg(A\vee\neg A)$. Charakteristická funkce takové teorie ovšem není kompozicionální – například to, zda přiřazuje P výroku $\neg(A\vee\neg A)$, zjevně není jednoznačně určeno tím, zda přiřazuje P výroku *A*. Pro takovou teorii ale můžeme definovat jakousi ‚kvazicharakteristickou' funkci, která kompozicionální je: funkci přiřazující P právě všem jejím prvkům, avšak nepřiřazující všem ostatním N, nýbrž některým z nich X. Z příslušné charakteristické funkce tedy dokážeme udělat homomorfismus rozšířením oboru jejích hodnot o jeden prvek.

Pravdivostně-hodnotová sémantika je zajímavá zejména z hlediska logik, u kterých vystačíme s menším, konkrétněji konečným počtem hodnot. K takovým logikám nepatří IVP ani MVP, patří k nim však takové počty, jako je 3VP-Ł.

Dodatek A. Přirozená dedukce a sekventový počet

Axiomatický systém stanovuje, (i) co je z čeho odvoditelné a (ii) co je teorémem. V rámci KVP jsou tyto dvě věci převoditelné jedna na druhou: (a) A je teorémem právě tehdy, když je odvoditelný z prázdné množiny; a (b) A je odvoditelný z A_1, ..., A_n právě tehdy, když je $A_1 \rightarrow (...(A_n \rightarrow A)...)$ teorémem. Nemusíme se tedy příliš pozastavovat nad tím, který z těchto dvou pojmů máme vidět jako fundamentálnější.

Formulace axiomatických systémů, které jsme předkládali v této knize, byly nicméně založeny na maximalizaci role axiomů a minimalizaci role pravidel. Jak na to totiž poukázal již Frege, máme-li pravidlo (*mp*) a platí-li věta o dedukci (což můžeme stanovit v rámci definice implikace), pak každé další odvozovací pravidlo můžeme převést na teorém: máme-li pravidlo (P) odvozující A z A_1, ..., A_n, můžeme každé jeho použití reinterpretovat jako použití pravidla (*mp*) na teorém $A_1 \rightarrow (...(A_n \rightarrow A)...)$. To jest každý krok důkazu tvaru

m. A	i_1, ..., i_n, P

můžeme nahradit dvěma kroky:

m_1. $A_1 \rightarrow (...(A_n \rightarrow A)...)$	
m_2. A	i_1, ..., i_n, m_1

To znamená, že všechno, co dokážeme pomocí pravidla (P), dokážeme i pomocí příslušného axiomu a pravidla (*mp*).

Jak jsme ale na začátku této knihy konstatovali, logika je především věda o vyplývání a potažmo o odvoditelnosti – nebylo by tedy rozumnější se spíše než na teorémy soustředit právě na relaci odvoditelnosti? (Pravda, z hlediska KVP a některých dalších logik mezi tím není podstatný rozdíl; tak tomu však není u *každé* logiky.) Z tohoto hlediska nás může zajímat naopak redukovatelnost teorémů na odvozovací pravidla. Existuje nějaká metoda podobně jednoduchá jako ta Fregova?

Představme si, že máme zaručeno, že kdykoli je výrok A odvoditelný z výroků A_1, ..., A_n, je $A_n \rightarrow A$ odvoditelný z A_1, ..., A_{n-1} (jde o tu podstatnější polovinu věty o dedukci; druhou nám dává (*mp*)). Pak můžeme zřejmě kterýkoli axiom tvaru $A_1 \rightarrow (...(A_n \rightarrow A)...)$ nahradit pravidlem A_1, ..., A_n / A; protože z tohoto pravidla pak lze snadno kdykoli zpátky získat nahrazovaný axiom. Přijmeme-li tedy ‚metapravidlo‘

(*ded*) jestliže $A_1, ..., A_n / A$, pak $A_1, ..., A_{n-1} / A_n \to A$,

pak můžeme každý teorém tvaru $A_1 \to (...(A_n \to A)...)$ dostat jako přímý důsledek pravidla $A_1, ..., A_n / A$.

Předpokládejme tedy, že platí jak (*mp*), tak (*ded*). Pak můžeme, aniž bychom tím změnili množinu teorémů, přepsat axiomy KVP jako odvozovací pravidla:

(1*) $A, B / A$,
(2*) $A \to (B \to C), A \to B, A / C$,
(3*) $A \wedge B / A$,
(4*) $A \wedge B / B$,
(5*) $A, B / A \wedge B$,
(6*) $A / A \vee B$,
(7*) $B / A \vee B$,
(8*) $A \to C, B \to C, A \vee B / C$,
(9*) $A \to B, A \to \neg B / \neg A$,
(10*) $\neg\neg A / A$.

K tomu ovšem musíme připočítat i (*mp*) a (*ded*); avšak (1*) a (2*) jsou na druhé straně zřejmě redundantní (platí prostě v důsledku definice odvozování a (*mp*)). Namísto (*ded*) nám navíc stačí jednodušší pravidlo

(*ded′*) jestliže A / B, pak $/ A \to B$ (tj. $A \to B$ je teorémem).

Předpokládejme totiž, že platí (3*)–(10*), (*mp*) a (*ded′*); ukážeme, že pak nutně platí i (*ded*). Předpokládejme, že $A_1, ..., A_n / A$. Pak, v důsledku toho, že

$(...(A_1 \wedge A_2)... \wedge A_{n-1}) \wedge A_n / A_i$ pro každé $i=1, ..., n$,

platí i

$(...(A_1 \wedge A_2)... \wedge A_{n-1}) \wedge A_n / A$.

Takže v důsledku (*ded′*) je teorémem

$((...(A_1 \wedge A_2)... \wedge A_{n-1}) \wedge A_n) \rightarrow A.$

Z něj je však, jak lze snadno ukázat, odvoditelný

$((...(A_1 \wedge A_2)... \wedge A_{n-1}) \rightarrow (A_n \rightarrow A),$

takže i ten musí být teorémem. Z toho plyne, že

$(...(A_1 \wedge A_2)...) \wedge A_{n-1} \,/\, A_n \rightarrow A,$

a tudíž i

$A_1, ..., A_{n-1} \,/\, A_n \rightarrow A.$

To znamená, že jestliže $A_1, ..., A_n \,/\, A$, pak $A_1, ..., A_{n-1} \,/\, A_n \rightarrow A$ – a (*ded*) tedy skutečně platí.

Proveďme ještě ve výsledném seznamu odvozovacích pravidel několik víceméně formálních úprav:

(i) Zapisujme odvozovací pravidla jako ‚zlomky', tak, že nad čáru píšeme antecedent (výroky, ze kterých se odvozuje) a pod čáru konsekvent (výrok, který se odvozuje). Například (5^*) budeme zapisovat ve tvaru

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}$$

(ii) Píšeme-li

$$\begin{array}{c}[A] \\ B\end{array}$$

jako zkratku za ‚*B* je odvoditelný z *A*', můžeme (*ded*) uvést do tvaru

$$\frac{\begin{array}{c}[A] \\ B\end{array}}{A \rightarrow B}$$

Pak můžeme zřejmě také přepsat všechny výskyty implikace v antecedentech odvozovacích pravidel, s výjimkou (*mp*), tak, že například namísto (8^*) budeme mít

$$\frac{\begin{matrix}[A] & [B] & \\ C & C & A\vee B\end{matrix}}{C}$$

(iii) Zavedeme novou, ‚pomocnou' konstantu ⊥, pro kterou bude platit

$$\frac{A \quad \neg A}{\bot}$$

S její pomocí můžeme pravidlo (9^*) zřejmě nahradit pravidlem

$$\frac{\begin{matrix}[A]\\ \bot\end{matrix}}{\neg A}$$

Tím dostáváme systém tzv. *přirozené dedukce* pro KVP, který navrhl Gentzen (1934). Všimněme si, že v každém z jeho pravidel se vyskytuje jenom jeden logický operátor, a to vždy buď jen nad čarou, nebo jenom pod ní. Pravidlu, ve kterém se operátor vyskytuje v antecedentu, se říká *eliminační* (*odstraňující*) pravidlo pro tento operátor (nebo pravidlo typu *E*), zatímco to, ve kterém se operátor vyskytuje v konsekventu, se nazývá *introdukční* (*zaváděcí*, nebo pravidlo typu *I*):

$$(\wedge\mathrm{I})\quad \frac{A \quad B}{A\wedge B} \qquad (\wedge\mathrm{E}_1)\quad \frac{A\wedge B}{A} \qquad (\wedge\mathrm{E}_2)\quad \frac{A\wedge B}{B}$$

$$(\vee\mathrm{I}_1)\quad \frac{A}{A\vee B} \qquad (\vee\mathrm{I}_2)\quad \frac{B}{A\vee B} \qquad (\vee\mathrm{E})\quad \frac{\begin{matrix}[A] & [B] & \\ C & C & A\vee B\end{matrix}}{C}$$

$$(\rightarrow\mathrm{I})\quad \frac{\begin{matrix}[A]\\ B\end{matrix}}{A\rightarrow B} \qquad (\rightarrow\mathrm{E})\quad \frac{A \quad A\rightarrow B}{B}$$

$$(\neg \mathrm{I})\ \frac{\begin{matrix}[A]\\ \bot\end{matrix}}{\neg A} \qquad (\neg \mathrm{E}_1)\ \frac{A \quad \neg A}{\bot} \qquad (\neg \mathrm{E}_2)\ \frac{\neg\neg A}{A}$$

Systémy přirozené dedukce samozřejmě existují i pro jiné logické systémy, než je KVP. Tak například systém pro IVP získáme prostě tak, že vyškrtneme pravidlo ($\neg\mathrm{E}_2$). Systémy přirozené dedukce pro další typy výrokových počtů jsou obvykle komplikovanější, protože musí pracovat s různými omezeními na typy dedukcí, které se mohou vyskytovat v antecedentech odvozovacích pravidel (*viz* Prawitz, 1965).

Na systémy přirozené dedukce se ovšem můžeme dívat i jako na svého druhu axiomatické systémy: systémy, v nichž však nejde o odvozování výroků, ale případů odvození. Na takové myšlence je založen tzv. *sekventový počet*, který pochází stejně jako přirozená dedukce od Gentzena. Sekventem se zde v podstatě rozumí jednotlivý případ odvození, jako je A,B / $A\wedge B$. Gentzen ovšem zavádí jako zobecnění standardního vztahu odvozování vztah $\Rightarrow$, který spojuje konečnou posloupnost výroků nikoli s jednotlivým výrokem, ale opět s konečnou posloupností výroků; výsledné sekventy je pak třeba číst jako *Jestliže jsou pravdivé všechny výroky v antecedentu, pak je pravdivý alespoň jeden z výroků v konsekventu.* (Sekvent $A_1, ..., A_n \Rightarrow B_1, ..., B_n$ je tedy platný právě tehdy, když je výrok $(A_1\wedge...\wedge A_n) \rightarrow (B_1\vee...\vee B_n)$ tautologií KVP.) Platným sekventem KVP tedy bude například

$$A \Rightarrow A,B$$

nebo

$$\Rightarrow A,\neg A.$$

Systém, ke kterému se Gentzen dopracoval, má jediný axiom, a sice

$$A \Rightarrow A$$

a následující odvozovací pravidla (X, Y a Z zde zastupují libovolné konečné posloupnosti výroků, A a B výroky):

$$\frac{A, X \Rightarrow B \quad C \Rightarrow X, D}{A, C \Rightarrow B, D}$$

$$\frac{X \Rightarrow Y}{X \Rightarrow Y, A} \qquad \frac{X \Rightarrow Y}{X, A \Rightarrow Y}$$

$$\frac{X \Rightarrow Y, Z, Z}{X \Rightarrow Y, Z} \qquad \frac{X, Z, Z \Rightarrow Y}{X, Z \Rightarrow Y}$$

$$\frac{X \Rightarrow Y, A, B, Z}{X \Rightarrow Y, B, A, Z} \qquad \frac{X, A, B, Z \Rightarrow Y}{X, B, A, Z \Rightarrow Y}$$

$$\frac{X, A, B \Rightarrow Y}{X, A \wedge B \Rightarrow Y} \qquad \frac{X \Rightarrow Y, A \quad X \Rightarrow Y, B}{X \Rightarrow Y, A \wedge B}$$

$$\frac{X \Rightarrow Y, A, B}{X \Rightarrow Y, A \vee B} \qquad \frac{X, A \Rightarrow Y \quad X, B \Rightarrow Y}{X, A \vee B \Rightarrow Y}$$

$$\frac{X, A \Rightarrow Y, B}{X \Rightarrow Y, A \rightarrow B} \qquad \frac{X \Rightarrow Y, A \quad X, B \Rightarrow Y}{X, A \rightarrow B \Rightarrow Y}$$

$$\frac{X, A \Rightarrow Y}{X \Rightarrow Y, \neg A} \qquad \frac{X \Rightarrow Y, A}{X, \neg A \Rightarrow Y}$$

Prvním sedmi z těchto pravidel (to jest prvnímu a následujícím třem dvojicím) se říká *strukturální*; ostatní ustanovují inferenční vlastnosti jednotlivých operátorů. Lze ukázat, že sekvent je v rámci tohoto počtu dokazatelný právě tehdy, když je některý z výroků v jeho konsekventu odvoditelný z výroků v jeho antecedentu v rámci standardního KVP (*viz* například Smullyan, 1968). Navíc lze ukázat (a to byl Gentzenův klíčový výsledek), že první pravidlo, tzv. pravidlo *řezu*, je nadbytečné – cokoli lze dokázat, lze dokázat i bez jeho pomoci. Podrobněji o sekventovém počtu *viz* Švejdar (2002, §1.4).

Dodatek B. Sémantické rozhodovací stromy

Víme, že rozhodnout, zda je daný výrok KVP tautologií (a tudíž i teorémem), můžeme tak, že zkonstruujeme jeho pravdivostní tabulku. Existuje však i jiná rozhodovací strategie, která může být někdy efektivnější. Vezměme výrok

(*) $(A\wedge B)\rightarrow\neg(\neg A\vee\neg B)$.

Představme si, že bychom chtěli zjistit, zda je to tautologie, tedy zda mu každá interpretace přiřazuje hodnotu P. Uděláme to tak, že se pokusíme najít interpretaci, která mu přiřazuje N.

Výrok (*) má zřejmě hodnotu N právě tehdy, když platí:

(1) $A\wedge B$ má hodnotu P a $\neg(\neg A\vee\neg B)$ hodnotu N. Přitom

(2) $A\wedge B$ má hodnotu P právě tehdy, když mají tuto hodnotu jak A, tak B;

(3) $\neg(\neg A\vee\neg B)$ má hodnotu N právě tehdy, když má $\neg\neg(\neg A\vee\neg B)$, a tudíž i $\neg A\vee\neg B$, hodnotu P.

Výrok (*) má tedy hodnotu N tehdy a jen tehdy, když mají výroky A, B a $\neg A\vee\neg B$ hodnotu P. Kdy má ten poslední z nich hodnotu P? Tady máme zřejmě dvě alternativy:

(4) když má buď $\neg A$ hodnotu P, nebo $\neg B$ hodnotu P.

Shrnuto: uvažovaný výrok má hodnotu N právě tehdy, když mají hodnotu P výroky A a B a současně ji má i $\neg A$ nebo $\neg B$ (nebo, jinými slovy, když mají hodnotu P buď A, B a $\neg A$, nebo A, B a $\neg B$). Je zřejmé, že ani jedna z těchto dvou možností nastat nemůže, takže uvažovaný výrok nemůže mít hodnotu N, a je tedy tautologií.

Zatímco při konstrukci pravdivostní tabulky prostě probíráme všechna možná přiřazení pravdivostních hodnot atomickým podvýrokům daného výroku, touto metodou (kterou jako první zkoumal Beth, 1955) se cíleně snažíme zkonstruovat takové z nich, které by tento výrok učinilo nepravdivým. Najdeme-li nějaké takové, můžeme si ušetřit práci s procházením těch zbývajících.

Posloupnost kroků, kterými jsme se dobrali toho, že je (*) tautologie, můžeme znázornit v podobě následujícího ‚stromového' grafu:

	$\neg((A\wedge B)\rightarrow\neg(\neg A\vee\neg B))$	
(1)	$(A\wedge B)$	
(1)	$\neg\neg(\neg A\vee\neg B)$	
(2)	A	
(2)	B	
(3)	$\neg A\vee\neg B$	
(4)	$\neg A$	$\neg B$
	$\times$	$\times$

(*) je tautologií právě tehdy, neexistuje-li v tomto stromě ‚větev‘, jejíž všechny formule by mohly být současně pravdivé. (‚Větví‘ rozumíme posloupnost formulí vedoucí od prvního na poslední řádek, která si na rozcestích vybírá libovolnou z cest.) A taková větev zřejmě neexistuje.

Obecná pravidla pro konstrukci takovýchto rozhodovacích stromů (v literatuře se jim říká *semantic tableaux* – to se však plete se sémantickými tabulkami ve smyslu oddílu 2.3, takže my zde používáme zcela jiný název) spočívají v tom, že je pro každý výrok, který není atomický ani není negací atomického výroku, a pro jeho negaci uvedeno to, čemu budeme říkat jeho *rozpis*, to je nějaká konstelace jeho podvýroků nebo jejich negací, kterou je třeba k vytvářenému stromu přidat:

$\underline{A\wedge B}$
A
B

$\underline{\neg(A\wedge B)}$
$\neg A \qquad \neg B$

$\underline{\neg(A\vee B)}$
$\neg A$
$\neg B$

$\underline{A\vee B}$
$A \qquad B$

$\underline{\neg(A\rightarrow B)}$
A
$\neg B$

$\underline{A\rightarrow B}$
$\neg A \qquad B$

$\underline{\neg\neg A}$
A

Konstrukce stromu pak probíhá následujícím způsobem. Vezmeme negaci výchozího výroku, napíšeme ji na první řádek a pod ni napíšeme její rozpis. Pak bereme postupně výroky na následujících řádcích a pro každý z nich napíšeme jeho rozpis na konec stromu (pokud se tento strom někde pod ním větví, napíšeme rozpis na konec *každé z těchto větví*). Jakmile se nám v nějaké větvi objeví atomický výrok i jeho negace, tuto větev *uzavřeme* – napíšeme pod ni křížek a nebudeme v ní dále pokračovat. Tímto způsobem pokračujeme tak dlouho, dokud nejsou všechny větve uzavřeny a dokud existují výroky, které jsme ještě nerozepsali. V prvním případě interpretace, která by činila zkoumaný výrok nepravdivým, neexistuje, a tento výrok je tedy tautologií; v tom druhém nám každá neuzavřená větev definuje interpretaci, při které je tento výrok nepravdivý.

Lze snadno ukázat, že tato metoda vede ke spolehlivým výsledkům: skončíme-li konstrukci stromu, aniž bychom všechny větve uzavřeli, zkoumaný výrok tautologií není, zatímco jestliže se nám všechny větve uzavřou, tautologií je. (Pozorný čtenář také jistě zaregistruje příbuznost mezi uvedenými pravidly a obrácenými pravidly Gentzenova sekvenčního počtu uvedeného v předchozím dodatku.)

Tato metoda je ovšem přímočaře aplikovatelná pouze na KVP (jehož výroky mohou nabývat pouze dvě hodnoty). V modifikované podobě ji ale můžeme aplikovat i na téměř kterýkoli jiný výrokový počet.

Představme si, že chceme zjistit, zda je tautologií například nějaká formule MVP-K, řekněme

(**) $\Box(A\to B)\to\Box(\Box A\to\Box B)$.

Budeme hledat interpretaci *a svět v rámci této interpretace*, ve kterém je tento výrok nepravdivý. Předpokládejme, že je při nějaké interpretaci nepravdivý v možném světě w_i. Tak tomu je právě tehdy, když

(1) je ve w_i pravdivý $\Box(A\to B)$ a nepravdivý $\Box(\Box A\to\Box B)$. To opět platí právě tehdy, když

(2) je v každém světě dosažitelném z w_i pravdivý $A\to B$ (takový svět ale (zatím?) žádný nemáme, takže toto platí automaticky); a

(3) existuje-li svět w_j dosažitelný z w_i, ve kterém je nepravdivý $\Box A\to\Box B$; vzhledem ke (2) však musí platit, že

(2*) $A\to B$ je pravdivý ve w_j, a tudíž že

(4) ve w_j je buď nepravdivý A, nebo pravdivý B.

(5) $\Box A \rightarrow \Box B$ je ve w_j nepravdivý právě tehdy, když je v něm pravdivý $\Box A$ a nepravdivý $\Box B$, což nastává právě tehdy, když

(6) A je pravdivý v každém možném světě dosažitelném z w_j (zatím žádný takový nemáme); a

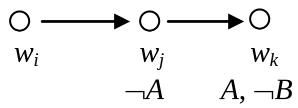
(7) existuje svět w_k dosažitelný z w_j, ve kterém je nepravdivý B; což pak ovšem vzhledem k (6) vyžaduje, aby

(6^*) A byl pravdivý ve w_k.

V podobě stromu to můžeme zapsat následovně:

	$\neg(\Box(A\rightarrow B)\rightarrow\Box(\Box A\rightarrow\Box B))$: w_i	
(1)	$\Box(A\rightarrow B)$: w_i	
(1)	$\neg\Box(\Box A\rightarrow\Box B)$: w_i	
(3)	w_i R w_j	
(3)	$\neg(\Box A\rightarrow\Box B)$: w_j	
(2^*)	$A\rightarrow B$: w_j	
(4)	$\neg A$: w_j	B: w_j
(5)	$\Box A$: w_j	$\Box A$: w_j
(6)	$\neg\Box B$: w_j	$\neg\Box B$: w_j
(7)	w_j R w_k	w_j R w_k
(7)	$\neg B$: w_k	$\neg B$: w_k
(6^*)	A: w_k	A: w_k

Ani jedna z obou větví tohoto stromu není uzavřená (což v případě tabulek pro modální logiku ovšem znamená, že neobsahuje žádnou formuli spolu s její negací *vztaženými k témuž světu*). Každá z těchto větví tedy vymezuje interpretaci, při které je (**) nepravdivý ve světě w_i. V případě první větve jde o interpretaci se světy w_i, w_j a w_k, takovými, že w_j je dosažitelný z w_i a w_k je dosažitelný z w_j, a že ve w_j je nepravdivý A a ve w_k je pravdivý A a nepravdivý B; graficky



V případě druhé větve jde o tentýž rámec s tím, že ve w_j je pravdivý B a ve w_k je opět pravdivý A a nepravdivý B:

$$\begin{array}{ccccc} \circ & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \circ \\ w_i & & w_j & & w_k \\ & & B & & A, \neg B \end{array}$$

Pravidla pro rozpis modálních formulí MVP-K můžeme obecně formulovat následovně:

$$\begin{array}{c} \Box A\text{: } w_i \\ \underline{w_i \text{ R } w_j} \\ A\text{: } w_j \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \underline{\neg\Box A\text{: } w_i} \\ w_i \text{ R } w_j \\ \neg A\text{: } w_j \end{array}$$

První z těchto pravidel se od těch, která jsme dosud probírali, liší tím, že v něm rozepisujeme *dva* řádky (řádek pod čarou přidáváme na konec stromu pro každou dvojici řádků tvaru uvedeného nad čarou). Druhé říká, že $\neg\Box A$: w_i rozepíšeme jako w_i R w_j (kde za j bereme index, který se dosud ve stromě nevyskytuje) plus $\neg A$: w_j.

Pravidla pro konstrukci sémantických tabulek pro celou řadu dalších výrokových logik probírá Priest (2001).

Dodatek C. Substrukturální logiky

V Oddíle 2.2 jsme definovali pojem dokazování (odvozování) jako pojem, který je ‚externí‘ jednotlivým logickým systémům v tom smyslu, že jeho definice zůstává pro všechny logiky stejná. V rámci KVP jsme pak prostřednictvím důkazu věty o dedukci ukázali, že se tento pojem v jistém smyslu kryje s pojmem implikace, který je ovšem ‚interní‘ – alternativní logiky ho mohou modifikovat. V důsledku toho pro většinu alternativních logik přestává věta o dedukci platit – tyto logiky svůj pojem implikace modifikují tak, že se přestává s pojmem odvozování krýt.

Naskýtá se ale otázka, zda je chápání odvozování jako externího pojmu rozumné: neměly by mít alternativní logiky možnost vymezovat alternativně i tento pojem? Neměli bychom jako externí fakt chápat spíše větu o dedukci a logikám ponechat možnost definovat svůj vlastní pojem odvození tak, aby se kryl s jejich pojmem implikace (tedy aby platilo, že A je podle dané logiky odvoditelný z $A_1, ..., A_n$ právě tehdy, když je výrok $A_1 \rightarrow (...(A_n \rightarrow A)...)$ teorémem této logiky)?

Na cestě ke svému sekventovému počtu (Dodatek A) Gentzen ukázal, že klasickou relaci odvoditelnosti je možné na obecné rovině vidět jako relaci mezi konečnými posloupnostmi výroků a výroky charakterizovanou následujícími principy (X, Y a Z reprezentují konečné posloupnosti výroků, A, B a C výroky):

$$A \Rightarrow A$$

$$\frac{X, Y \Rightarrow B}{X, A, Y \Rightarrow B}$$

$$\frac{X, A, A, Y \Rightarrow B}{X, A, Y \Rightarrow B}$$

$$\frac{X, A, B, Y \Rightarrow C}{X, B, A, Y \Rightarrow C}$$

$$\frac{X \Rightarrow A \quad Y, A, Z \Rightarrow B}{Y, X, Z \Rightarrow B}$$

První z nich říká, že každý výrok je odvoditelný ze sebe sama. Druhému se obvykle říká *zeslabení*: ten konstatuje, že je-li výrok odvoditelný z nějaké posloupnosti, pak je tím spíše odvoditelný z jakéhokoli rozšíření této posloupnosti. Třetí se nazývá *kontrakce* a říká, že v posloupnosti, ze které je nějaký výrok odvoditelný, stačí každý výrok uvádět jenom jednou. Čtvrtý, kterému se říká *permutace*, konstatuje, že je-li výrok odvoditelný z posloupnosti výroků, pak je odvoditelný i z jakékoli posloupnosti, která se skládá z týchž výroků, jenom v jiném pořadí. (Kontrakce a permutace zaručují, že odvozování můžeme chápat jako vztah mezi *množinami* – a nikoli posloupnostmi – výroků a výroky.) Posledním principem je tzv. *řez*: ten ustanovuje, že je-li A odvoditelný z X, pak cokoli je odvoditelné z nějaké posloupnosti obsahující A, je stejně tak odvoditelné z téže posloupnosti, která ale na místě A obsahuje X.

Tyto principy se (na rozdíl od principů charakterizujících jednotlivé logické operátory) nazývají *strukturálními charakteristikami* odvozování; a logiky, které pracují s relací odvození, jež na některou z těchto charakteristik rezignuje, se pak nazývají *substrukturálními*.

Vezměme například princip zeslabení. Ten říká, že je-li výrok A odvoditelný z nějaké množiny výroků, pak z ní nemůže přestat být odvoditelný, když do ní něco přidáme. Výrok $A \wedge B$ je například odvoditelný z A a B – tím spíše je tedy odvoditelný z A, B a C. V určitém smyslu slova ‚odvození' tomu ale tak není: to, z čeho $A \wedge B$ *skutečně* odvozujeme, jsou pouze A a B, takže by nebylo tak zcela nesmyslné říkat, že $A \wedge B$ je odvoditelný z A a B, avšak *nikoli* z A, B a C. Takto je například relace odvoditelnosti chápána v rámci relevančních logik: A je odvoditelný z $A_1, ..., A_n$ jenom tehdy, když jsou $A_1, ..., A_n$ v rámci odvození všechny skutečně netriviálním způsobem využity, to jest když jsou z hlediska odvození A skutečně *relevantní*. Relace odvoditelnosti, která by odpovídala relevanční implikaci, by tedy nesplňovala strukturální princip zeslabení.

Podrobnosti o substrukturálních logikách je možné najít ve sborníku Došena a Schrödera-Heistera (1993) a nověji v Restallově (2000) učebnici.

Dodatek D. Přehled vlastností vybraných výrokových počtů

Klasický výrokový počet, KVP (Kapitola 2)

Původně formulován: Fregem a dalšími

Axiomatický systém:

(1) $A \to (B \to A)$
(2) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
(3) $(A \wedge B) \to A$
(4) $(A \wedge B) \to B$
(5) $A \to (B \to (A \wedge B))$
(6) $A \to (A \vee B)$
(7) $B \to (A \vee B)$
(8) $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$
(9) $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$
(10) $\neg\neg A \to A$
$A, A \to B \,/\, B$

nebo

$A \to (B \to A)$
$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
$(\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to A))$
$A, A \to B \,/\, B$

Sémantika:

Interpretacemi jsou přiřazení pravdivostních hodnot P a N řídící se tabulkami

A	$\neg A$
P	N
N	P

A	B	$A \wedge B$
P	P	P
P	N	N
N	P	N
N	N	N

A	B	$A \vee B$
P	P	P
P	N	P
N	P	P
N	N	N

A	B	$A \to B$
P	P	P
P	N	N
N	P	P
N	N	P

Vyznačenou hodnotou je P (takže výrok je tautologií, přiřazuje-li mu každá interpretace P).

Silně korektní a úplný: ano

Věta o dedukci: platí

Kompaktní: ano

Rozhodnutelný: ano

Přehled teorémů, na které se v textu odkazuje:

[1] $(A \to A)$
[2] $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$
[3] $(A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$
[4] $(A \to (A \to B)) \to (A \to B)$
[5] $A \lor \neg A$
[6] $\neg A \to (A \to B)$
[7] $A \to \neg\neg A$
[8] $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$
[9] $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$
[10] $(\neg A \to \neg B) \to ((\neg A \to B) \to A)$
[11] $(A \to B) \to ((\neg A \to B) \to B)$
[12] $A \to (\neg B \to \neg (A \to B))$
[13] $\neg (A \to B) \to A$

Intuicionistický výrokový počet, IVP (Oddíly 3.2 a 6.1)

Původně formulován: Kolmogorovem, Heytingem a dalšími v axiomatické podobě

Axiomatický systém:

(1) $A \to (B \to A)$
(2) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
(3) $(A \wedge B) \to A$
(4) $(A \wedge B) \to B$
(5) $A \to (B \to (A \wedge B))$
(6) $A \to (A \vee B)$
(7) $B \to (A \vee B)$
(8) $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$
(9) $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$
(10) $\neg A \to (A \to B)$

$A, A \to B \,/\, B$

Sémantika (Kripke):

Interpretacemi jsou přiřazení podmnožin množiny možných světů, na které je definována *reflexivní* a *tranzitivní* binární relace dosažitelnosti R, řídící se pravidly:

$\{w' \mid w \mathrm{R}\, w'$ pro nějaký $w \in \|A\|\} \subseteq \|A\|$ pro každý atomický výrok A;
$\|\neg A\| = \{w \mid w' \notin \|A\|$ pro každý w' takový, že $w \mathrm{R}\, w'\}$;
$\|A \wedge A'\| = \{w \mid w \in \|A\|$ a $w \in \|A'\|\}$;
$\|A \vee A'\| = \{w \mid w \in \|A\|$ nebo $w \in \|A'\|\}$;
$\|A \to A'\| = \{w \mid w' \notin \|A\|$ nebo $w' \in \|A'\|$ pro každý w' takový, že $w \mathrm{R}\, w'\}$.

Vyznačenou hodnotou je množina všech možných světů.

Silně korektní a úplný: ano

Věta o dedukci: platí

Kompaktní: ano

Rozhodnutelný: ano

Přehled teorémů, na které se v textu odkazuje:

[14] $\neg\neg\neg A \rightarrow \neg A$

[15] $\neg\neg(\neg\neg A \rightarrow A)$:

[16] $\neg\neg(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B)$

[17] $\neg\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg\neg A \wedge \neg\neg B)$

Literatura: Epstein (2001, Kapitola 7); Priest (2001, Kapitola 6); Švejdar (2002, Kapitola 5.1); Gabbay a Guenthner (2002, Svazek 5).

Łukasiewiczův trojhodnotový výrokový počet, 3VP-Ł (Oddíl 3.4)

Původně formulován: Łukasiewiczem v sémantické podobě

Axiomatický systém (Wajsberg):

$A\to(B\to A)$
$(A\to B)\to((B\to C)\to(A\to C))$
$(\neg A\to\neg B)\to(B\to A)$
$((A\to\neg A)\to A)\to A$

$A,\ A\to B\ /\ B$

Sémantika:

Interpretacemi jsou přiřazení hodnot P, N a X řídící se tabulkami

A	$\neg A$
P	N
X	X
N	P

$A\wedge B$		B		
		P	**X**	**N**
A	**P**	P	X	N
	X	X	X	N
	N	N	N	N

$A\vee B$		B		
		P	**X**	**N**
A	**P**	P	P	P
	X	P	X	X
	N	P	X	N

$A\to B$		B		
		P	**X**	**N**
A	**P**	P	X	N
	X	P	P	X
	N	P	P	P

Vyznačenou hodnotou je P.

Silně korektní a úplný: ano

Věta o dedukci: neplatí pro $\to$, avšak platí pro odvozený operátor $\mapsto$

Kompaktní: ano

Rozhodnutelný: ano

Literatura: Epstein (2001, Kapitola 8); Gabbay a Guenthner (2002, Svazek 2); Gottwald (2000); Priest (2001, Kapitola 7).

Łukasiewiczův fuzzy výrokový počet, FVP-Ł (Oddíl 3.4)

Původně formulován: Łukasiewiczem a Tarskim v sémantické podobě

Axiomatický systém (Rose and Rosser):

$A\to(B\to A)$
$(A\to B)\to((B\to C)\to(A\to C))$
$(\neg A\to\neg B)\to(B\to A)$
$\underline{((A\to B)\to B)\to((B\to A)\to A)}$
$A, A\to B \,/\, B$

Sémantika:

Interpretacemi jsou přiřazení čísel z intervalu <0,1> řídící se pravidly

$\|\neg A\| = 1 - \|A\|$;
$\|A\wedge A'\| = \min(\|A\|, \|A'\|)$;
$\|A\vee A'\| = \max(\|A\|, \|A'\|)$;
$\|A\to A'\| = 1$, je-li $\|A\| \leq \|A'\|$
$= 1 - (\|A\| - \|A'\|)$, jinak.

Vyznačenou hodnotou je 1.

Silně korektní a úplný: ne

Věta o dedukci: neplatí

Kompaktní: ne

Rozhodnutelný: ano

Literatura: Epstein (2001, Kapitola 8); Gabbay a Guenthner (2002, Svazek 2); Gottwald (2000); Hájek (1998); Priest (2001, Kapitola 11).

Relevanční výrokový počet RVP-B (Oddíly 3.5 a 6.2)

Původně formulován: Routleyem a spol. v sémantické i axiomatické podobě

Axiomatický systém:

$A \to A$
$A \to (A \vee B)$
$B \to (A \vee B)$
$(A \wedge B) \to A$
$(A \wedge B) \to B$
$(A \wedge (B \vee C)) \to ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$
$((A \to B) \wedge (A \to C)) \to ((A \to (B \wedge C))$
$((A \to C) \wedge (B \to C)) \to ((A \vee B) \to C)$
$\neg\neg A \to A$

$A, A \to B \,/\, B$
$A, B \,/\, A \wedge B$
$A \to B \,/\, (C \to A) \to (C \to B)$
$A \to B \,/\, (B \to C) \to (A \to C)$
$A \to \neg B \,/\, B \to \neg A$

Sémantika:

Interpretacemi jsou přiřazení podmnožin množiny možných světů. Tato množina může obsahovat nestandardní možné světy a jsou na ní definovány (i) ternární relace R taková, že pro každý standardní svět w platí R$ww'w''$ právě tehdy, když $w' = w''$, a (ii) unární funkce *. Interpretace jsou vymezeny pravidly:

$\|\neg A\| = \{w \mid w^* \notin \|A\|\}$;
$\|A \wedge B\| = \{w \mid w \in \|A\|$ a $w \in \|B\|\}$;
$\|A \vee B\| = \{w \mid w \in \|A\|$ nebo $w \in \|B\|\}$;
$\|A \to B\| = \{w \mid$ pro každé w' a w'' takové, že R$ww'w''$, je $w' \notin \|A\|$, nebo $w'' \in \|B\|\}$.

Vyznačenou hodnotou je každá množina možných světů, která obsahuje všechny standardní světy.

Silně korektní a úplný: ano

Věta o dedukci: neplatí

Kompaktní: ano

Rozhodnutelný: ano

Literatura: Gabbay a Guenthner (2002, Svazek 6); Priest (2001, Kapitola 10).

Relevanční výrokový počet RVP-R (Oddíly 3.5 a 6.2)

Původně formulován: Andersonem a Belnapem v axiomatické podobě

Axiomatický systém:

$A\to A$
$(A\to B)\to((B\to C)\to(A\to C))$
$(A\to(B\to C))\to(B\to(A\to C))$
$(A\to(A\to B))\to(A\to B)$
$A\to(A\vee B)$
$B\to(A\vee B)$
$(A\wedge B)\to A$
$(A\wedge B)\to B$
$(A\wedge(B\vee C))\to ((A\wedge B)\vee(A\wedge C))$
$((A\to B)\wedge(A\to C))\to(A\to(B\wedge C))$
$((A\to C)\wedge(B\to C))\to((A\vee B)\to C)$
$\neg\neg A\to A$
$(A\to\neg B)\to(B\to\neg A)$
$A, A\to B\ /\ B$
$A, B\ /\ A\wedge B$

Sémantika (Routley a spol.):

Interpretacemi jsou přiřazení podmnožin množiny možných světů. Tato množina může obsahovat nestandardní možné světy a jsou na ní definovány (i) ternární relace R, která splňuje to, že pro každý standardní svět w platí R$ww'w''$ právě tehdy, když $w' = w''$, plus některá další omezení; a (ii) unární funkce *. Interpretace jsou vymezeny pravidly uvedenými u RVP-B (*viz* výše).
Vyznačenou hodnotou je každá množina možných světů, která obsahuje všechny standardní světy.

Silně korektní a úplný: ano

Věta o dedukci: neplatí

Kompaktní: ano

Rozhodnutelný: ne

Literatura: Gabbay a Guenthner (2002, Svazek 6); Priest (2001, Kapitola 10).

Relevanční výrokový počet RVP-E (Oddíly 3.5 a 6.2)

Původně formulován: Andersonem a Belnapem v axiomatické podobě

Axiomatický systém:

$A \to A$
$(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$
$(A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$
$(A \to C) \to (((A \to C) \to B) \to B)$
$A \to (A \lor B)$
$B \to (A \lor B)$
$(A \land B) \to A$
$(A \land B) \to B$
$(((A \to A) \to A) \land ((B \to B) \to B)) \to (((A \land B) \to (A \land B)) \to (A \land B))$.
$(A \land (B \lor C)) \to ((A \land B) \lor (A \land C))$
$((A \to B) \land (A \to C)) \to ((A \to (B \land C))$
$((A \to C) \land (B \to C)) \to ((A \lor B) \to C)$
$(A \to \neg A) \to \neg A$
$\neg\neg A \to A$
$\underline{(A \to \neg B) \to (B \to \neg A)}$
$A, A \to B \,/\, B$
$A, B \,/\, A \land B$

Sémantika (Routley a spol.):

Interpretacemi jsou přiřazení podmnožin množiny možných světů. Tato množina může obsahovat nestandardní možné světy a jsou na ní definovány (i) ternární relace R, která splňuje to, že pro každý standardní svět w platí R$ww'w''$ právě tehdy, když $w' = w''$, plus některá další omezení; a (ii) unární funkce *. Interpretace jsou vymezeny pravidly uvedenými u RVP-B (*viz* výše).

Vyznačenou hodnotou je každá množina možných světů, která obsahuje všechny standardní světy.

Silně korektní a úplný: ano

Věta o dedukci: neplatí

Kompaktní: ano

Rozhodnutelný: ne

Literatura: Gabbay a Guenthner (2002, Svazek 6); Priest (2001, Kapitola 10).

Modální výrokový počet MVP-K (Oddíl 4.6)

Původně formulován: Kripkem v axiomatické podobě

Axiomatický systém:

systém KVP plus navíc

$\underline{\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)}$

$A \,/\, \Box A$

Sémantika (Kripke):

Interpretacemi jsou přiřazení podmnožin množiny možných světů, na které je definována binární relace dosažitelnosti R, řídící se pravidly:

$\|\neg A\| = \{w \mid w \notin \|A\|\}$;
$\|\Box A\| = \{w \mid w' \in \|A\|$ pro každý možný svět w' takový, že w R $w'\}$;
$\|A \wedge B\| = \{w \mid w \in \|A\|$ a $w \in \|B\|\}$;
$\|A \vee B\| = \{w \mid w \in \|A\|$ nebo $w \in \|B\|\}$;
$\|A \to B\| = \{w \mid w \notin \|A\|$ nebo $w \in \|B\|\}$.

Vyznačenou hodnotou je množina všech možných světů.

Silně korektní a úplný: ano

Věta o dedukci: neplatí

Kompaktní: ano

Rozhodnutelný: ano

Literatura: Epstein (2001, Kapitola 6); Gabbay a Guenthner (2002, Svazek 3); Goldblatt (1987, Část I); Chellas (1980); Priest (2001, Kapitola 3); Girle (2000, Kapitola 3); Blackburn et al. (2000).

Modální výrokový počet MVP-T (Oddíl 5.1)

Původně formulován: Feysem a nezávisle na něm von Wrightem v axiomatické podobě

Axiomatický systém:

systém KVP plus navíc

$\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$

$\Box A \rightarrow A$

$A \,/\, \Box A$

Sémantika (Kripke):

Interpretacemi jsou přiřazení podmnožin množiny možných světů, na které je definována *reflexivní* binární relace dosažitelnosti R, řídící se stejnými pravidly jako interpretace MVP-K (*viz* výše).

Vyznačenou hodnotou je množina všech možných světů.

Silně korektní a úplný: ano

Věta o dedukci: neplatí

Kompaktní: ano

Rozhodnutelný: ano

Literatura: Epstein (2001, Kapitola 6); Gabbay a Guenthner (2002, Svazek 3); Goldblatt (1987, Část I); Hughes a Cresswell (1968; 1984); Chellas (1980); Priest (2001, Kapitola 3); Girle (2000, Kapitola 3); Blackburn et al. (2000).

Modální výrokový počet MVP-B (Oddíl 5.1)

Původně formulován: Brouwerem v axiomatické podobě

Axiomatický systém:

systém KVP plus navíc

$\Box(A\rightarrow B)\rightarrow(\Box A\rightarrow\Box B)$

$\Box A\rightarrow A$

$A\rightarrow\Box\Diamond A$

$A\ /\ \Box A$

Sémantika (Kripke):

Interpretacemi jsou přiřazení podmnožin množiny možných světů, na které je definována *reflexivní* a *symetrická* binární relace dosažitelnosti R, řídící se stejnými pravidly jako interpretace MVP-K (*viz* výše).

Vyznačenou hodnotou je množina všech možných světů.

Silně korektní a úplný: ano

Věta o dedukci: neplatí

Kompaktní: ano

Rozhodnutelný: ano

Literatura: Epstein (2001, Kapitola 6); Gabbay a Guenthner (2002, Svazek 3); Goldblatt (1987, Část I); Chellas (1980); Priest (2001, Kapitola 3); Blackburn et al. (2000).

Modální výrokový počet MVP-S4 (Oddíl 5.1)

Původně formulován: C. I. Lewisem v axiomatické podobě

Axiomatický systém:

systém KVP plus navíc

$\Box(A\rightarrow B)\rightarrow(\Box A\rightarrow\Box B)$

$\Box A\rightarrow A$

$\Box A\rightarrow\Box\Box A$

A / $\Box A$

Sémantika (Kripke):

Interpretacemi jsou přiřazení podmnožin množiny možných světů, na které je definována *reflexivní* a *tranzitivní* binární relace dosažitelnosti R, řídící se stejnými pravidly jako interpretace MVP-K (*viz* výše).

Vyznačenou hodnotou je množina všech možných světů.

Silně korektní a úplný: ano

Věta o dedukci: neplatí

Kompaktní: ano

Rozhodnutelný: ano

Literatura: Epstein (2001, Kapitola 6); Gabbay a Guenthner (2002, Svazek 3); Goldblatt (1987, Část I); Hughes a Cresswell (1968; 1984); Chellas (1980); Priest (2001, Kapitola 3); Girle (2000, Kapitola 3); Blackburn et al. (2000).

Modální výrokový počet MVP-S5 (Oddíl 4.5)

Původně formulován: C. I. Lewisem v axiomatické podobě

Axiomatický systém:

systém KVP plus navíc

$\Box(A\rightarrow B)\rightarrow(\Box A\rightarrow\Box B)$

$\Box A\rightarrow A$

$\Diamond A\rightarrow\Box\Diamond A$

$A\ /\ \Box A$

Sémantika (Kripke):

Interpretacemi jsou přiřazení podmnožin množiny možných světů, na které je definována *reflexivní*, *symetrická* a *tranzitivní* binární relace dosažitelnosti R, řídící se stejnými pravidly jako interpretace MVP-K (*viz* výše).

Vyznačenou hodnotou je množina všech možných světů.

Silně korektní a úplný: ano

Věta o dedukci: neplatí

Kompaktní: ano

Rozhodnutelný: ano

Literatura: Epstein (2001, Kapitola 6); Gabbay a Guenthner (2002, Svazek 3); Goldblatt (1987, Část I); Hughes a Cresswell (1968; 1984); Chellas (1980); Priest (2001, Kapitola 3); Girle (2000, Kapitola 2); Blackburn et al. (2000).

Slabý modální výrokový počet SMVP-S1 (Oddíl 5.4)

Původně formulován: C. I. Lewisem v axiomatické podobě

Axiomatický systém:

systém KVP plus navíc

$\Box A \rightarrow A$

$\underline{\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box(B \rightarrow C) \rightarrow \Box(A \rightarrow C))}$

A / $\Box A$, je-li A teorémem KVP

$A \leftrightarrow B$ / $C \leftrightarrow C[A/B]$

Sémantika: obecně přijímaná neexistuje

Věta o dedukci: neplatí

Kompaktní: ano

Rozhodnutelný: ano

Literatura: Gabbay a Guenthner (2002, Svazek 3); Hughes a Cresswell (1968; 1984); Priest (2001, Kapitola 4).

Slabý modální výrokový počet SMVP-S2 (Oddíl 5.4)

Původně formulován: C. I. Lewisem v axiomatické podobě

Axiomatický systém:

systém KVP plus navíc
$\Box A \rightarrow A$
$\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$
$A \,/\, \Box A$, je-li A teorémem KVP
$\Box(A \rightarrow B) \,/\, \Box(\Box A \rightarrow \Box B)$

Sémantika:

Interpretacemi jsou přiřazení podmnožin množiny možných světů, která může obsahovat nestandardní možné světy a na které je definována *reflexivní* binární relace dosažitelnosti R, řídící se stejnými pravidly jako interpretace MVP-K (*viz* výše).
Vyznačenou hodnotou je každá množina možných světů, která obsahuje všechny standardní světy.

Silně korektní a úplný: ?

Věta o dedukci: neplatí

Kompaktní: ?

Rozhodnutelný: ano

Literatura: Gabbay a Guenthner (2002, Svazek 3); Hughes a Cresswell (1968; 1984); Priest (2001, Kapitola 4); Girle (2000, Kapitola 5).

Slabý modální výrokový počet SMVP-S3 (Oddíl 5.4)

Původně formulován: C. I. Lewisem v axiomatické podobě

Axiomatický systém:

systém KVP plus navíc

$\Box A \rightarrow A$

$\underline{\Box(\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B))}$

A / $\Box A$, je-li A teorémem KVP

Sémantika (Kripke):

Interpretacemi jsou přiřazení podmnožin množiny možných světů, která může obsahovat nestandardní možné světy a na které je definována *reflexivní* a *tranzitivní* binární relace dosažitelnosti R, řídící se stejnými pravidly jako interpretace MVP-K (*viz* výše).

Vyznačenou hodnotou je každá množina možných světů, která obsahuje všechny standardní světy.

Silně korektní a úplný: ?

Věta o dedukci: neplatí

Kompaktní: ?

Rozhodnutelný: ano

Literatura: Gabbay a Guenthner (2002, Svazek 3); Hughes a Cresswell (1968; 1984); Priest (2001, Kapitola 4); Girle (2000, Kapitola 5).

Dynamický výrokový počet, DVP (Oddíl 6.3)

Původně formulován: Prattem v sémantické podobě

Axiomatický systém (Goldblatt):

systém KVP plus navíc

$[X](A\to B)\to([X]A\to[X]B)$

$[X\oplus Y]A \leftrightarrow [X][Y]A$

$[X\cup Y]A \leftrightarrow ([X]A\wedge[Y]A)$

$[X^*]A \to (A\wedge[X][X^*]A)$

$[X^*](A \to [X]A) \to (A \to [X^*]A)$

$[A?]B \leftrightarrow (A\to B)$

$A \,/\, [X]A$

Sémantika:

Interpretacemi jsou přiřazení podmnožin množiny možných světů výrokům a binárních relací na této množině programům, řídící se pravidly (kde R_p je relace přiřazená programu p):

$R_{X^*} = \{<w,w'> \mid$ existují $w_1,\ldots,w_n$ tak, že $w=w_1$, $w'=w_n$ a $\{<w_1,w_2>,\ldots,<w_{n-1},w_n>\}\subseteq R_X\}$;

$R_{X\oplus Y} = \{<w,w'> \mid$ existuje w'' tak, že $<w,w''>\in R_X$ a $<w'',w'>\in R_Y\}$;

$R_{X\cup Y} = \{<w,w'> \mid <w,w'>\in R_X$ nebo $<w,w'>\in R_Y\}$;

$R_{A?} = \{<w,w'> \mid w = w'$ a $w\in \|A\|\}$;

$\|\neg A\| = \{w \mid w\notin \|A\|\}$;

$\|A\wedge A'\| = \{w \mid w\in \|A\|$ a $w\in \|A'\|\}$;

$\|A\vee A'\| = \{w \mid w\in \|A\|$ nebo $w \in \|A'\|\}$;

$\|A\to A'\| = \{w \mid w\notin \|A\|$ nebo $w\in \|A'\|\}$;

$\|[X]A\| = \{w \mid w'\in \|A\|$ pro všechny w' takové, že $<w,w'>\in R_X\}$.

Vyznačenou hodnotou je množina všech možných světů.

Silně korektní a úplný: ne

Věta o dedukci: neplatí

Kompaktní: ne

Rozhodnutelný: ano

Literatura: van Benthem (1997, Kapitola 3.4); Gabbay a Guenthner (2002, Svazek 4); Goldblatt (1987, Kapitola 10); Harel et al. (2000); Girle (2000, Kapitola 9); Blackburn et al. (2000).

Citovaná literatura

Anderson, A. R. a N. D. Belnap, eds. (1975; 1992): *Entailment: The Logic of Relevance and Necessity*, Princeton University Press, Princeton, 2 svazky.

Barwise, J., ed. (1977): *Handbook of Mathematical Logic*, North-Holland, Amsterdam.

Beltrametti, E. a G. Cassinelli (1981): *The Logic of Quantum Mechanics*, Addison--Wesley, Reading.

van Benthem, J. (1997): *Exploring Logical Dynamics*, CSLI, Stanford.

Beth, E. W. (1955): ‚Semantic Entailment and Formal Derivability', *Mededelingen van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wettenschappen, Afdeling Letterkunde, N. R.*, vol. 18, Amsterdam.

Blackburn, P., M. de Rijke a Y. Venema (2000): *Modal Logic*, Cambridge University Press, Cambridge.

Bočvar, D. A. (1939/40): ‚Ob odnom trjochznačnom isčislenii i ego primenenii k analizu rasširjonnogo funkcionaľnogo isčislenija' 1; 2, Matěmatičeskij sbornik 4; 5, 287–308; 5–119.

Boolos, G. (1979): *The Unprovability of Consistency*, Cambridge University Press, Cambridge.

Brouwer, L. E. J. (1908): ‚De onbetrouwbaarheid der logische principes', *Tijdschrift voor wijsbegeerte* 2, 152–8; anglický překlad ‚The Unreliability of the Logical Principles', in Brouwer: *Collected Works*, vol. 1: *Philosophy and Foundations of Mathematics* (ed. A. Heyting), North Holland, Amsterdam, 1975.

Brouwer, L. E. J. (1913): ‚Intuitionisme en formalisme', *Wiskundig Tijdschrift* 9, 180–211; anglický překlad ‚Intuitionism and Formalism', in P. Benacerraf a H. Putnam (eds.): *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, Cambridge University Press, Cambridge, 1964.

Cohn, P. M. (1981): *Universal Algebra*, Reidel, Dordrecht.

Davidson, D. (1974): ‚On the Very Idea of a Conceptual Scheme', *Proceedings and Addresses of the American Philosophical Association* 47; český překlad ‚O samotné myšlence pojmového schématu' v Peregrin (1998).

Devlin, K. (1976): *The Language of Mathematics*, Freeman, New York; český překlad *Jazyk matematiky*, Argo/Dokořán, Praha, 2002.

Došen, K. a P. Schröder-Heister, eds. (1993): *Substructural Logics*, Clarendon Press, Oxford.

Dummett, M. (1977): *Elements of Intuitionism*, Clarendon Press, Oxford.

Dummett, M. (1991): *The Logical Basis of Metaphysics*, Harvard University Press, Cambridge (Mass.).

Epstein, R. L. (2001): *Propositional Logics*, druhé vydání, Wadsworth, Belmont.

Feys, R. (1937; 1938): ‚Les logiques nouvelles des modalités', *Revue Néoscholastique de Philosophie* 40; 41, 517–53; 217–52.

Gabbay, D. a F. Guenthner, eds. (2002): *Handbook of Philosophical Logic*, druhé vydání, Kluwer, Dordrecht.

Gentzen, G. (1934): ‚Untersuchungen über das logische Schliessen I; II‘, *Mathematische Zeitschrift* 39, 176–210.

Girard, J.-Y. (1987): ‚Linear Logic‘, *Theoretical Computer Science* 50, 1–101.

Girle, R. (2000): *Modal Logics and Philosophy*, McGill-Queen‘s University Press, Montreal & Kingston.

Gödel, K. (1932): ‚Zum intuitionistischen Aussagenkalkül‘, *Anzeiger der Akademie der Wissenschaften Wien*, *mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse* 69, 65–6.

Goldblatt, R. (1975): ‚First-order definability in modal logic‘, *Journal of Symbolic Logic* 40, 35–40.

Goldblatt, R. (1987): *Logics of Time and Computation*, CSLI, Stanford.

Gottwald, S. (2000): *A treatise on many-valued logics*, Research Studies Press.

Haack, S. (1996): *Deviant Logic, Fuzzy Logic*, University of Chicago Press, Chicago.

Hájek, P. (1998): *Metamathematics of Fuzzy Logic*, Kluwer, Dordrecht.

Hájek, P. a A. Sochor (1998): ‚Klasická logika v kontextu svých zobecnění a boj docenta Fialy proti větrným mlýnům‘, *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie* 43, 39–45.

Hallett, M. (1994): ‚Hilbert‘s Axiomatic Method and the Laws of Thought‘, in A. George (ed.): *Mathematics and Mind*, Oxford University Press, New York.

Harel, D., D. Kozen a J. Tyurin (2000): *Dynamic Logic*, MIT Press, Boston.

Heyting, A. (1930): ‚Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik‘ (‚The Formal Rules of Intuitionistic Logic‘), in *Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften*, Berlin.

Heyting, A. (1934): *Mathematische Grundlagenforschung. Intuitionismus. Beweistheorie*, Springer, Berlin.

Heyting, A. (1956): *Intuitionism: An Introduction*, North Holland, Amsterdam (3., přepracované vydání vyšlo v roce 1971).

Hilbert, D. a W. Ackermann (1928): *Grundzüge der theoretischen Logik*, Springer, Berlin (2. vydání 1938).

Hintikka, J. (1996): *The Principles of Mathematics Revisited*, Cambridge University Press, Cambridge.

Hughes, G. E. a M. J. Cresswell (1968): *An Introduction to Modal Logic*, Routledge, London; přepracovaná verze *A New Introduction to Modal Logic*, Routledge, London, 1996.

Hughes, G. E. a M. J. Cresswell (1984): *Companion to Modal Logic*, Routledge, London.

Chellas, B. F. (1980): *Modal Logic: An Introduction*, Cambridge University Press, Cambridge.

Ježek, J. (1976): *Univerzální algebra a teorie modelů*, SNTL, Praha.

Johansson, I. (1936): ‚Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus‘, *Compositio mathematica* 4, 119–136.

Johnson-Laird, P. N. (1983): *Mental Models*, Harvard University Press, Cambridge (Mass.).

Kleene, S. C. (1952): *Introduction to Metamathematics*, Van Nostrand, Princeton.

Kleene, S. C. (1967): *Mathematical Logic*, Wiley, New York.

Kolář, P. (1999): *Argumenty filosofické logiky*, Filosofia, Praha.

Kolář, P. a V. Svoboda (1997): *Logika a etika*, Filosofia, Praha.

Kolman, V. (2002): *Logika Gottloba Frega*, Filosofia, Praha.

Kracht, M. (1993): ‚How Completeness and Correspondence Theory Got Married', in M. de Rijke (ed.): *Diamonds and Defaults*, Kluwer, Dordrecht, 175–214.

Kripke, S. (1963): ‚Semantical Analysis of Modal Logic I (Normal Modal Propositional Calculi)', *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik* 9, 67–96.

Kripke, S. (1963): ‚Semantical Considerations on Modal Logic', *Acta Philosophica Fennica* 16, 83–94.

Kripke, S. (1965a): ‚Semantical Analysis of Modal Logic II (Non-Normal Modal Propositional Calculi)', in J. W. Addison, L. Henkin a A. Tarski (eds.): *The Theory of Models*, North-Holland, Amsterdam, 206–220.

Kripke, S. (1965b): ‚Semantical Analyses of Intuitionistic Logic', in J. Crossley and M. Dummett (eds.): *Formal Systems and Recursive Functions*, North Holland, Amsterdam, 92–130.

Lewis, C. I. a C. H. Langford (1932): *Symbolic Logic*, Century, New York.

Łukasiewicz, J. a A. Tarski (1930): ‚Untersuchungen Über den Aussagenkalkül', *Comptes Rendus des Seances de la Societe des Sciences et des Lettres de Varsovie*, Cl. III, 23, 30–50.

Łukasiewicz, J. (1930) ‚Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls', *Comptes Rendus des Seances de la Societe des Sciences et des Lettres de Varsovie*, Cl. III, 23, 51–77.

Malina, J. a J. Novotný, eds. (1996): *Kurt Gödel*, Nadace Universitas Masarykiana, Brno.

Mendelson, E. (1964): *Introduction to Mathematical Logic*, Wadsworth, Pacific Grove.

Meredith, C. A. (1953): ‚Single Axioms for the System (C,N), (C,O) and (A,N) of the two-valued propositional caclulus', *Journal of Computational Systems* 3, 155–164.

Mleziva, M. (1970): *Neklasické logiky*, Svoboda, Praha.

Moore, G. H. (1988): ‚The Emergence of First-Order Logic', in W. Aspray a P. Kitcher (eds.): *History and Philosophy of Modern Mathematics*, University of Minnesota Press, Minneapolis, 95–135.

Peregrin, J., ed. (1998): *Obrat k jazyku: druhé kolo*, Filosofia, Praha.

Peregrin, J. (1999): *Význam a struktura*, OIKOYMENH, Praha.

Peregrin, J. (2000a): ‚The ‚Natural' and the ‚Formal'', *Journal of Philosophical Logic* 29, 75–101.

Peregrin, J. (2000b): ‚‚Fregean' Logic and ‚Russellian' Logic', *Australasian Journal of Philosophy* 78, 557–575.

Popkorn, S. (1992): *First Steps in Modal Logic*, Cambridge University Press, Cambridge.

Pratt, V. R. (1976): ‚Semantical Considerations on Floyd-Hoare Logic‘, *Proceedings of the 17th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, 109–121.

Prawitz, D. (1965): *Natural Deduction*, Almqvist & Wiksell, Stockholm.

Priest, G. (2001): *An Introduction to Non-Classical Logics*, Cambridge University Press, Cambridge.

Prior, A. N. (1957): *Time and Modality*, Clarendon Press, Oxford.

Restall, G. (2000): *Introduction to Substructural Logics*, Routledge, London.

Rieger, L. (1967): *Algebraic Methods of Mathematical Logic*, Academia, Praha.

Rose, A. a J. B. Rosser (1958): ‚Fragments of many-valued statement calculi‘, *Transactions of the American Mathematical Society* 87, 1–53.

Routley R., V. Plumwood, R. K. Meyer a R. Brady (1982): *Relevant Logics and Their Rivals*, vol. 1: *The Basic Philosophical and Semantical Theory*, Atascadero, Ridgeview.

Slupecki, J. (1936): ‚Der volle dreiwertige Aussagenkalkül‘, *Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie*.

Smullyan, R. M. (1968): *First-order logic*, Springer, Berlin; slovenský překlad *Logika prvého rádu*, Alfa, Bratislava, 1979.

Sochor, A. (2001): *Klasická matematická logika*, Karolinum, Praha.

Švejdar, V. (2002): *Logika. Neúplnost, složitost a nutnost*, Academia, Praha.

Tarski, A. (1965): *Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences*, Oxford University Press, Oxford; český překlad *Úvod do logiky*, Academia, Praha, 1969.

von Wright, G. H. (1951): *An Essay in Modal Logic*, North Holland, Amsterdam.

Wajsberg, M. (1931): ‚Aksjomatyzacja trójwartościowego rachunku zdan‘, *Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie*, Cl.iii, 24, 126–1

Rejstřík

(*Kurzívou jsou vytištěny stránky, na kterých se nachází definice příslušného pojmu; tučně jsou vytištěny stránky kapitol, které přímo o tomto pojmu pojednávají.*)