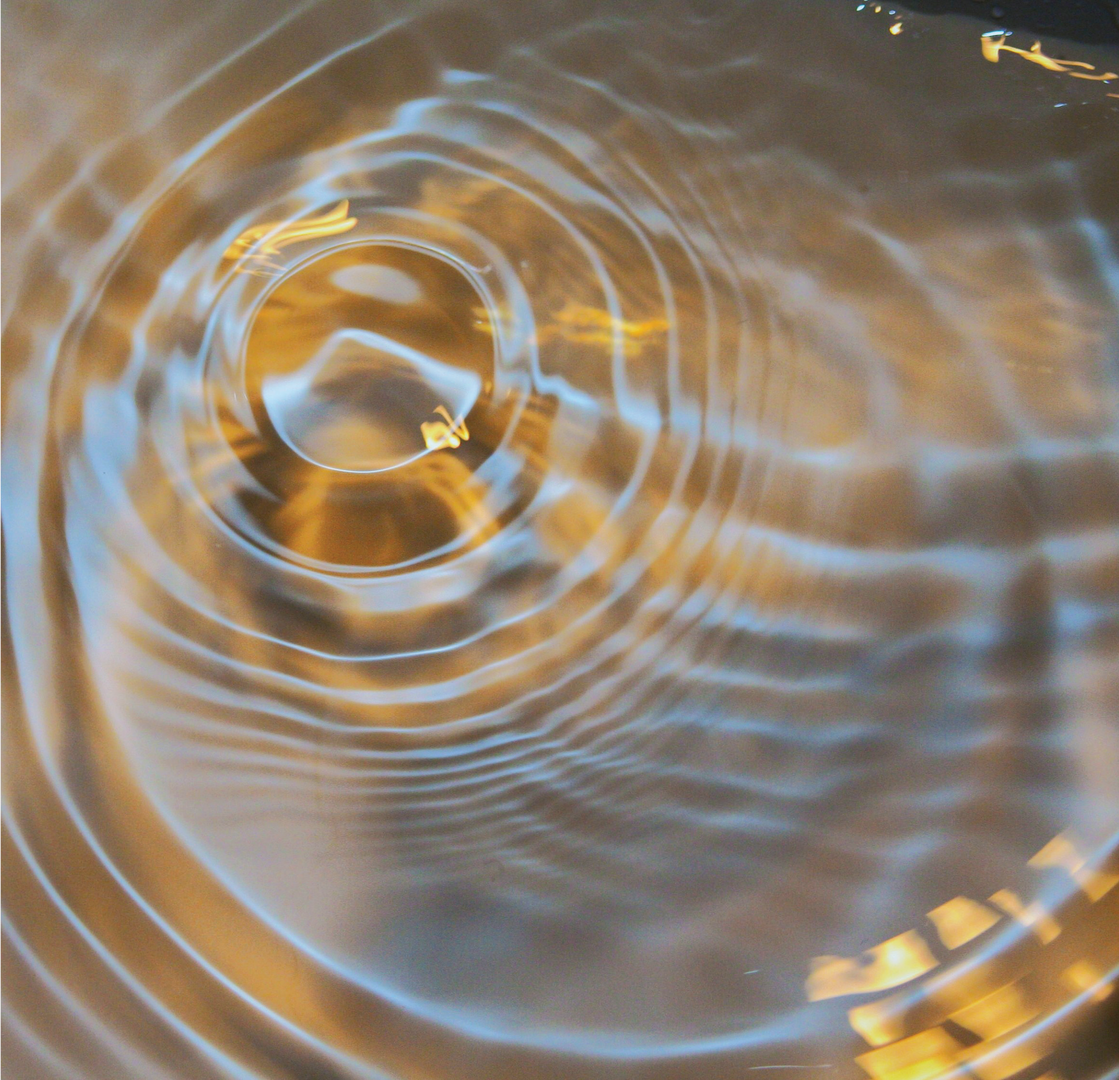


Úvod do logiky:
klasická výroková logika

Jiří Raclavský

Masarykova univerzita

Úvod do logiky:
klasická výroková logika

Jiří Raclavský

Masarykova univerzita

Brno 2015

Práce na publikaci a její tisk byly podpořeny v rámci projektu „Logika: systémový rámec rozvoje oboru v ČR a koncepce propedeutik pro mezioborová studia“, č. reg. CZ.1.07/2.2.00/28.0216 v rámci projektu Operační program Vzdělávání pro konkurenceschopnost spolufinancovaného z Evropského sociálního fondu a státního rozpočtu České republiky.

Knihu recenzovali:
PhDr. Petr Hromek
PhDr. Michal Peliš, Ph.D.

ISBN 978-80-210-7964-9 (online : pdf)
ISBN 978-80-210-7790-4 (vázaná vazba)

Předmluva

Tato kniha je částí vícedílného úvodu do logiky, jenž je zaměřen především na humanitní a společenskovědné publikum. Kniha však obsahuje materiál užitečný i pro jiné zájemce o logiku.

Nedokončený rukopis knihy byl po mnoho let užíván na Katedře filozofie Filozofické fakulty Masarykovy univerzity, kde vyučuji dvousemestrální úvod do logiky. První verze rukopisu vznikla v roce 2000, zčásti jako on-line materiál. Protože jsem v době psaní rukopisu už logiku vyučoval, narazil jsem na potřebu dostatku cvičebních příkladů. Ty jsem v následujícím období vyvíjel a uspořádával do cvičebně vhodného pořadí. Kniha obsahuje přibližně osmdesát procent autorsky původních příkladů. V průběhu let se mj. ukázalo, že z rukopisu „2004“ se daří dobře studovat i dálkovým studentům.

V roce 2014 se mi podařilo se k rukopisu „2004“ vrátit a to díky popudu dr. L. Dostálové a rovněž podpoře jí řízeného projektu Operačního programu vzdělání pro konkurenceschopnost (OPVK) s názvem „Logika: systémový rámec rozvoje oboru v ČR a koncepce logických propedeutik pro mezioborová studia“ (č. reg. CZ.1.07/2.2.00/28.0216), spolufinancovaného ESF a MŠMT ČR. Někdejší rukopis byl celý důkladně přehlédnut a rozšířen, tedy v pravém smyslu inovován. Závěrečné práce a tisk byly hrazeny právě z OPVK Logika.

Upřímný dík patří všem, kdo se podíleli na konečné podobě knihy. Předně je třeba zmínit oba recenzenty, dr. P. Hromka a dr. M. Peliše. Jmenovat je třeba i nynější magistry T. Ondráčka, I. Pezlara, J. Růžičku, J. Štěpánka, Z. Trávníčka, a další, kteří se ujali kontroly příkladů i dalšího textu. Žádný ze jmenovaných pochopitelně nezodpovídá za jakékoli nedostatky, které zůstaly v knize. Když jsme u toho, je možné, že kniha obsahuje překlepy a další chyby, mnohdy z typografických důvodů; tyto chyby čtenář buď sám odhalí anebo může konzultovat jejich on-line seznam na autorově webové stránce.

Obsah

1. Uvedení do logiky

1.1 Logika jako věda o vyplývání

Logika jako vědní disciplína se nezabývá například logikou dějin, ženskou či mužskou logikou, atd. Nezabývá se myšlením či jeho zákonitostmi, tím se přece zabývá psychologie. Rovněž nebudeme přijímat definici logiky jako vědy o správném usuzování, byť logika jistý prvek normativity zahrnuje. Předběžně řečeno, logika se zabývá platnými jazykově vyjádřenými úsudky. Při tomto svém zkoumání však logika abstrahuje: odhlíží od toho, jak myslí nebo usuzuje ten nebo jiný člověk; odhlíží od toho, jak lze úsudky chápat z hlediska třeba lingvistiky apod. Naším vymezením logiky bude:

Vymezení logiky

Logika je věda o vyplývání.

Namísto o vyplývání by v tomto vymezení mohlo být (je to ekvivalentní): o *logickém důsledku*, anebo také: o platných úsudcích.

Vyplývání je určitý výlučný vztah mezi větami a množinami vět, jež jsou organizovány v podobě úsudků. Větám z těch množin se obvykle říká *premisy* (či *předpoklady*), a vyvozovaným větám *závěr* (či *konkluze*). V našem textu budeme premisy a závěr oddělovat čarou „——" nebo při lineárním zápisu znakem „∴"; v běžné mluvě se někdy setkáváme s oddělujícím obratem „tudíž" nebo „tedy".

Úsudek

$$\begin{array}{ll} \text{premisa} & P_1 \\ \text{premisa} & P_2 \\ \dots & \\ \text{premisa} & P_n \\ \hline \text{závěr} & Z \end{array}$$

Než definujeme pojem vyplývání, zamysleme se nad úlohou úsudků obecněji. Budeme při tom naznačovat sounáležitost logiky s epistemologií.

Úsudky používáme během poznávání k tomu, abychom z určitého pravdivého poznatku (je-li pravdivý) odvodili další pravdivý poznatek. Logické odvozování je tedy prostředkem *přenosu pravdivosti*: pokud jsou pravdivé věty P_1, P_2, ..., P_n, bude pravdivá i věta Z. Z jiného úhlu pohledu, platné odvození je tím, co odůvodňuje daný závěr: Z je odůvodněno (je logickým důsledkem) P_1, P_2, ..., P_n. V empirických vědách jako např. biologie či chemie odůvodňujeme poznatky zejména pomocí empirických experimentů; ale ve filosofii či matematice pravdivost nějaké věty nemůžeme takto jednoduše verifikovat, pravdivost těchto vět je tedy spíš hypotetická či možná, proto na logickém odvozování záleží pravdivost mnohem více.

Uveďme si ilustrativní příklad. Uvažme tezi „Bůh existuje“ (naším příkladem by mohla být třeba Fermatova věta, o příklad tu vážně nejde). Tuto tezi někteří pokládají za pravdivou, jiní za nepravdivou. Není ovšem znám žádný její přesvědčivý empirický důkaz. Filosofické důkazy boží existence proto mají být tím, co demonstruje pravdivost té teze. Vzorovým je tzv. ontologický důkaz: „Bůh má všechny dokonalosti. Existence je dokonalost. Tudíž Bůh existuje.“ („Bůh má existenci“). Logická forma tohoto úsudku se zdá bezchybná a vskutku o ní málokdo pochybuje. Přesto tento důkaz nemůže rozhodnout zcela vše: závěr je pravdivý, pokud jsou pravdivé premisy. Když tedy někdo zpochybňuje tento důkaz, záměrně zpochybňuje pravdivost premis, protože tím zpochybní i pravdivost závěru. Ani pravdivost premis, ani pravdivost závěru však logika bezprostředně garantovat nemůže – garantuje jen vyplývání závěru z premis.

Tento příklad nám měl ukázat motivaci pro následující dvě definice. Nejprve je tu definice *platnosti* úsudku:

Platnost úsudku

Úsudek U je *platný* právě tehdy, když jeho závěr Z vyplývá z jeho premis P_1, P_2, …, P_n.

Tato definice závisí na pojmu vyplývání. Abychom vztah vyplývání odlišili od jiných vztahů mezi větami a množinami vět (například od vztahu nevyplývání), musíme jej nějak vymezit, tedy uvést jeho definici:

Vyplývání

Věta Z *vyplývá* z vět P_1, P_2, …, P_n právě tehdy, když platí, že za všech okolností, kdy jsou pravdivé věty P_1, P_2, …, P_n, je pravdivá rovněž věta Z.

(Namísto „Z“ a „P_1, P_2, …, P_n“ by klidně mohlo být „V“ a „V_1, V_2, ..., V_n“, apod.)

Všimněme si, že v definici vyplývání se hovoří nikoli o aktuální pravdivosti, ale o podmíněné pravdivosti: pokud nějaké věty jsou pravdivé, tak je nějaká věta pravdivá. Zamysleme se nad ilustrativním příkladem:

Jestliže prší, je mokro.
Prší.

Je mokro.

(Namísto „Prší“ by mohlo být úplnější „V Brně prší“, ale od toho odhlížejme.) Závěr tohoto platného úsudku vyplývá z premis bez ohledu na momentální pravdivost premis či závěru. Podobně jako platnost v matematice, ani logická platnost se nemůže měnit stavem počasí, zrovna tak jako se nemůže měnit vlivem momentálního smýšlení lidí. Dobře si tedy uvědomme, že úsudek může být *platný* (angl. „valid“), a přesto pouze někdy může mít aktuálně pravdivý závěr. (Pochopitelně existují i neplatné úsudky, jež mají náhodou pravdivý závěr.) Platný úsudek s aktuálně pravdivým závěrem bývá v češtině někdy nazýván *dokonalý* (někdy v češtině: korektní) úsudek, angl. „sound“, což je tedy více než jen „valid“.

Druhý důležitý prvek této definice je modalita „za všech okolností“. Namísto právě tohoto obratu by mohlo být „vždy“ nebo „nutně“, avšak daná modalita by byla přítomna, i kdyby v definici chybělo její slovní vyjádření. To proto, že ve hře je podmíněnost pravdivosti a tu způsobuje vlastně stav světa; například stav světa takový, že prší, ovlivňuje pravdivost věty „Prší“. Nepanuje však obecná shoda o tom, co přesně tato modalita je, jak ji přesně vyložit. Výše uvedená definice tedy uvádí pojem vyplývání, který je jen intuitivní, netechnický. V zájmu přesnosti je ale žádoucí, aby v definici vyplývání byl tento ne zcela přesný pojem všech okolností nahrazen přesným, rigorózním pojmem. Jak uvidíme v této knize, výroková logika nahrazuje tento intuitivní pojem technickým pojmem valuace. Jiná logika, například predikátová logika, využívá určitý příbuzný, nicméně přece jen odlišný pojem.

Z toho plyne, že striktně vzato neexistuje jedna jediná, daná logika, ale že tu jsou různé logické systémy či logiky, které aspirují na to být věcně správnou *explikací* pojmu vyplývání. Mnozí logikové v této souvislosti mluví o tom, že úkolem logiků je navrhovat dílčí logiky, resp. dílčí logické formální jazyky, v nichž je zachycena ta nebo jiná relace logického důsledku (vyplývání). Logika tedy kromě toho, že je nástrojem například filosofů, je zároveň něčím, co samo potřebuje filosofii logiky.

Volba logiky (logického systému) souvisí s několika obecnými požadavky kladenými na jednotlivé logiky. Jsou to na jedné straně jednoduchost (nekomplexnost struktur), dále expresivnost (schopnost zachytit bohatství struktur zkoumané oblasti, jmenovitě jazyka) a adekvátnost (do níž expresivnost zčásti spadá). Klasická výroková logika je jednoduchým, nicméně málo expresivním a také nepříliš adekvátním logickým systémem. Vlastně dokáže studovat jen některé vztahy mezi některými větami a logický důsledek na těchto vztazích založený. Snaha zbavit klasickou výrokovou logiku těchto nedostatků vedla jednak k rozvoji neklasických výrokových logik, tedy logik implementujících jiné než klasické logické zákony, jednak k jejímu nahrazování sofistikovanějšími logickými systémy.

Vraťme se k úsudkům. Úsudky jsou normálně formulovány v češtině nebo v jiných jazycích. My se však nebudeme věnovat určování platných nebo neplatných úsudků v takové podobě, v jaké jsou. Při studiu platnosti úsudků budeme v logice abstrahovat od toho, co se nám nejeví podstatné pro jejich platnost. Tímto zde nastupuje abstrakce a idealizace, jež jsou v moderní vědě typické. Umožní nám to lépe studovat pouze a právě to, co nás na problému zajímá. Studium *logické formy* úsudku, kdy věty jsou nahrazeny jejich logickými formami, nám navíc umožní naráz postihnout spousty konkrétních jazykových variant toho úsudku. Například výroková logika studuje logickou formu, jež vypadá následovně:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \\ \hline q \end{array}$$

Tuto logickou formu sdílí mnoho jazykově formulovaných úsudků, například ten výše formulovaný úsudek o pršení a mokru.

Při ověřování platnosti jazykově formulovaného úsudku tedy jeho jednotlivé věty převádíme na logické formule, z nichž se skládá ona *úsudková forma* (ta je logickou formou nějakých úsudků). Tento proces se nazývá *formalizace*, někdy *logická analýza*. Je-li formalizace daného úsudku, tedy jeho úsudková forma, platná, pak za platný prohlásíme právě onen jazykový úsudek, jehož je ta úsudková forma formalizací. Různé logiky přitom nabízí různé odlišné formalizace, poněvadž některé logiky nedokáží rozpoznat některé jevy, jež se na vyplývání podílejí; je tu proto otázka rozumné volby mezi jednoduchostí aparátu a adekvátností výsledků.

Ještě dodejme, že úsudky jako ten výše ukazovaný jsou platné svou logickou formou, tedy díky své struktuře, jež je organizována pomocí ‚logického výraziva'. Analogicky je tomu na úrovni izolovaných vět – některé věty jsou platné kvůli své logické formě, a tedy bez ohledu na empirický stav světa. Pro příklad je takovou třeba věta „Prší nebo neprší", kde logickým výrazivem je „nebo" a „ne-". Od těchto vět odlišujme věty (a přeneseně i úsudky), jež jsou pravdivé analyticky, tedy kvůli jazykovému významu klíčových výrazů; například věta „Starý mládenec je muž“ je pravdivá kvůli tomu, jaký význam má v češtině výraz „starý mládenec“ a „muž“.

Před chvílí jsme vlastně prodiskutovali důležitý rys moderní logiky, jímž je užití *symbolické notace*, formalismu. V logice vedl přechod na symbolickou notaci k podobnému zrychlení výzkumu jako v matematice. Symbolická notace umožňuje uzřít vlastnosti a vztahy mezi pojmy tak, jak to není při běžném, vlastně zdlouhavém a mnohdy nepřesném jazykovém vyjádření leckdy ani možné.

Narazili jsme tu i na otázku *normativity* logiky. Logika nemá jen jakýsi deskriptivní charakter, nevyhnutně má i charakter preskriptivní: do jisté míry normuje, co vyplývá a co ne. Implementace logiky v moderních informatických prostředcích (od počítačů po internet) způsobila rozsáhlé ovlivnění i běžné populace; další druhy vlivu můžeme vidět třeba v některých filosofických diskursech. Normativita skrytá v logice také vede k tomu, proč je vůbec vyučována. Logické myšlení má v zásadě každý. Logika se však vyučuje jednak proto, abychom naši schopnost logického myšlení prohloubili – abychom byli s to chápat logické vztahy i na úrovni, která by jinak byla pro nás nedosažitelná, jednak abychom své logické myšlení zpřesnili – tedy upravili vzhledem k určitému normativnímu standardu.

Tento velmi stručný úvod do logiky jako takové nyní ukončeme konstatováním, že logika je obor blízký matematice (matematikové ji leckdy považují za jednu z matematických disciplín), tradičně je pěstována na filosofii, ovšem mnoho výzkumu a užití je též v prostředí informatiky, někdy i teoretické lingvistiky a rovněž elektrotechniky. Soudobý status logiky lze nahlédnout i z následujícího telegrafického přehledu dějin logiky.

1.2 Stručné dějiny logiky

Logika jako věda vznikla až v období vrcholu řecké filosofie, přičemž důvody vzniku lze hledat v reakci na sofistické teorie argumentace. Čtyřmi významnými údobími dějin logiky jsou logika v antice, logika ve vrcholné a pozdní scholastice, logika v novověku a logika v dnešní a nedávné době. Mimoevropské příspěvky k logice (Indie, Čína) zde nezmiňujeme.

Aristotelés ze Stageiry (384–322 př. n. l.) je *zakladatelem logiky*; logika je nástroj (řec. „organon“); šest jeho spisů o logice (Kategorie, První analytiky, Druhé analytiky, Topiky, O vyjadřování, O sofistických důkazech) je vydáváno souborně jako *Organon*; Aristotelés zkoumal fragment nynější predikátové logiky, *sylogistiku*; kategorický sylogismus je úsudek jako např. „Všechny velryby jsou savci. Všichni savci jsou obratlovci. Tudíž všechny velryby jsou obratlovci.“.

Stoikové, zejm. *Diodóros Kronos* (4. st. př. n. l.), *Filón z Megary* (3. st. př. n. l.), *Chrýsippos ze Sol* (279–206 př. n. l.) pracovali na výrokové logice, zabývali se implikací aj.; v antice jsou dále studovány např. (logické) paradoxy (paradox lháře, paradox rohatého, atd.).

Boëthius (cca 480–525) zprostředkoval logické poznatky antiky do středověku.

Ve střední a vrcholné scholastice je *aristotelská logika* plně etablována; kromě sylogistiky jsou studovány jazykové obtíže ovlivňující logické úsudky (nauka o supozicích) či paradoxy (sofismata); k nejznámějším logikům patřili filosofové *Pierre Abélard* (1079–1142), *Albert Magnus* (1170–1250), *Jean Buridan* (cca 1300–1358), *William Ockham* (1287–1347).

Novověk se ohlašuje kritikou neplodnosti deduktivní aristotelské logiky (Francis Bacon, 1561–1626), na což bylo v polovině 20. st. navázáno v rámci tzv. induktivní logiky.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) je duchovním otcem moderní logiky; jeho známou ideou bylo, že např. filosofické spory by bylo možno řešit výpočtem („Calculemus!“), což předpokládá, že by náš svět byl popsán symbolickým jazykem, *lingua characteristica universalis* (tato idea byla inspirována několik století starými úvahami Raimunda Lulla), který by byl využit ve formálním kalkulu, v němž by se počítalo, *calculus rationator* (jeho jednoduchou verzi skutečně navrhl); kromě těchto velmi vlivných idejí Leibniz například odlišoval neměnné pravdy analytické („pravdy rozumu“) a kontingentní pravdy empirické („pravdy faktů“).

Port-royalská škola (zejm. *Antoine Arnauld*, 1612–1694) sice rozvinula stávající logické poznatky (např. teorii o extenzi a intenzi pojmů), ale logice vtiskla psychologizující výklad jakožto *vědy o myšlení*; učebnice logiky pocházející z této názorové školy jsou děleny na teorii pojmu, soudu a úsudku a jako takové jsou psány ještě na začátku ve 20. století.

Bernard Bolzano (1781–1848) byl pražský (národností německý, občanstvím tedy rakouský) matematik (zvl. anticipátor teorie množin, kterou později rozpracoval a proslavil matematik Georg Cantor, 1845–1912), filosof, logik, teolog a sociální reformátor. Ve spise *Wissenschaftslehre* (Vědosloví, 1837), jež je vlastně metodologií vědy, uvedl i svou logiku. V analýze některých pojmů, zejm. pojmu *vyplývání*, předběhl své vrstevníky o mnoho dekád. Bolzanovo dílo ve své době zcela zapadlo.

Georg Wilhelm Friedrich Hegel (1770–1831) vyvinul *dialektickou logiku*, což není logika, ale řekněme abstraktní metafyzika.

Kodifikaci *tradiční logiky*, tedy zejména aristotelské logiky a logiky port-royalské školy, nalezneme v po mnoho dekád přetiskované učebnici *Johna Stuarta Milla* (1806–1871).

Od poloviny 19. století se několik matematiků snaží o zásadní reformu stávající logiky, je navrhována symbolická notace, jsou zaváděny relace apod.

K nejznámějším patří matematikové *George Boole* (1815–1864), *Augustus De Morgan* (1806–1871), *William Stanley Jevons* (1835–1882), *Charles Sanders Peirce* (1839–1914), *Ernst Schröder* (1841–1902), ale i třeba *John Venn* (1834–1923) nebo *Charles Lutwidge Dodgson* (1832–1898; pod pseudonymem *Lewis Carroll* sepsal zejm. Alenku v říši divů a za zrcadlem; znám je též jako autor mnoha logických hádanek). Na rozvoj moderní logiky měl specifický vliv i třeba matematik Giuseppe Peano (1858–1932). Samotná moderní logika má více zakladatelů.

Gottlob Frege (1848–1925), matematik a logik, který proslul i jako základní postava analytické filosofie, je nejvíce chápán jako hlavní *zakladatel moderní logiky*. Význam má jeho *Begriffsschrift* (Pojmové písmo, 1879), v němž zavedl a obhájil symbolickou notaci (byť konkrétně ta jeho se neujala), včetně například nyní klasických kvantifikátorů. Mnohonásobně zvětšil poznatky predikátové logiky, navrhl její axiomatizaci, apod. Byl obhájcem nepsychologického pojetí logiky, přispěl k teorii pojmu i definice, ve filosofii matematiky razil *logicismus*, podle kterého je matematika odvozena z logiky.

Logik, matematik a analytický filosof, ale i politický aktivista *Bertrand Russell* (1872–1970) brzy po seznámení s Fregeho spisy v nich objevil moderní logický paradox, *Russellův paradox*. Ve snaze jej řešit navrhl *teorii typů*, která byla později modifikována a zdomácněla v informatice. Připojil se k logicismu a spolu s matematikem a filosofem *Alfredem North Whiteheadem* (1861–1947) sepsali monumentální spis *Principia Mathematica* (tři rozsáhlé díly, 1910–1913), v němž podali základy matematiky vyvozené z logiky (mezi matematiky se nevžilo, dnes se však vyskytují snahy o neologicismus).

Ve snaze odlišit tuto *moderní logiku* od staré tradiční logiky byly voleny i názvy *formální logika*, *symbolická logika*, logistika (právě tento termín dnes označuje nauku o skladnictví), v současnosti se často za tímtéž účelem někdy používá termín „matematická logika".

Moderní logika Fregeho, Russella a dalších (na popularizaci měl velkou zásluhu i *Rudolf Carnap*, 1891–1970), rychle získává zájem i matematické komunity, která se snaží logiku rozvíjet jako svého druhu matematickou disciplínu. Následně se hovoří o rozštěpení vlastní, tzv. *filosofické logiky* (v současnosti se ale jedná především o určité neklasické logiky) a *matematické logiky*.

Za části matematické logiky se dnes mají: teorie modelů, teorie důkazů, teorie množin, teorie rekurze (zvl. prvé dvě se zužitkovávají i v rámci současné filosofické logiky). V prvé polovině 20. století mezi nejvýznamnější matematické logiky patří *Leopold Löwenheim* (1878–1953), *Thoralf Skolem* (1887–1963), *Emil Leon Post* (1897–1954), *Haskell Brooks Curry* (1900–1982), *Alonzo Church* (1903–1995), *Stephen Cole Kleene* (1909–1994), *Alan Turing* (1912–1954), a Kurt Gödel (k němu hned níže); jsou dosahovány první čistě (meta)logické poznatky mající dosah na většinu logik.

Za nejvýznamnějšího logika 20. století je někdy považován *Kurt Gödel* (1906–1978; narozen v Brně v německé-rakouské rodině, po určitou dobu měl československé občanství); dokázal překvapivé a významné výsledky, zejm. tzv. *věty* o neúplnosti, jež ovlivnily ideovou důvěru ve *formalismus* matematika *Davida Hilberta* (1862–1943), který se snažil partie matematiky axiomatizovat a tedy problém pravdivosti přenášet na dokazatelnost.

Již od počátku 20. století je v logice bohatý myšlenkový kvas, jsou navrhovány i alternativy klasické logiky. Například *Jan Łukasiewicz* (1878–1956) navrhuje *trojhodnotovou logiku* (tím opouští v klasické logice zakotvený Princip dvouhodnotovosti), *Clarence Irwing Lewis* (1883–1964) postupně dospívá k základům *modální logiky*, matematik *Luitzen Egbertus Jan Brouwer* (1881–1961) a logik *Arend Heyting* (1898–1980) zakládají intuicionismus ve filosofii matematiky a *intuicionistickou logiku*.

Alfred Tarski (1918–1923) je považován za jednoho z vlivných logiků 20. století; kromě základů *teorie modelů* je znám především pro definici sémantického pojmu *pravdivosti* a definicí pojmu *vyplývání*.

Po II. světové válce výzkum v logice opanovalo studium a aplikace teorie modelů (zejm. *Abraham Robinson*, 1918–1974), po určitou dobu i teorie algoritmů. Kromě klasických výsledků, z nichž některé velmi známé uvedl filosof a logik *Willard Van Orman Quine* (1908–2000), přichází od 80. let na scénu neklasické logiky: modální logika (rozvíjená zejm. *Saulem A. Kripkem*, 1940–), intuicionistická logika, ale i *epistémická logika* (*Jaakko Hintikka*, 1929–), *deontická logika* (*Georg Henrik von Wright*, 1916–2003), kromě různých *vícehodnotových logik* i nekonečněhodnotová *fuzzy logika* (matematik *Lofti A. Zadeh*, 1921–, náš *Petr Hájek*, 1940–), *intenzionální logika* (*Richard Montague*, 1930–1971, i náš *Pavel Tichý*, 1936–1994), *parakonzistentní logika* (*Graham Priest*, 1948–), ad. Viz též poslední kapitolu této knihy.

1. Cvičení – základní pojmy obecné logiky

1) Jaké je vymezení logiky?

2) Co je platnost úsudku? Co je vyplývání? Definujte.

3) Vysvětlete rozdíly mezi logickou a úsudkovou formou. Uplatněte přitom termín formalizace.

4) Kdo je zakladatelem logiky? Kdo je zakladatelem moderní logiky?

5) Co je tradiční logika, moderní logika, formální logika, symbolická logika? Co je klasická a co neklasická logika? Jaký je rozdíl mezi filozofickou logikou a matematickou logikou?

6) Kdo byli a co všechno pro logiku udělali Aristoteles, Leibniz, Bernard Bolzano, Gottlob Frege, Bertrand Russell, Alfred Tarski či Kurt Gödel?

2. Uvedení do výrokové logiky

2.1 Základní pojmy výrokové logiky

Výroková logika, dále obvykle jen VL, je často charakterizována jako logika zkoumající logické vztahy mezi výroky.

Jako *výrok* je obecně chápána věta (vzácně: sémantický obsah věty), která je pravdivá, nebo nepravdivá. Jako výroky jsou tedy v logice uvažovány určité oznamovací věty přirozeného jazyka, totiž věty, u nichž má smysl se ptát, zda je uvažovaná věta pravdivá, či nepravdivá, tedy lze položit otázku „Je pravda, že ...?“, kde „...“ obsazuje daná věta. Takže výroky jsou věty, avšak ne všechny věty jsou výroky. Z daného vymezení je zřejmé, že například věty rozkazovací („Dones to!“), přací („Kéž by už byla noc!“) či tázací („Kolik je hodin?“), ovšem i některé oznamovací věty („Ahoj.“), nejsou v rámci klasické VL pojednávány, neboť nejsou chápány jako nositelé pravdivosti, či nepravdivosti.

Namísto „*p*“, kde *p* je nějaký výrok, můžeme v důsledku toho, že je to výrok, říkat „Je pravda, že *p*“ či „Platí *p*“, příp. „Tvrdím *p*“. (Analogicky v případě negovaného výroku: „Není pravda, že *p*“ či „Neplatí *p*“, popř. „Netvrdím *p*“.)

Výroky dělíme na *jednoduché*, jinak řečeno *atomické*, ev. *elementární*. Z jednoduchých výroků mohou být určitým způsobem tvořeny *molekulární* výroky, tedy výroky *složené* (gramaticky řečeno: souvětí).

Jednoduché výroky budou reprezentovány *výrokovými proměnnými* (zvanými někdy *výrokové symboly*) jako například „*p*“. Prostředkem pro složení jednoduchých výroků do složeného výroku jsou *výrokové spojky*, například „$\vee$“, jimž v přirozeném jazyce odpovídají (některé) *gramatické spojky*, například „nebo“. (Výrokové spojky se spolu např. se znaky sčítání či dělení řadí mezi operátory.) Výrokové spojky jsou chápány jako vyjádření pravdivostních (výrokových) funkcí. Takže jednoduché výroky jsou nositelé pravdivostních hodnot a pravdivostní funkce jsou vyjádřeny výrokovými spojkami.

Tím, že klasická VL je dvouhodnotová, pracuje se dvěma pravdivostními hodnotami, jmenovitě pravda a nepravda, uplatňuje tedy klasický *Princip dvouhodnotovosti* (či *Princip bivalence*):

Princip dvouhodnotovosti

Každý výrok je pravdivý, nebo nepravdivý.

Pravdivostní hodnota složených výroků je závislá na pravdivostních hodnotách jednotlivých výroků a výrokových spojkách jednoduché výroky spojujících. VL tedy uplatňuje *Princip kompozicionality*, jenž může být pro VL formulován takto:

Princip kompozicionality

Pravdivostní hodnota výroku je jednoznačně určena pravdivostními hodnotami jeho složek, tj. pravdivostními hodnotami dílčích výroků a sémantikou spojek, jež tyto dílčí výroky spojují.

Jakožto nástroj logické analýzy přirozeného jazyka je VL nástrojem omezeným. Především se VL nijak nezajímá o strukturu jednoduchého výroku; ten je chápán pouze jako něco, co je pravdivé či nepravdivé. To vede k omezenosti aplikability VL, neboť není s to určit podíl částí atomického výroku na vyplývání. Dále: zkoumanými výroky jsou výlučně určité oznamovací věty. Další skupinu nevýhod tvoří určité odlišnosti pravdivostních funkcí od významů gramatických spojek. Závažným nedostatkem je to, že se VL nezabývá pečlivě sémantickým obsahem, významem výroků; sémantika VL je totiž *extenzionalistická*, za význam výroku má extenzi, jíž je pravdivostní hodnota, což znamená, že všechny výroky mající tutéž hodnotu mají týž význam, navzdory jejich intuitivně rozdílným smyslům.

Ještě je třeba zmínit, že VL je v moderní civilizaci díky elektrotechnice všude kolem nás, neboť je implementována v *logických obvodech*, úžeji *logických hradlech*. Logické hradlo je konkrétní (elektronickou) realizací logické spojky jako např. disjunkce a propouští elektrický proud v souladu s funkční tabulkou disjunkce. Další aplikací VL, jež je součástí našeho běžného života, je vyhledávání např. přes vyhledávací políčko webového prohlížeče, kdy logické spojky jako třeba spojka disjunkce umožnují blíže specifikovat dotaz.

2.1 Cvičení – základní terminologie

Zopakujte si, co je:

1) výrok

2) atomický (elementární) výrok, molekulární (složený) výrok

3) výroková spojka

4) Princip dvojhodnotovosti

5) Princip kompozicionality

2.2 Pravdivostní funkce

Než přejdeme k přehledům jednotlivých pravdivostních funkcí, připomeňme si pár základních faktů o extenzionálním, jmenovitě množinovém, chápání funkcí. (K tomuto našemu výkladu se čtenář může popřípadě vrátit později.) Každá *funkce* může být v principu zadána asociací prvků *oboru argumentů* té funkce, tedy *domény*, a prvků *oboru funkčních hodnot*, tedy *kodomény*. Příkladem funkce je třeba funkce, jejíž *tabulkové vyjádření* je (levý a pravý sloupec ukazují popořadě doménu a kodoménu):

argumenty	hodnoty
1	s
2	l
3	o
4	v
5	o
atd.	atd.

(Mimochodem, náš příklad je ukázkou tzv. posloupnosti – posloupnost je funkce z přirozených čísel do nějakých prvků.) Asociaci argumentů s hodnotami se říká *funkční zobrazení*, někdy prostě jen funkce.

Funkce mohou být zadány buď soupisem všech uspořádaných dvojic ⟨argument, hodnota⟩ (jež jsou vyobrazovány třeba v tabulce) nebo funkčním *předpisem*, tedy způsobem výpočtu funkčních hodnot pro dané argumenty.

Totální funkce zobrazují všechny argumenty na nějakou hodnotu, kdežto *parciální funkce* jsou pro některé argumenty svého oboru nedefinované; klasická logika s parciálními funkcemi nepracuje.

Pravdivostní funkce (či *výrokové funkce*) jsou ty funkce, jejichž oborem argumentů i oborem hodnot jsou tzv. *pravdivostní hodnoty*. Pravdivostními hodnotami jsou *Pravda* a *Nepravda* (angl. True and False), stručněji P a N (angl. T a F), ač je zvykem používat pro ně numerická označení 1 a 0 (v tomto pořadí). Pravdivostní hodnoty reprezentují to, že daný výrok je pravdivý, resp. nepravdivý.

Podle počtu členů v argumentu, jímž je obecně nějaká *n*-tice, rozlišujeme *aritu* (árnost, četnost) funkce: jsou tu například funkce unární (*n*=1), binární (*n*=2, tj. argumenty jsou nějaké dvojice ⟨X,Y⟩), ternární, atd. Aritu vyznačujeme číslicí v horním indexu, tedy např. f^2. Pravdivostní funkce jsou tedy funkcemi z *n*-árního kartézského součinu $\{1,0\}^n$ do množiny {1,0}. Protože počet uspořádaných *n*-tic pro dvouprvkovou množinu pravdivostních hodnot je 2^n, počet příslušných *n*-árních pravdivostních funkcí je 2 na 2^n. Přirozený jazyk svými vyjádřeními ovšem uchopuje jen malou část z tohoto množství.

Nyní si uvedeme kompletní přehledy nulárních, unárních a binárních pravdivostních funkcí. V poznámkách pod příslušnými pravdivostními tabulkami uvádíme stručné poznámky k funkcím označeným též speciálním symbolem, k těm hlavním z nich se vrátíme v textu níže. Uvádíme rovněž alternativní symboly výrokových spojek, s nimiž je možné se v literatuře setkat.

Odlišujme *konjunktor*, tedy *symbol pro výrokovou spojku*, od pravdivostní funkce konjunkce. (Symboly „∧“ a „&“ jsou symboly téže spojky zvané konjunkce.) Odlišujeme také konjunkci, tedy pravdivostní funkci, od *věty tvaru konjunkce*, ač ta bývá někdy označována přímo jako konjunkce. Analogicky pro ostatní symboly spojek a pravdivostní funkce. Členům konjunkce se říká *konjunkty*, členům disjunkce *disjunkty*.

Nulární pravdivostní funkce

f^0_1	f^0_2
1	0

V logických textech příležitostně zmiňované nulární funkce jsou funkcemi jen pomyslně, v matematické abstrakci. Můžeme je vidět jako základní kameny nekonečné hierarchie funkcí vyšší arity. Funkce f^0_1 bývá někdy značena „⊤“, f^0_2 zas „⊥“ a mluví se o nich někdy jako o *logických konstantách.*

Unární pravdivostní funkce

argument	f^1_1	f^1_2	f^1_3 ¬	f^1_4
1	1	1	0	0
0	1	0	1	0

Funkce f^1_1 je *unární verum* (či „true“).

Funkce f^1_2, někdy nazývaná „aserce“, bývá značena též „Id“, načež je nazývána „identita“ („identická funkce“). Srov. definici identity v predikátové logice.

Funkce f^1_3, značená pomocí „¬“ (negátoru), se nazývá negace. Negace bývá alternativně často značena pomocí „~“, či pomocí pruhu-čáry nad znakem (částí formule či celou formulí). Blíže k této unární pravdivostní funkci níže.

Funkce f^1_4 je *unární falsum* (či „false“).

Binární pravdivostní funkce

argument	f^2_1 T	f^2_2 $\vee$	f^2_3 $\leftarrow$	f^2_4	f^2_5 $\rightarrow$	f^2_6	f^2_7 $\leftrightarrow$	f^2_8 $\vee$	f^2_9 $\uparrow$	f^2_{10} $\vee\vee$	f^2_{11}	f^2_{12} $\nrightarrow$	f^2_{13}	f^2_{14}	f^2_{15} $\downarrow$	f^2_{16} K
$\langle 1, 1\rangle$	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 1, 0\rangle$	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
$\langle 0, 1\rangle$	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
$\langle 0, 0\rangle$	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Binární pravdivostní funkce mají dvoučlenný argument. Kombinatoricky vzato existuje přesně 16 takových (totálních) pravdivostních funkcí. Ty známější bývají označovány symboly, které uvádíme jednak v tabulce, jednak níže.

Funkce f^2_1 je *binární verum*, někdy též nazývaná „tautologie“ (značena „T“ i „⊤“ jako výše); srov. však níže definici tautologie.

Funkce f^2_2, značená pomocí „∨“, případně pomocí „v“ (z latinského „vel“), se nazývá *disjunkce*. Disjunkce se chová jako přičtení (připočteme-li pomocí disjunkce k nějakému výroku pravdivý výrok, výsledek bude pravdivý), odtud název *logický součet*. Blíže k této pravdivostní funkci níže.

Funkce f^2_3, značená někdy znakem „←“, se nazývá *obrácená implikace* (event. *konverzní implikace*, *zpětná implikace*) a funguje obdobným způsobem jako implikace, ovšem s obráceným pořadím výrokových proměnných, tedy jako $q \rightarrow p$.

Funkce f^2_5, značená pomocí „→“, se nazývá *implikace*. Místo znaku „→“ se používá i „⊃“, či „⇒“. (Pozor: když někteří autoři používají zaráz ⊃ a → , či navíc dokonce ⇒, pouze jedna ze šipek označuje klasickou funkci implikace, nejpravděpodobněji je to ⊃.) Blíže k této pravdivostní funkci níže.

Funkce f^2_7, značená pomocí „↔“, se nazývá *ekvivalence* (vzácněji *rovnoznačnost*). Místo „↔“ se používá i „≡“, či „⇔“. Blíže k této pravdivostní funkci níže.

Funkce f^2_8, značená pomocí „∧“, se nazývá *konjunkce*. Místo znaku „∧“ se zejména v anglosaském prostředí používá „&“. V mnoha, zvláště v informatických textech se leckdy používá tečka („.“ či „•“), eventuálně malá tečka mající tvar čtverečku, což naznačuje, že konjunkce se jakožto booleovská operace chová jako násobení; odtud název *logický součin* (srov. že například platí, že (1.*x*)=*x*, kde 1 reprezentuje pravdivý výrok a *x* hodnotu nějakého výroku). Blíže k této pravdivostní funkci níže.

Funkce f^2_9, značená ve starší literatuře zpravidla znakem „/“, avšak i „|“, nověji „↑“, event. „NAND“ z anglického „not and“, se nazývá *Shefferova funkce*. Blíže k této pravdivostní funkci níže.

Funkce f^2_{10}, značená pomocí „∨∨“, či „≠“ nebo „⊻“, ba i „⊕“, se nazývá *vylučovací disjunkce* (v latině vyjadřována pomocí „aut ..., aut ...“), anebo „nonekvivalence“, „kontravalence“ či „alternace“; je značena též „⇐|⇒“, v prostředí informatiky bývá značena „XOR“ z anglického „exclusive or“. Blíže k této pravdivostní funkci níže.

Funkce f^2_{15}, značená ve starší literatuře zpravidla znakem „|“ (ale i pomocí „.|.“), nověji „↓“, v informatice „NOR“ z anglického „not or“, se nazývá *Nicod-Peirceova funkce*, někdy dokonce *Schröderův operátor*.

Funkce f^2_{16} se nazývá *binární falsum*, někdy též nazývaná „kontradikce“ (značena „K“ nebo „⊥“ jako výše); srov. však níže definici kontradikce.

Zbývající binární funkce z této tabulky mají také jméno a označení symbolem, ale setkat se s nimi lze vzácně.

Různí autoři používají různé sady symbolů. Zde jsou dvě nejčastěji používané pětice vzájemně si odpovídajících symbolů; prvou z nich budeme používat v této knize, s druhou se setkáme u mnoha anglicky píšících autorů:

¬	∧	∨	→	↔
~	&	v	⊃	≡

n-ární pravdivostní funkce

Samozřejmě existují také pravdivostní funkce vyšší arity, jež jsou vždy početnější druhem – trojmístných je 2 na 2^3, tj. 256, čtyřmístných je 2 na 2^4, tj. 65536, atd.). Těmito funkcemi se zde zabývat nebudeme už proto, že je lze definovat pomocí námi již uvedených funkcí nižší arity (srov. způsoby takového definování v kapitole o odvozování výrokových spojek).

Pro ilustraci si zde uvedeme jen příležitostně zmiňovanou ternární pravdivostní funkci *if-then-else* („jestliže ..., tak ..., jinak ...“). Ta je definovatelná např. pomocí $((p\to q)\land(\neg p\to r))$:

p	q	r	if p than q else r
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	0

2.3 Nejznámější pravdivostní funkce

Nyní si blíže všimneme nejvíce diskutovaných pravdivostních funkcí. K jejich definování využijeme mírně zjednodušené *pravdivostní tabulky*, v nichž funkční hodnotu píšeme – zde pro názornost tučným řezem – pod operátor, tj. symbol výrokové spojky, a členy argumentů pod výrokové proměnné. (Pravdivostní tabulky výrokových spojek objevilo na přelomu 19. a 20. století více autorů, zmiňováni bývají E. Schröder, Ch. S. Peirce, B. Russell, L. Wittgenstein, E. Post, přičemž dva naposledy zmiňovaní jsou považováni za objevitele tabulkové metody zjišťování průběhu pravdivostních hodnot.)

Negace (¬, „ne“)

$\neg\, p$
0 1
1 0

Pravdivostní funkce negace je v přirozených jazycích vyjadřována pomocí „*ne*“, jež slouží k negování (popírání) celého výroku. Často jde o předponu „*ne-*“ spjatou už se slovesem, v jiných případech se jedná o obraty „*Není pravda, že ...*“, či „*Neplatí, že ...*“, kde tři tečky zastupují libovolný výrok. Jistou zvláštností češtiny je občasné vyjadřování negace gramatickým dvojím záporem, na což musíme být v analýzách opatrní. Všimněme si, že formálně funguje negace tak, že obrací pravdivostní hodnotu výroku, na nějž je aplikována.

Příklady vět: „Neprší", „Není pravda, že Adam má auto", „Neplatí, že spojením dvou kapek vznikají dvě kapky", apod.

Konjunkce (∧, „a")

$p \land q$
1 **1** 1
1 **0** 0
0 **0** 1
0 **0** 0

Vzhledem k jejím vlastnostem lze pravdivostní funkci konjunkce vhodně využít k explikování významu gramatické spojky „... *a* ..." mezi výroky, resp. jejích přímých stylistických ekvivalentů „... *a současně* ..." či „... *a zároveň* ...", nebo „... *i* ...", „... *a také* ...", „..., *zatímco* ...", „..., *přitom* ...", „..., *přičemž* ...", „..., *kdežto* ...". Méně přímými stylistickými variantami pro vyjádření konjunktivního spojení jsou gramatické spojky „..., *ale* ...", „..., *avšak* ...", v některých případech i „..., *ovšem* ...", „..., *leč* ...", „..., *nicméně* ...", „... , *jenže* ...", „... *takový, že* ...", „..., *nýbrž* ..."), někdy je to jen čárka („... , ...").

Příklady vět: „Prší a je mlha", „Pavel běží, zatímco Kvido stojí", „Petr i Pavel mají auto", což je zkrácená podoba věty „Petr má auto a Pavel má auto".

Výrok složený pomocí konjunkce je pravdivý jen tehdy, když jsou oba dílčí výroky pravdivé. U souvětí spojených např. pomocí „ale" se nám však zdá, že věta uvozená spojkou „ale" nějak ruší či ‚neguje' informaci podanou hlavní větou, srov. např. „Petr má auto, ale Pavel taky". Z hlediska pravdivosti celého souvětí je však tato skutečnost až doplňující, můžeme ji pominout, poněvadž pravdivostní podmínky daného souvětí jsou shodné s těmi, které má stylisticky ekvivalentní souvětí „Petr má auto a Pavel má auto".

Konjunkce má vlastnost zvanou komutativita, takže členy, na něž se aplikuje, lze libovolně prohodit. U většiny konjunktivně složených výroků opravdu nezáleží na pořadí členů, tedy dílčích výroků. Výjimkou jsou až výroky jako „Adam se vyboural a opil se", kdy záměna dílčích výroků na „Adam se opil a vyboural se" vede ke změně podávané sémantické informace. Tento sémantický rozdíl náš model gramatické spojky „a" ignoruje, abstrahuje od něj, poněvadž se zaměřuje jen na pravdivost a její odvislost od pravdivosti složek. (Daný problém je řešen jednak v rámci pragmatiky, jednak v rámci neklasické logiky, např. v dynamické logice.)

Disjunkce (∨, „nebo“)

$p \vee q$
1 **1** 1
1 **1** 0
0 **1** 1
0 **0** 0

Pravdivostní spojka disjunkce je v přirozených jazycích nejlépe zachycena pomocí výrazu „... *nebo* ...“, případně „... či ...“. Nutno ovšem podotknout, že mnohdy není jasné, zda je vyjadřována tato *nevylučovací disjunkce*, nebo vylučovací disjunkce. Výrok spojující dílčí výroky spojkou disjunkce je totiž pravdivý i tehdy, když jsou oba výroky pravdivé, nejen jeden z nich. Někdy se proto k „... *nebo* ...“ dodává dovětek „*anebo obojí*“, říkává se i „buď platí *p* nebo *q* nebo obojí“; někdy se vylučovací disjunkce indikuje tím, že je užita čárka před „nebo“). Proto se o disjunkci hovoří v případě jejího použití v prostředí přirozeného jazyka jako o *nevylučovacím nebo*.

Příklady vět: „Prší nebo je mlha“, „Auto má Petr nebo Pavel“.

Implikace (→, „jestliže, pak“)

$p \rightarrow q$
1 **1** 1
1 **0** 0
0 **1** 1
0 **1** 0

Implikaci v přirozených jazycích vyjadřujeme spojeními jako „*jestliže* ..., *pak* ...“, přičemž „jestliže“ může být vyjádřeno pomocí přípony „-*li*“ u slovesa. Dalšími příklady jsou „*když* ..., *tak* ...“ nebo „*pokud* ..., *tak* ...“.

Příklady vět: „Pokud mám dobrou náladu, jdu na procházku“, „Je-li číslo dělitelné čtyřmi, pak je sudé“.

Tento druh implikace, který se v klasické logice používá, se z určitých historických důvodů nazývá *materiální implikace*, případně *filónská implikace* (podle Filóna z Megary, který ji jako první definoval takto). První člen implikace se nazývá *antecedent*, druhý *konsekvent*. Antecedentu se říká *dostatečná podmínka* a konsekventu *nutná podmínka*, čímž je reflektováno to, že souvětí tvaru implikace může být pravdivé, ačkoli není naplněna podmínka z antecedentu.

Je třeba si dobře uvědomit a mít na paměti, že implikace je pravdivá, pokud je její konsekvent pravdivý; dále: implikace je pravdivá, pokud je její antecedent nepravdivý.

Jak vidíme, pravdivostní funkce materiální implikace funguje tak, že složený výrok nabývá hodnoty pravda i tehdy, je-li první výrok nepravdivý a druhý pravdivý, srov. třetí řádek, tj. řádek, v němž je argumentu ⟨0,1⟩ přiřazena hodnota 1. Klasická logika totiž v případě implikace nebere zřetel na kauzální podmíněnost, ba ani jinou souvislost jevů, o nichž se v dílčích výrocích hovoří. Ač ve větě „Jestliže prší, je mokro" cítíme přímou závislost mokra na pršení, logika jakoby říká, že může být mokro, přestože neprší – uvažme, že projel kropicí vůz. Klasická logika se vskutku nezabývá žádnou kauzální, resp. fyzikální souvislostí jevů a tak věta „Je-li Praha větší než Brno, pak v Ostravě prší" nabývá z logického hlediska stejného průběhu pravdivostních hodnot jako věta tvaru implikace, která nějakou souvislost vyjadřuje. Ještě jednou: reprezentovat materiální implikací každé implikativní jazykové spojení je chybou – jako důležitý příklad uvažme dále třeba tzv. subjunktivní kondicionály „Pokud hodíme papír do ohně, shoří", u nichž záhy přijdeme na rozpor mezi intuitivními pravdivostními podmínkami a definicí materiální implikace (problém subjunktivních kondicionálů je zkoumán v neklasické, resp. filosofické logice).

Z pedagogických důvodů je možno chování implikace ve třetím řádku objasnit na příkladu slibu otce synovi „Jestliže budeš mít na vysvědčení vyznamenání, dostaneš kolo". Pokud syn splní daný předpoklad a otec splní slib, tak implikace je splněna, tedy 1. V případě špatného vysvědčení a nesplnění slibu je implikace rovněž splněna, tedy 1. Implikace je ovšem nesplněna, 0, pokud syn dostane vysvědčení s vyznamenáním, ale otec nedodrží slib, nedá mu kolo. Implikace je nicméně splněna i tehdy, když syn nemá vysvědčení s vyznamenáním, avšak otec mu dá kolo a to například proto, že zachránil topící se spolužačku.

Ekvivalence (↔, „právě tehdy, když")

$p \leftrightarrow q$
1 **1** 1
1 **0** 0
0 **0** 1
0 **1** 0

Fungování ekvivalence, stejně jako i její vyjádření pomocí obratů „... *právě tehdy, když* ..." nebo „... *tehdy a jen tehdy* ..." (či „... *je totéž jako* ...", eventuálně i „... , *pokud* ...“, anebo i „..., *neboli* ...“, „..., čili ...“), je jistě známo. Věta tvaru ekvivalence je pravdivá tehdy, když jsou oba jednoduché výroky buď pravdivé, anebo nepravdivé. Někdy bývá ekvivalence nazývána *obousměrná implikace*, a to proto, že formule $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ je ekvivalentní s formulí $p \leftrightarrow q$. (V anglicky psaných logických textech se vyjádření ekvivalence „if and only if“ zkracuje na „iff“; český ekvivalent není zaveden.)

Příklady vět: „Přirozené číslo je prvočíslem tehdy, když má právě dva dělitele“, „Duha vzniká právě tehdy, když za deště svítí slunce“.

Porovnání tabulek nejznámějších výrokových spojek

negace („ne“)	konjunkce („a“)	disjunkce („nebo“)	implikace („jestliže, pak“)	ekvivalence („právě tehdy, když“)
$\neg\ p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0 1	1 **1** 1	1 **1** 1	1 **1** 1	1 **1** 1
1 0	1 **0** 0	1 **1** 0	1 **0** 0	1 **0** 0
	0 **0** 1	0 **1** 1	0 **1** 1	0 **0** 1
	0 **0** 0	0 **0** 0	0 **1** 0	0 **1** 0

Pro zapamatování tabulek jednotlivých pravdivostních funkcí je důležité si uvědomit, v kterém řádku, tedy pro jaký argument, se daná funkce odlišuje ve výsledné hodnotě od hodnot v ostatních řádcích:

- konjunkce je pravdivá jen tehdy, když jsou oba dílčí výroky pravdivé; jinak je nepravdivá;
- disjunkce je nepravdivá jen tehdy, když jsou oba dílčí výroky nepravdivé; jinak je pravdivá;
- implikace je nepravdivá jen tehdy, když první výrok je pravdivý a druhý nepravdivý; jinak je pravdivá;
- ekvivalence je pravdivá jen tehdy, když jsou oba dílčí výroky buď pravdivé, anebo nepravdivé.

Nádavkem přidejme alternativní tabulkové vyjádření čtyř nejznámějších pravdivostních funkcí, jež se stalo populární v nedávné době. (Pokud jsou v takovýchto tabulkách vypuštěny indikace *p* a *q*, hodnoty *p* jsou vypsány ve zcela levém sloupci, kdežto hodnoty *q* v horním řádku.)

$\wedge$		q	
		1	0
p	1	**1**	**0**
	0	**0**	**0**

$\vee$		q	
		1	0
p	1	**1**	**1**
	0	**1**	**0**

$\rightarrow$		q	
		1	0
p	1	**1**	**0**
	0	**1**	**1**

$\leftrightarrow$		q	
		1	0
p	1	**1**	**0**
	0	**0**	**1**

2.4 Další zajímavé pravdivostní funkce

Vylučovací disjunkce ($\vee\vee$, „buďto, anebo“)

$p \vee\vee q$
1 **0** 1
1 **1** 0
0 **1** 1
0 **0** 0

Vylučovací disjunkce, vyjádřitelná v češtině obraty jako „*buď* ..., *nebo* ...“, či „*buď*,... *anebo jen* ...“, se liší od disjunkce nevylučovací, v prostředí informatiky bývá nazývána „XOR“ z anglického „exclusive or“. Argumentům přiřazuje stejné hodnoty jako negace formule tvaru ekvivalence, proto bývá také nazývána *nonekvivalence*. Jiným názvem je *kontravalence*, neboť přináší pravdivostní hodnotu pravda tehdy, když mají p a q opačné pravdivostní hodnoty. Upozorňujeme, že obecně se v klasické logice uplatňuje nevylučovací disjunkce $\vee$.

Příklady vět: „Buďto si koupil auto Karel, anebo si koupil auto Pavel“, „Buďto zkoušku udělám, nebo mi ukončí studium“.

Shefferova funkce (↑, „je neslučitelné")

$p \uparrow q$
1 **0** 1
1 **1** 0
0 **1** 1
0 **1** 0

Shefferovu funkci, nezřídka značenou symbolem „/" (ale i „|"), či nověji „↑", v informatice „NAND" (zkratka za angl. „negated and"), můžeme v češtině odhalit za obratem „... *je neslučitelné s* ...". Funguje stejně jako negovaná formule tvaru konjunkce, tedy $\neg(p \wedge q)$; srov. novější značku i zkratku.

Příklad věty: „To, že vládnoucí strana zvýšila daně, je neslučitelné s tím, co má ve volebním programu".

Nicod-Peirceova funkce (↓, „ani, ani")

$p \downarrow q$
1 **0** 1
1 **0** 0
0 **0** 1
0 **1** 0

Českým vyjádřením snad nejvíce odpovídajícímu Nicod-Peirceově funkci, značené symbolem „|", či nověji „↓", „NOR" (zkratka za angl. „negated or"), je obrat „*ani..., ani* ...". Funguje stejně jako negovaná formule tvaru disjunkce, tedy $\neg(p \vee q)$; srov. novější značku i zkratku.

Příklady vět: „V závodu nezvítězil ani Alan, ani Boris", „Nejsem žádný stařec, žádný věřící" (L. Janáček).

Obrácená implikace (←, „pakliže")

$p \leftarrow q$
1 **1** 1
1 **1** 0
0 **0** 1
0 **1** 0

Funkce f^2_3, značená znakem „←“, se nazývá *obrácená implikace*, event. *konverzní implikace*. Funguje obdobným způsobem jako implikace, ovšem s obráceným pořadím členů (tedy pokud druhá část věty implikuje první část). Typicky je v češtině vyjadřována obraty jako „..., *pakliže* ...“, „..., *jestliže* ...“ či „..., *pokud* ...“.

Příklady vět: „Bude propuštěn, pakliže je nevinný“, „Budu se na tebe zlobit, pokud mi nevrátíš mou knihu“.

Negovaná implikace (↛, „a nikoli“)

$p \not\rightarrow q$
1 **0** 1
1 **1** 0
0 **0** 1
0 **0** 0

Funkci f^2_{12}, kterou můžeme nazývat negovaná implikace (značeno přeškrtnutým znakem implikace) můžeme nalézt za obraty jako „..., *a nikoli* ...“, „... *a ne* ...“ či „... , *ale ne* ...“.

Příklady vět: „Diamanty ukradl Adam, nikoli Bedřich“, „Zákusek dostanu já, ale ty ne.“

2.5 Analýza výroků přirozeného jazyka prostředky VL

Výše jsme si řekli, že pro ověření platnosti úsudků formulovaných v přirozeném jazyce je potřeba tento úsudek dát do vztahu s formálním úsudkem, jenž může být chápán jako příslušná *logická forma úsudku*. V našem případě bude tato forma souborem formulí VL, přičemž úsudek formulovaný v přirozeném jazyce prohlásíme za platný, pokud je platný jemu korespondující formální úsudek.

Potíž tkví v povaze této korespondence, neboť se nejedná o stoprocentní korespondenci: některé logické formule daného formálního úsudku neodpovídají zcela jednoznačně větám přirozeného jazyka. V této souvislosti se někdy říká, že věty přirozeného jazyka skrývají svou logickou formu (jíž je ona formule). Jinými slovy, analýza výroků přirozeného jazyka sice v jádru spočívá v mechanickém převodu výroků přirozeného jazyka do formálního jazyka VL, avšak leckdy při tom narazíme na úskalí a nutnost idealizovat situaci.

Příkladem *logických analýz* výroků přirozeného jazyka jsou vlastně už příklady výroků tvaru konjunkce, disjunkce atd., které jsme uváděli výše. Při *formalizaci*, tj. vlastně logické analýze, těchto výroků postupujeme obecně tak, že každému jednoduchému výroku přiřadíme jednu z výrokových proměnných, které máme k dispozici. V každém řešeném analytickém případě užíváme různé výrokové proměnné pro každý svébytný jednoduchý výrok. Liší-li se dva výroky byť jen jediným slovem, a nejedná se přitom jen o nějakou stylistickou obdobu, jsou pro nás odlišné, reprezentujeme je tedy odlišnými výrokovými proměnnými. Zcela jednoduchý příklad pro ilustraci: ve výroku „Bedřich má auto, Alík je pes, ovšem Micka není kůň" identifikujeme tři rozdílné jednoduché výroky, totiž „Bedřich má auto", „Alík je pes", „Micka /není/ kůň", které reprezentujeme po řadě p, q, r. Výrok „Micka není kůň" je ovšem už výrok složený, obsahuje negaci, takže tomuto výroku odpovídá formule $\neg r$.

Jak vidíme, u složených výroků je důležité pečlivě odlišit jednotlivé jednoduché výroky, z nichž je onen složený výrok složen. Poté hledáme pravdivostní funkci, která nejlépe odpovídá spojení jednotlivých výroků ve složeném výroku. Důležité je, že vhodná výroková spojka reprezentuje tytéž pravdivostní podmínky, jako má námi analyzovaný výrok (resp. jeho část). Pro ilustrativní příklad, výrok „Bedřich má auto a Alík je pes" je pravdivý pouze v jediném případě, totiž pokud má Bedřich auto a Alík je pes; v ostatních případech je nepravdivý. Zcela tytéž pravdivostní podmínky reprezentuje pravdivostní funkce konjunkce, proto je věcně adekvátní analyzovat větu „Bedřich má auto a Alík je pes" pomocí formule $(p\wedge q)$ – tato formule totiž vhodně koresponduje s danou větou.

Pro vyznačení struktury celého výroku, toho, jaké podformule určitá výroková spojka spojuje, nám pomáhají kulaté závorky. Těch musí být vždy sudý počet, poněvadž počet levostranných a pravostranných závorek musí být stejný. Například „Jestliže Bedřich má auto a Alík je pes, tak Micka není kočka" analyzujeme formulí $((p\wedge q)\rightarrow\neg r)$; $\rightarrow$ se tedy aplikuje na pravdivostní hodnotu formule $(p\wedge q)$ a pravdivostní hodnotu formule $\neg r$; p a q zde patří k sobě, jak je indikováno dvojicemi závorek (formule $(p\wedge(q\rightarrow\neg r))$ strukturou koresponduje jiné větě, totiž „Bedřich má auto a jestliže Alík je pes, tak Micka není kočka"); $\neg r$ je v zápisu jednoznačná formule, proto nezávorkujeme ani jako $(\neg r)$, ani jako $\neg(r)$.

Připomeňme si, že VL je s to analyzovat jen (některé) věty oznamovací, nikoli věty rozkazovací, tázací apod. To proto, že formule VL, čítajíc v to výrokové proměnné, mají sémantickou hodnotu pravda nebo nepravda, což rozkazovací, tázací apod. věty nemají. Níže uvidíme, že u některých složených oznamovacích vět nelze určit, která pravdivostní funkce by měla odpovídat dané gramatické spojce. Příklady takových výroků jsou „Na Měsíci jsou krátery, protože Měsíc nemá atmosféru" nebo „Adam si myslí (domnívá, věří, ví), že ...", ad.

2.5 Příklady – analýza výroků přirozeného jazyka prostředky VL

1) Analyzujme pro příklad výrok „Je-li motor zadřený, auto není pojízdné“. Jistě rozeznáme, že jde o implikativní souvětí. Antecedentem je zde „motor je zadřený“, tedy p, konsekventem je „auto není pojízdné“, tedy $\neg q$. Celá formule je proto $(p\rightarrow\neg q)$.

2) Výrok „Pavel má auto, zatímco Kvido nikoli“ analyzujeme jako větu o dvou výrocích, druhý z výroků je negován. Výroková spojka reprezentující pravdivostní podmínky vyjádřené danou větou je konjunkce. Správnou formulí je tedy $(p\wedge\neg q)$. Všimněme si, že ‚převyprávění této formule zpět do češtiny „Pavel má auto a Kvido nemá auto“ je co do pravdivostních podmínek shodné s původní větou.

3) Mějme větu „Není pravda, že jestliže prší a svítí slunce, vzniká duha“. Elementární výroky tu jsou tři: „prší“ (čemuž odpovídá p), „svítí slunce“ (tedy q), „vzniká duha“ (tedy r). Gramatickými spojkami jsou „není pravda“ (čemuž odpovídá $\neg$), „a“ ($\wedge$), „jestliže, pak“ ($\rightarrow$). Konjunkce spojuje „prší“ a „svítí slunce“, což je antecedent implikace, jejímž konsekventem je „vzniká duha“; „není pravda“ vyjadřuje negaci celé věty. Dohromady tedy $\neg((p\wedge q)\rightarrow r)$.

4) Analyzujme výrok „Prší nebo neprší“. Někdo by mohl uvažovat, že zmiňované dva stavy počasí se zcela vylučují, a proto lze výrok analyzovat pomocí formule $(p\vee\vee\neg p)$. Přesto je v logice zvykem zde nepoužívat vylučovací disjunkci, neboť jde o slovní vyjádření slavného logického zákona o vyloučeném třetím, totiž $(p\vee\neg p)$. Všimněme si ještě, že je chybné analyzovat tuto větu třeba jako $(p\vee q)$; výrok „neprší“ obsahuje výrok „prší“ jako svou součást, což je vystiženo při formalizaci $\neg p$; při formalizaci q vlastně chybně naznačujeme, že „neprší“ je výrok nezávislý na výroku „prší“, což by neblahým způsobem zkreslilo pravdivostní podmínky.

5) Analyzujme schématickou větu „Jestliže A nebo B, pak nikoli C nebo D, pokud neplatí E a F“. Lehce identifikujeme dvojice výroků spojených disjunkcí, totiž $(a\vee b)$, $(c\vee d)$, $(e\wedge f)$. Dále můžeme zjistit, že první z těchto dvojic slouží jako antecedent implikace, tj. $((a\vee b)\rightarrow\ldots)$. Konsekvent je sestaven tak, že $\neg(c\vee d)$ je implikativně podmíněn pomocí $\neg(e\wedge f)$ ve smyslu obrácené implikace. Výsledkem analýzy je formule $((a\vee b)\rightarrow(\neg(c\vee d)\leftarrow\neg(e\wedge f)))$, což lze upravit na $((a\vee b)\rightarrow(\neg(e\wedge f)\rightarrow\neg(c\vee d)))$.

6) Analyzujme větu „Není-li Adam v Praze, tak je den pracovního volna nebo státní svátek, a Adam je tedy u rodičů nebo u přátel“. Lze si uvědomit, že vše je podmíněno tím, že Adam není v Praze, $\neg p$, což je tedy antecedent implikace, která leží ve schématu této věty. Konsekvent pak mluví o nějakém ze dvou druhů pracovního klidu, tj. $(q \vee r)$, přičemž za těchto okolností je Adam u rodičů či u přátel, tj. $(s \vee t)$. Celá formule je tedy $(\neg p \rightarrow ((q \vee r) \wedge (s \vee t)))$.

7) V případě „Sněží a je mlha nebo mrzne“ snadno identifikujeme konjunkci mezi p a q a disjunkci mezi q a r. Z hlediska logiky však není rozhodnutelné, jakým způsobem mají závorky vyznačit strukturu formule, tedy zda je logickou strukturou této věty $(p \wedge (q \vee r))$ anebo $((p \wedge q) \vee r)$, gramatika nám nijak nenaznačuje, kde by závorky měly být. (Jak si lze ověřit, tyto různé formule mají při valuacích výrokových proměnných odlišné hodnoty.) Z hlediska logiky není průkazné, že jev mlžení se zpravidla vyskytuje současně s jevem pršení – lze si představit, že za jiných atmosférických podmínek je tomu jinak, naši opakovanou empirickou zkušenost, že první dva jevy spolu souvisí, nesmíme při logické analýze uplatnit.

8) Výrok „Je mokro, protože pršelo“ není ve VL analyzovatelný jinak, než jako jednoduchý výrok, tedy p. Nikoli jako $(q \rightarrow p)$ či snad $(p \rightarrow q)$. Klasická logika nijak nereflektuje momentálně platné kauzální spojení mezi těmito dvěma jevy. Snaha najít mezi pravdivostními funkcemi tu, jež odpovídá gramatické spojce „protože“, sice zprvu naráží na úspěch, neboť víme, že nepravdivost jednoho z dílčích výroků způsobuje nepravdivost celku (to mimochodem vylučuje $\rightarrow$). Nicméně se nám nechce uznat, že daný výrok je pouhým konjunktivním složením, tj. „Je mokro a pršelo“, kdy je celý výrok pravdivý, pokud jsou oba dílčí výroky pravdivé. (Možnost, že by byl celý výrok nepravdivý, pokud jsou oba výroky pravdivé, odpadá, protože by šlo o výrok nepravdivý logicky – což odporuje naší intuici o kontingentní pravdivosti daného výroku.)

9) Zamysleme se nad větou „Adam se domnívá, že na Marsu je život“. Jistě ji můžeme chápat jako svého druhu souvětí složené ze dvou vět, totiž „Adam se domnívá“ a „Na Marsu je život“. Jenže pravdivost nebo nepravdivost druhé věty je irelevantní pro pravdivost celku. Celý výrok je pravdivý, či nepravdivý odvisle od toho, zda Adam má vztah k obsahu druhé věty. Sémantickým obsahem druhé věty není sama pravdivostní hodnota, ale to, čemu se nejen v logice říká propozice, tedy sémantický obsah věty; i proto je chybné modelovat gramatickou spojku „že“ jakožto operující na pravdivostních hodnotách.

2.6 Příklady – přenos pravdivosti

To, co již víme o pravdivostních funkcích, můžeme využít ve cvičebních příkladech, které spočívají v určení pravdivostní hodnoty výroku na základě pravdivosti určitých jiných výroků. Převod těchto výroků do jazyka VL obvykle používáme jen v méně přehledných případech, běžně stačí vepisovat determinované pravdivostní hodnoty rovnou do slovního zadání.

Pro ilustraci vyřešíme následující jednoduchý příklad. Slovní zadání: Předpokládejme, že dva dané výroky jsou oba pravdivé. Z výroků v nabídce možností určete ten jediný, který je pak rovněž pravdivý.

Neumím německy.
Umím anglicky.

i) Neumím anglicky nebo umím německy.
ii) Neumím anglicky nebo neumím francouzsky.
iii) Umím francouzsky nebo umím anglicky.
iv) Jestliže umím francouzsky, tak umím německy.
v) Jestliže neumím německy, tak umím francouzsky.

Popis řešení. Protože $\neg n$ („Neumím německy“) je rovno 1, tak n=0 ($\neg$ obrací pravdivostní hodnotu); a=1 („Umím anglicky“). Možnost i) proto odpadá, neboť $(0\vee 0)$ je rovno 0. Možnost ii) také odpadá, neboť pravdivost $(0\vee f)$ závisí na neznámé hodnotě výroku f („Umím francouzsky“); podobně odpadají rovněž možnosti iv) a v). Zbývá možnost iii), u níž máme $(f\vee 1)$, což je díky vlastnostem disjunkce rovno 1.

Podobně řešíme i komplikovanější podoby takovýchto příkladů. Existuje třeba varianta, kdy dva dané výroky jsou předpokládány jako pravdivé:

Mám kámen a nemám nůžky.
Mám papír nebo mám nůžky.

ale z nabízených výroků máme určit ten jediný výrok, který za daného předpokladu pravdivý není:

i) Jestliže nemám papír, tak mám kámen.
ii) Jestliže mám papír, tak nemám kámen.
iii) Nemám papír nebo nemám nůžky.
iv) Jestliže mám papír, tak mám kámen.
v) Mám papír nebo nemám nůžky.

Protože ($k \wedge \neg n$) (tj. symbolický přepis první premisy) je rovno 1, tak díky definici konjunkce platí, že k=1 a n=0 (neboť $\neg n$=1); z toho plyne, že $\neg k$=0. Protože ($p \vee n$) je rovno 1, tak musí být p=1. Možnost ii) je ($p \rightarrow \neg k$), čili (1→0), což je dle definice implikace rovno 0. Správnou odpovědí je tedy ii).

3. Jazyk VL

Jazyky odlišujeme *přirozené* (např. čeština) a *umělé* (např. esperanto), přičemž mezi umělé jazyky patří jazyky *formální*. Příkladem umělého formálního jazyka je jazyk VL; ten se záhy chystáme předložit. Jazyky můžeme zkoumat v celku, tedy tak, jak jsou jejich znaky užívány mluvčími k vyjádření jazykových významů. Tehdy jde o zkoumání náležící do *pragmatiky*, poněvadž jsou uvažovány činnosti uživatelů daného jazykového systému. Abstrahujeme-li od uživatelů a jejich jazykových aktů, zbydou nám (jazykové) znaky a jejich významy (denotáty, referenty), jejichž vztahy jsou předmětem *sémantiky*. Abstrahujeme-li dále od významů, apod., a zkoumáme jen znaky jako takové (jak se řetězí ve složitější znaky apod.), jsme v oblasti *syntaxe*. (Sémiotika jakožto věda o znacích a znakových soustavách má tři subdisciplíny: syntax, sémantiku a pragmatiku.)

Přirozené jazyky vznikly živelně a mnohé mají své uživatele, kteří jsou spolu s lingvisty nejvíce kompetentní k otázce jejich porozumění. V této pozici pochopitelně nejsme v případě umělých jazyků: ten, kdo nás s takovým jazykem seznamuje, je proto povinen ozřejmit jeho syntax a sémantiku. Syntax vlastně vymezuje, které znaky se počítají do onoho jazyka, zatímco sémantika vymezuje, jak těmto výrazům rozumět. Pro přesnost tedy dodáváme, že jazyk VL je dán svou syntaxí a sémantikou.

V případě formálních jazyků se ukázalo, že pro rozvoj například logiky je užitečné uvažovat druhově rozdílné sémantiky pro to, co bychom intuitivně chápali jako jazyk VL. Zde však budeme uvažovat pouze čistě klasickou sémantiku. Syntax jazyka VL může být striktně vzato zadána odlišně, čemuž vždy odpovídá příslušná sémantika, takže tu vznikají zcela konkrétní, odlišné jazyky VL. Ty všechny přitom mají společný předmět: pravdivostní funkce, vztahy mezi nimi, a jejich vyjádření těmi nebo jinými formulemi. (Opustíme-li rámec klasického chápání VL, můžeme se setkat například i s názory, že formule jazyka VL označují propozice.)

Jazyky obvykle chápeme nejenom jakožto kompozicionální (význam složeného výrazu je odvoditelný z významu složek), ale také jakožto umožňující generování nekonečně mnoha vět (formulí) daného jazyka, jež umožňují vyjádřit nekonečně mnoho významů (‚myšlenek‘). Je nasnadě, že věty takového jazyka – ať už věty chápané jakožto čistě syntaktické, anebo zčásti sémantické entity – nelze zadat enumerativně. K jejich zadání proto slouží rekurzivní definice, jež nám umožňují o libovolném řetězci znaků rozhodnout, zda je, či není výrazem toho jazyka, a hlavně, co je jeho významem, je-li prvkem jazyka VL.

3.1 Syntax VL

Nyní uvedeme *syntax* našeho jazyka VL. V části zvané *abeceda* určujeme základní stavební jednotky tohoto znakového systému, v části zvané *gramatika* generujeme z abecedy slova nad abecedou, tj. znakové řetězce. V případě jazyka VL se významuplná slova nad abecedou nazývají *správně* (ev. *dobře*) *utvořené formule*, *s.u.f.* (ev. *d.u.f.*; angl. „wff“).

Abeceda

i. výrokové proměnné (jakožto symboly) p, q, r, ... p_1, q_1, r_1, ...
ii. výrokové spojky (jakožto symboly) $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
iii. pomocné symboly (,)

Symbolů výrokových proměnných je uvažován nekonečný počet. Často bývají označovány též jako *výrokové symboly*. Výrokové spojky, často označované jako (*booleovské*) *funktory* anebo *(větné) operátory*, jsou konstantami, vždy totiž označují jen jednu určitou funkci. Pomocné symboly nechápeme jako nositele samostatného významu. Někdy se k oblým závorkám za účelem lepší čitelnosti přidávají i hranaté závorky a také mezery.

V zájmu rekurzivnosti naší následující definice užijeme symboly A a B, které jsou proměnnými zastupujícími jakékoli, tedy i libovolně složené formule jazyka VL. V textech, jež mají blízko k matematické logice, jsou často místo A a B používány znaky φ a ψ anebo α a β. Symboly A a B jsou výrazy metajazyka, což je jazyk, kterým hovoříme o jazyku VL.

Gramatika

i. Výrokové proměnné (p, q, r, ...) jsou *správně utvořenými formulemi* (*s.u.f.*).
ii. Jestliže A a B jsou s.u.f., pak $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ jsou *s.u.f.*
iii. Nic jiného není *s.u.f.*

Pod *formulemi* budeme níže rozumět právě správně utvořené formule daného jazyka VL. Je-li takovou formulí sama výroková proměnná, budeme ji nazývat *atomická formule* (jiní autoři říkají *atom* či *prvotní formule*), ostatní formule jsou zvány *molekulární* (či *složené*) *formule*.

Gramatika nám umožnuje rozhodnout, zda jsou q nebo $(p \rightarrow (q \wedge \neg r))$ správně utvořenými formulemi daného jazyka VL. Formule q je s.u.f. proto, že splňuje bod i. Formule $(p\rightarrow(q\wedge\neg r))$ je s.u.f. proto, že splňuje body ii. a i. – rekurzí zjistíme, že $(p\rightarrow(q\wedge\neg r))$ má tvar $(A\rightarrow B)$, že její podformule $(q\wedge\neg r)$ má tvar $(A\wedge B)$, že $\neg r$ má tvar $\neg A$, a že p, q i r, splňují bod i.

Bod gramatiky ii) se může v různých systémech VL lišit. Například tu jsou jazyky jen s $\neg$ a $\vee$, ba dokonce jen s $\uparrow$ (alternativně $\downarrow$). Ostatní výrokové spojky lze pak v daném systému odvodit. Dokonce i každá n-ární výroková spojka – pro $n>2$ – se dá vyjádřit kombinací z binárních výrokových spojek. Srov. k tomu blíže kapitolu 5.

Níže budeme užívat *konvenci o vynechávání závorek* všude tam, kde to nebude na újmu jednoznačnosti zápisu dané formule. Zpravidla budeme vynechávat zejména vnější závorky. Někdy bývá v logických textech za účelem eliminace závorek uplatňována konvence o prioritě operátorů: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, přičemž $\neg$ má nejmenší sílu, tj. pojí se jen s bezprostředně následující formulí. Formule $\neg p\wedge q\vee r\rightarrow s\leftrightarrow t$ pak zkracuje $(((((\neg p)\wedge q)\vee r)\rightarrow s)\leftrightarrow t)$; tuto konvenci zde ovšem uplatňovat nebudeme. Podobně nebudeme uplatňovat někdy užívanou konvenci, podle níž $\rightarrow$ má největší sílu, takže například $p\vee q\rightarrow\neg r\wedge s$ zkracuje naši formuli $(p\vee q)\rightarrow(\neg r\wedge s)$.

3.2 Některé další syntaktické pojmy VL

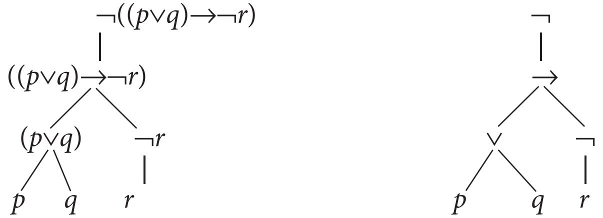
Formule se vyznačují syntaktickou skladebností, obsahují *podformule*.

Podformule

i. Každá formule A je (tzv. nevlastní) *podformulí* A.
ii. Je-li formule A tvaru $\neg B$, tak B je (tzv. vlastní) *podformulí* A.
iii. Je-li formule A tvaru $(B\wedge C)$, nebo $(B\vee C)$, nebo $(B\rightarrow C)$, nebo $(B\leftrightarrow C)$, tak B a C jsou (tzv. vlastními) *podformulemi* A.
iv. Nic jiného není *podformulí* formule A.

Podformulí například formule $p\rightarrow q$ jsou formule $p\rightarrow q$, p, q, nikoli však řetězce $\rightarrow$ nebo $p\rightarrow$. Mohli bychom dále definovat pojem *bezprostřední podformule*, ale intuitivně je jasné, že třeba $p\rightarrow q$ a $\neg r$, a nikoli p a q či r, jsou bezprostředními podformulemi $(p\rightarrow q)\rightarrow\neg r$.

V logice se někdy uplatňují úvahy opírající se o *složitost* (*komplexitu*) *formulí*. Zde jenom naznačíme, jak by se takový pojem definoval: i. výrokové proměnné mají složitost nula, ii. formule tvaru $\neg A$ mají složitost o jedna vyšší než A, iii. formule tvaru $A*B$ (kde $*$ je binární spojka) má komplexitu o jedna vyšší než nejvyšší složitost ze složitostí A a B. (Nepleťme si složitost s *délkou* *formule*, kdy například $(p{\rightarrow}q){\rightarrow}\neg r$ má délku 6, protože má 3 spojky a 3 atomické formule.) O výstavbě formulí můžeme rovněž uvažovat v tom smyslu, že tu jsou tyto formule *vytvářející posloupnosti*. Například vytvářející posloupností formule $\neg((p{\vee}q){\rightarrow}\neg r)$ je p, q, r, $\neg r$, $(p{\vee}q)$, $((p{\vee}q){\rightarrow}\neg r)$, $\neg((p{\vee}q){\rightarrow}\neg r)$. Prakticky totéž zachycují *syntaktické stromy (pod)formulí*, kdy v kořeni je sama formule, v uzlech větví jsou složené podformule a listy jsou tvořeny atomickými formulemi. Zde je ukázka, napravo v úspornější formě:



V souladu s výstavbou formulí podle gramatiky se hovoří o tom, že nějaká definice či důkaz jsou vystavěny v souladu s *indukcí podle složitosti formule*. Princip indukce podle složitosti formule tedy využívá skutečnosti, že uvažovanou vlastnost má každá formule, totiž i. libovolná proměnná, ii. má-li tuto vlastnost formule A, tak ji má i formule $\neg A$, iii. mají-li tuto vlastnost formule A a B, tak ji má i formule $A{*}B$.

3.3 Sémantika VL

Už jsme výše řekli, že úkolem sémantiky VL je přiřadit k (správně utvořeným) formulím jazyka VL významy. Těmito významy jsou jednoduše pravdivostní hodnoty 1 a 0. Naše sémantika má dvě části: nejprve vyhlásíme, že výrokové proměnné nabývají pravdivostních hodnot 1 či 0 odvisle od valuace (tj. pravdivostního ohodnocení). Každou valuaci si můžeme představit jako nekonečnou posloupnost jedniček a nul, kdy první člen této posloupnosti je přiřazen lexikograficky první proměnné, druhý člen druhé proměnné atd.; jiná valuace se od této liší alespoň v jednom jediném členu. Poté vyhlásíme, jak určit pravdivostní hodnotu u složených formulí. Učiníme tak pro nekonečně mnoho možných složených formulí, naše definice je rekurzivní. Všimněme si, že v definici interpretace jsou pak vlastně implementovány definice pravdivostních funkcí –

v definici například říkáme, že formule tvaru konjunkce je pravdivá pouze v jediném případě, totiž když jsou oba její členy pravdivé.

Nyní se podíváme na věc trochu zeširoka. Pomocí výroků se v češtině snažíme mluvit o tom, jaký je svět, v jakém je stavu. Výrok „Alík je pes“ je pravdivý, tj. nabývá pravdivostní hodnotu pravda, pokud stav světa je takový, že Alík je psem; analogicky pro „Kvido má auto“; dané dva výroky si označme po řadě p a q. Dohromady jsou tu čtyři stavy světa: Alík je pes, Kvido má auto; Alík je pes, Kvido nemá auto; Alík není pes, Kvido nemá auto; Alík není pes, Kvido má auto. Stavy světa si označme po řadě v_1, v_2, v_3, v_4. Každý stav světa naše dva výroky ohodnocuje, činí je pravdivými nebo nepravdivými. Například v_2 činí výrok p pravdivým, kdežto q nepravdivým. Můžeme tedy říci, že pravdivost atomického výroku/formule je přímo určena *pravdivostním ohodnocením*, jímž je právě v. Pravdivostnímu ohodnocení budeme alternativně říkat *valuace* (značena v). V případě molekulárních výroků jako $p \wedge q$ je pochopitelně jejich pravdivost odvislá od významu, tj. pravdivosti, jejich složek. Výrok jako $p \wedge q$ je pravdivý právě tehdy, když jsou pravdivé jeho složky p a q, čili když valuace pro p a q je shodná, jmenovitě je to hodnota 1. Právě toto je implementováno v následující definici interpretace.

Technicky vzato můžeme každou valuaci v chápat jako nekonečnou posloupnost jedniček a nul, např. v_2 je posloupností 101111…., jejíž první člen je asociován s první proměnnou, druhý člen s druhou proměnnou, atd.

Valuace

Každá jednotlivá *valuace v* je funkce zobrazující všechny proměnné na pravdivostní hodnoty 1 a 0.

Protože každá valuace je funkce, $v(A)$ dává pravdivostní hodnotu pro formuli A (podmínka: A je atomická formule). Ještě poznámka: někdy v našich úvahách budeme pracovat s reprezentanty celých tříd valuací; například budeme uvažovat v, která dává pro p hodnotu 1 a pro q hodnotu 0, přičemž v je reprezentant všech rozmanitých valuací, jež ohodnocují porůznu taktéž r, s, atd., nicméně p a q ohodnocují stejně.

Intepretace $\mathfrak{I}(v,A)$, kde „$\mathfrak{I}$“ je písmeno „I“ psané kurentem, je binární funkce, která je parametrizována k valuacím a formulím. $\mathfrak{I}(v,A)$ dává pravdivostní hodnotu, která formuli A přísluší odvisle od valuace v. Je-li A proměnná, která dostává od v pravdivostní hodnotu 1, $\mathfrak{I}(v,A)=1$; čili intepretace atomické formule A zcela splývá s valuací pro A, tj. $\mathfrak{I}(v,A) = v(A)$ (kde A je atomická formule). U molekulárních formulí je intepretace rovněž odvislá od valuace, ale už na ni není zcela redukovatelná. Zde je definice funkce intepretace:

Interpretace

Interpretace $\Im$ formule A na základě valuace v je 1, tj. $\Im(v,A) = 1$, právě tehdy, když platí, že:

1. A je výroková proměnná a $v(A) = 1$.
2. A je tvaru $\neg B$ a $\Im(v,B) = 0$.
3. A je tvaru $B \wedge C$ a $\Im(v,B) = \Im(v,C) = 1$.
4. A je tvaru $B \vee$C a $\Im(v,B) = 1$ nebo $\Im(v,C) = 1$.
5. A je tvaru $B \rightarrow C$ a $\Im(v,B) = 0$ nebo $\Im(v,C) = 1$.
6. A je tvaru $B \leftrightarrow C$ a $\Im(v,B) = \Im(v,C)$.

Tím, že jsme vymezili, na kterých argumentech dává funkce $\Im$ hodnotu 1, jsme zároveň vymezili, na kterých argumentech dává $\Im$ hodnotu 0. Všimněme si dále, že podmínky 1.–6. vylučují, aby $\Im$ byla funkcí, jež činí například pravdivými formule A i $\neg A$, anebo formuli $A \wedge B$ pravdivou, ale A nepravdivou.

Někteří autoři v rámci VL valuaci a interpretaci neodlišují a jednoduše říkají, že formule A je pravdivá na základě valuace. Tato jejich valuace splňuje právě uvedené podmínky 1.–6., uvažují tedy naši interpretaci, nikoli naši valuaci. Naše valuace totiž složené formule nijak neohodnocuje, což znamená, že je parciální funkcí definovanou na množině formulí (nebo totální funkcí definovanou nikoli na množině formulí, ale jen na množině výrokových proměnných). Někteří autoři pak rozeznávají v v našem smyslu a w (či v s pruhem), kde w je rozšíření v v souladu s podmínkami 1.–6.; w je tak nerelační obdobou naší (relační, tj. binární) funkce $\Im$.

Tato definice interpretace $\Im$ je formulována v metajazyce, v němž zadáváme jazyk VL. (V tomto metajazyce používáme nejen A a B jako proměnné pro libovolné formule, ale také slova jako „nebo“ a „a“ s jejich obvyklým významem.) Definice je rekurzivní, protože nám pro libovolnou formuli daného jazyka umožnuje určit její sémantickou (rozuměj pravdivostní) hodnotu. Říká se proto, že funkce interpretace $\Im$ je definována indukcí podle složitosti formule A.

Nelze si nevšimnout, že body 2.–6. vycházejí z definic pravdivostních funkcí $\neg$, $\wedge$, atd., jež jsme si formou pravdivostních tabulek uvedli výše. Bod 2. říká, že $\Im(v,\neg B) = 1$ právě tehdy, když $\Im(v,B) = 0$, čímž je také dáno, že $\Im(v,\neg B) = 0$, když $\Im(v,B) = 1$; neboli je implementováno, že $\neg$ ‚otáčí‘ dodanou pravdivostní hodnotu. Bod 2. říká, že formule tvaru konjunkce je pravdivá právě tehdy, když jsou oba její členy pravdivé. Atd.

Všimněme si ještě, že při numerickém označení pravdy a nepravdy pomocí čísel 1 a 0, platí tyto vzorce pro výpočet pravdivostních hodnot: $\Im(v,\neg A) = 1-A$; $(A \wedge B) = \min(A,B)$; $\Im(v,(A \vee B)) = \max(A,B)$; $\Im(v,(A \rightarrow B)) = \max(1-A,B)$, popř. $\Im(v,(A \rightarrow B)) = 1$, pokud $A \leq B$, jinak 0; $\Im(v,(A \leftrightarrow B)) = 1$, pokud $A=B$, jinak

0. Tyto vzorce se využívají při studiu zobecnění a nadstaveb klasické VL, např. ve fuzzy logice.

V současné logice se běžně setkáváme se sémantikou na základě *teorie modelů* (angl. „model-theoretical semantics“). Příslušná definice využívá pojmu *splnitelnosti* (angl. „satisfaction“), jež se opírá o pojem interpretace (interpretační funkce, ev. valuace); *model* je pak to, co splňuje formuli.

Splňování

Interpretace $\mathfrak{I}$ *splňuje* formuli A právě tehdy, když:

1) A je výroková proměnná a $\mathfrak{I}(v,A) = 1$.
2) A je tvaru $\neg B$ a $\mathfrak{I}$ nesplňuje B.
3) A je tvaru $B \wedge C$ a $\mathfrak{I}$ splňuje B i C.
4) A je tvaru $B \vee C$ a $\mathfrak{I}$ splňuje B nebo C.
5) A je tvaru $B \rightarrow C$ a $\mathfrak{I}$ nesplňuje B nebo splňuje C.
6) A je tvaru $B \leftrightarrow C$ a $\mathfrak{I}$ splňuje B i C nebo nesplňuje B i C.

Splnitelná formule

Formule A je *splnitelná* právě tehdy, když je splňována aspoň jednou interpretací.

Model formule

Každou valuaci v, při níž je formule splňována, nazýváme *model formule A*.

Pro příklad, modely formule $p \leftrightarrow q$ jsou valuace přiřazující výrokovým proměnným p, q po řadě 1, 1 anebo valuace přiřazující 0, 0. To, že v je model A, se někdy zapisuje jako $v \models A$.

Definici splnitelnosti formule lze zobecnit i pro případ systémů formulí jako T (pod systémem rozumějme pro jednoduchost množinu formulí).

Splňování a splnitelnost systému formulí

Systém formulí T je *splněn* nějakou interpretací $\mathfrak{I}$ právě tehdy, když každá z formulí systému T je při této interpretaci $\mathfrak{I}$ pravdivá.

Systém formulí T je *splnitelný* právě tehdy, když existuje interpretace $\mathfrak{I}$ taková, že systém T je splněn tou interpretací $\mathfrak{I}$.

Někdy se pak říká, že systém formulí T je *logicky pravdivý* právě tehdy, když je splněn každou interpretací $\mathfrak{I}$. Jeden ze zajímavých výsledků zkoumání VL je *Věta o kompaktnosti*, která říká, že libovolný systém formulí T je splnitelný právě tehdy, když každá konečná část T je splnitelná.

Poznamenejme, že v souvislosti se splnitelností (úžeji: tautologičností) formulí bývá zmiňován *problém SAT* („satisfiability“), tedy otázka, zda pro danou formuli existuje ohodnocení jejích proměnných, při němž je pravdivá. (Jako SAT, či *Problém booleovské splnitelnosti*, se někdy označuje rodina souvisejících problémů.) Zatímco pro formule s několika proměnnými takovéto ohodnocení snadno nalezneme v krátkém čase, s vyšším počtem proměnných exponenciálně narůstá čas na vyřešení úkolu. V současnosti převažuje názor, že nelze najít algoritmus, který by problém SAT vyřešil obecně pro jakoukoli formuli. Tím se ovšem nemění nic na faktu, že každá formule VL je rozhodnutelná (byť neefektivně) z hlediska toho, zda je splnitelná.

Dodejme, že alternativní sémantika klasické, anebo i neklasické VL, studuje přiřazování sémantických hodnot formulím v rámci algebry, odtud název *algebraická sémantika*; v rámci tohoto výzkumu bylo dosaženo řady obecných výsledků.

3.4 Některé další sémantické pojmy VL

Nyní si uvedeme skupinu sémantických pojmů, které nepatří bezprostředně do definice sémantiky jazyka VL, ale mají s ní úzkou souvislost. Klíčovými logickými pojmy jsou pojmy tautologie a kontradikce. Obecnou definicí: tautologie je věta vždy pravdivá, kdežto kontradikce je věta vždy nepravdivá. Kontradikci získáme negací tautologie; a naopak: tautologii získáme negací kontradikce. Slůvko „vždy“ znamená za všech okolností, ve VL tedy při jakékoli valuaci. Výrokově-logické *tautologie* (či *kontradikce*) jsou tedy z definice jiné než tautologie definované zcela obecně. Níže v textu však budeme stručně mluvit jen o tautologiích (kontradikcích). Jiným názvem pro tautologie je *logicky platné formule*.

Tautologie VL

Výrokově-logickou tautologií je formule, která nabývá hodnoty 1 při každém ohodnocení výrokových proměnných, tj. při každé valuaci. Je to tedy formule, která je každou interpretací splňována.

Příklady tautologií jsou třeba $p \rightarrow p$ či $p \rightarrow (p \vee q)$, pro seznam významných tautologií viz níže kapitolu 5. Uvědomme si, že formule A je v klasické VL tautologií právě tehdy, když formule $\neg A$ je nesplnitelná.

Kontradikce VL

Výrokově-logickou kontradikcí je formule, která nabývá hodnoty 0 při každém ohodnocení výrokových proměnných, tj. při každé valuaci. Je to tedy formule, která není žádnou interpretací splňována.

Příklady kontradikcí jsou třeba $p \wedge \neg p$ či $\neg(p \rightarrow p)$. Kontradikce jsou nesplnitelné formule.

Z hlediska sémantiky jsou dvojice formulí vzhledem k sobě *ekvivalentní* nebo neekvivalentní.

Ekvivalence formulí VL

Formule A je *ekvivalentní* formuli B právě tehdy, když jsou obě splňovány pouze a právě týmiž interpretacemi, tj. $\Im(v,A)=\Im(v,B)$ při všech valuacích v.

Příklady ekvivalentních formulí jsou třeba dvojice $\neg(p \vee q)$ a $\neg p \wedge \neg q$, $p \rightarrow p$ a $p \rightarrow (p \vee q)$, $p \wedge \neg p$ a $\neg(p \rightarrow p)$.

Jak uvidíme i třeba z Principu ekvivalentního nahrazení, jenž umožňuje tautologii snadno přebudovávat na další tautologie, každá formule je ekvivalentní nekonečně mnoha formulím. To také obnáší, že každá tautologie je ekvivalentní nekonečně mnoha tautologiím. Analogicky totéž platí pro kontradikce. Dokonce je oblast všech formulí rozdělena na vzájemně disjunktní, tj. nepřekrývající se, nekonečné množiny formulí, přičemž v každé z množin jsou si všechny formule navzájem ekvivalentní.

Někdy bývá zmiňován pojem *duální formule*. Dvě formule A a B jsou k sobě duální (B je někdy značena A^{δ}) právě tehdy, když $\Im(v,B)=\neg\Im(v,A)$. To znamená, že A má hodnotu 1 právě tehdy, když B má hodnotu 0, a naopak; jejich průběhy pravdivostních hodnot jsou ‚zrcadlové'. Příkladem jsou třeba p a $\neg p$ nebo $p \vee q$ a $\neg p \wedge \neg q$. Platí dokonce *Věta o dualitě*, podle níž je A ekvivalentní B, jež se od A liší záměnou *duálních spojek* $\vee$ a $\wedge$ a tím, že namísto atomických formulí (proměnných) obsahují jejich negace.

Nyní dáme do souvislosti systémy formulí a formule, jež jsou splněny vždy, pokud jsou splněny všechny věty z příslušného systému. Neznamená to nic jiného než to, že daná formule vyplývá z daného systému formulí, ale k tomu se vrátíme až níže v samostatné kapitole. Pro nás je nyní důležité vědět, že T je množina předpokladů (či podmínek) pro tvrzení A a že tautologie lze tvrdit bez předpokladů. Namísto *tautologický důsledek* se někdy říká prostě *logický důsledek* systému formulí.

Tautologický důsledek systému formulí T

Formule A je *tautologickým důsledkem* systému formulí T, psáno $T \models A$, právě tehdy, když $\mathfrak{I}(v,A)=1$ při každé interpretaci, při níž $\mathfrak{I}(v,B)=1$ pro každou formuli B, jež je prvkem T. V případě $T \models A$ pro prázdný soubor T píšeme krátce $\models A$.

Všimněme si, že pokud je množina T nesplnitelná, znamená to, že nemá žádný model, a tudíž je A splněna v každém modelu množiny T. (Ještě poznamenejme, že daný pojem lze rozšířit tak, aby za tautologický důsledek byl brán systém formulí S, takže bychom měli $T \models S$; $\models S$ je pak případ logicky pravdivého systému formulí. Množina tautologických důsledků množiny T se obvykle označuje Cn(T), kde „Cn“ je zkratkou za „consequence“ (tj. důsledek) nebo se používá Cl , což zkracuje „closure“ (tj. uzávěr).

Konečně si uvedeme ještě dva pojmy. Oba se sice vážou k problematice odvozování (viz příslušná kapitola 14.), ale mají vysokou relevanci k problematice pravdivosti formulí. Příslušná dvě pravidla nás opravňují transformovat dané formule na jiné formule, přičemž bude zachována jejich pravdivostní hodnota, v případě Pravidla substituce dokonce tautologičnost (viz též kapitolu 13. o axiomatických systémech).

Pravidlo substituce ve VL

Nahradíme-li ve VL-tautologii každý výskyt určité proměnné určitou jednou a toutéž formulí, zůstane VL-tautologií.

Například do tautologie $p \rightarrow p$ můžeme substituovat (tj. dosadit) za p například q anebo třeba $q \vee r$, a výsledky těchto substitucí, totiž $q \rightarrow q$ i $(q \vee r) \rightarrow (q \vee r)$ jsou rovněž tautologie.

Pravidlo ekvivalentního nahrazení

Nechť A je formule, která obsahuje alespoň na jednom místě podformuli B. Jestliže platí, že B je ekvivalentní s C, a jestliže formule A' vznikne nahrazením libovolného počtu výskytů formule B formulí C ve formuli A, pak A' je ekvivalentní s A.

Například ve formuli $(p\vee q)\to p$ lze namísto prvního výskytu p dát formuli $p\wedge p$, ježto je ekvivalentní p; výsledek nahrazení, $((p\wedge p)\vee q)\to p$, je ekvivalentní $(p\vee q)\to p$.

Všimněme si rozdílu mezi těmito pravidly. Při aplikaci Pravidla substituce nahrazujeme něčím proměnné, při aplikaci Pravidla ekvivalentního nahrazení nahrazujeme něčím podformule. Při aplikaci Pravidla substituce dosazujeme něco za každý výskyt, při aplikaci Pravidla ekvivalentního nahrazení dosazujeme za libovolný počet výskytů.

3.5 Cvičení – terminologie VL

Zopakujte si, co je:

1) abeceda VL
2) gramatika VL
3) správně utvořená formule VL (s.u.f.)
4) podformule VL
5) výroková forma
6) výroková proměnná
7) výrokový symbol
8) výroková spojka (jakožto symbol)
9) pravdivostní funkce
10) valuace
11) interpretace
12) splňování
13) splnitelnost
14) model

15) tautologie VL

16) kontradikce VL

17) ekvivalence formulí

18) substituce

19) ekvivalentní nahrazení

20) tautologický důsledek systému formulí

3.6 Cvičení – syntaktické/sémantické pojmy VL

Určete, který termín z níže uvedených dvojic termínů VL je termín syntaktický (tj. patřící do oblasti syntaxe) a který je sémantický:

1)	a) tautologie	b) správně utvořená formule
2)	a) gramatika	b) interpretace
3)	a) formule	b) kontradikce
4)	a) pravdivostní funkce	b) výroková forma
5)	a) tautologický důsledek	b) výrokový symbol

3.6 Řešení – syntaktické/sémantické pojmy VL

1) Syntaktický: b) správně utvořená formule, sémantický: a) tautologie.

2) Syntaktický: a) gramatika, sémantický: b) interpretace.

3) Syntaktický: a) formule, sémantický: b) kontradikce.

4) Syntaktický: b) výroková forma, sémantický: a) pravdivostní funkce.

5) Syntaktický: b) výrokový symbol, sémantický: a) tautologický důsledek.

3.7 Cvičení – zjištění pravdivostní hodnoty formule při určité valuaci

Zjistěte pravdivostní hodnotu dané formule při následující valuaci: $v(p)$=0, $v(q)$=1, $v(r)$=0, $v(s)$=1:

1) $(p\vee(q\rightarrow\neg r))\rightarrow q$

2) $(p\vee r)\leftrightarrow(r\wedge\neg s)$

3) $s\leftrightarrow(p\rightarrow(\neg p\vee s))$

4) $(q\wedge\neg s)\rightarrow(p\leftrightarrow s)$

5) $((p\vee\neg q)\vee r)\rightarrow(s\wedge\neg s)$

3.7 Řešení – zjištění pravdivostní hodnoty formule při určité valuaci

1) $\Im(v,((p\vee(q\rightarrow\neg r))\rightarrow q))=1$, protože $\Im(v,\neg r)=1$, takže $\Im(v,(q\rightarrow\neg r))=1$, načež $\Im(v, (p\vee(q\rightarrow\neg r)))=1$.

2) $\Im(v,((p\vee r)\leftrightarrow(r\wedge\neg s)))=1$, protože $\Im(v,\neg s)=0$, takže $\Im(v,(r\wedge\neg s))=0$, $\Im(v,(p\vee r))=0$.

3) $\Im(v,(s\leftrightarrow(p\rightarrow(\neg p\vee s)))=1$, protože $\Im(v,(p\rightarrow(\neg p\vee s)))=1$ (protože víme, že $v(p)=0$, při níž je celá implikace pravdivá, nemusíme zjišťovat pravdivost jejího konsekventu).

4) $\Im(v,((q\wedge\neg s)\rightarrow(p\leftrightarrow s))=1$, protože $\Im(v,\neg s)=0$, takže $\Im(v,(q\wedge\neg s))=0$ (podobně jako v minulém příkladu nemusíme už zjišťovat pravdivost jejího konsekventu).

5) $\Im(v,(((p\vee\neg q)\vee r)\rightarrow(s\wedge\neg s))=1$, protože $\Im(v,\neg q)=0$, takže $\Im(v,(p\vee\neg q))=0$ (podobně jako v minulém příkladu nemusíme už zjišťovat pravdivost jejího konsekventu).

3.8 Cvičení – nalezení modelu formule

Nalezněte alespoň jeden model formule:

1) $\neg(p\vee(p\wedge q))$

2) $(p\wedge q)\vee(\neg p\vee\neg q)$

3) $\neg(p\wedge q)\vee(\neg p\vee\neg q)$

4) $\neg(p\vee q)\vee(\neg p\wedge\neg q)$

5) $\neg(p\rightarrow p)$.

3.8 Řešení – nalezení modelu formule

1) Např. $v(p)=0$, $v(q)=1$.

2) Např. $v(p)=1$, $v(q)=1$.

3) Např. $v(p)=1$, $v(q)=0$.

4) Pouze a právě $v(p)=0$, $v(q)=0$.

5) Nelze nalézt model, neboť formule je nesplnitelná (je to kontradikce).

3.9 Cvičení – splnitelnost množiny formulí

1) Určete, zda je splnitelná množina formulí $\{(p\rightarrow q), (p\vee q), (\neg p\wedge q)\}$.

2) Určete, zda je splnitelná množina formulí $\{(p\rightarrow r), (q\rightarrow r), (p\vee q)\}$.

3) Určete, zda je splnitelná následující množina výroků. „Právě tehdy, když neprospěji u zkoušky, budu muset o prázdninách studovat“, „Prospěji u zkoušky“, „Není pravda, že u zkoušky neuspěji nebo budu muset o prázdninách studovat“.

3.9 Řešení – splnitelnost množiny formulí

1) Daná množina formulí je splnitelná a to jen při valuaci $v(p)=0$, $v(q)=1$.

2) Daná množina formulí nedává zprvu uvidět vhodnou valuaci, jež by byla modelem všech formulí, zkusíme tedy valuace po řadě otestovat. Uvažme pro začátek $v(p)=v(q)=v(r)=1$. Lze lehko uvidět, že tato valuace činí všechny tři formule pravdivé. Daný soubor formulí je tedy splnitelný.

3) Výroky formalizujeme jako $(\neg p \leftrightarrow q)$, p, $\neg(\neg p \vee q)$. Lze pak lehko uvidět, že modelem tohoto souboru je jen valuace taková, že $v(p)=1$. Odtud si dále odvodíme, že aby $\Im(v,\neg p \leftrightarrow q)=1$, tak při $v(p)=1$ musí být $\Im(v,q)=0$, tj. $v(q)=0$. Při takovéto v pak $\Im(v,\neg(\neg p \vee q))=1$. Neboli, daná množina výroků je splnitelná.

3.10 Polská notace

Polskou logickou školou užívaná bezzávorková notace byla vyvinuta J. Łukasiewiczem; v současnosti ovšem najdeme málo uživatelů této notace mezi logiky, v informatice je však rozšířenější. V námi používané notaci je to, na co je který operátor vztažen, vyznačováno závorkami, avšak v polské notaci je toto dáno postupnou aplikací zleva doprava a aritou operátorů. Jde tedy o *notaci prefixní*, nikoli *infixní*. Pro srovnání, běžná matematická notace je infixní.

Změny v abecedě příslušného jazyka vzhledem k abecedě používané námi jsou indikovány v následující tabulce:

N	$\neg$	negacja	(unární operátor)
K	$\wedge$	konjunkcja	(binární operátor)
A	$\vee$	alternatywa	(binární operátor)
C	$\rightarrow$	consequentia	(binární operátor)
E	$\leftrightarrow$	ekwiwalencja	(binární operátor)

Arita operátoru podmiňuje to, které formule jsou správně utvořeny, a které nikoli. Např. N*p*, NK*pq*, či CK*pq*A*rs*, nebo EC*pqr* jsou s.u.f., kdežto NC, N*pq*, či C*pqr* nikoli.

Příklady přepisu do nebo z polské notace:

1) Přepis formule $(p\wedge\neg p)\to q$ do polské notace začíná s C, které je aplikováno na konjunkci, tj. K, proměnné *p* s formulí N*p*, tedy K*p*N*p*, a pak na proměnnou *q*, čili CK*p*N*pq*.

2) Máme-li přepsat formuli NC*p*K*q*N*r*, tak víme, že N je unární operátor, takže první N neguje celou formuli, $\neg(...)$, druhé N proměnnou *r*, $\neg(...\neg r)$; C je binární a je vztaženo na *p*, $\neg(p\to ...\neg r)$, a na to, co je spjato konjunkcí, $\neg(p\to(...\wedge...\neg r))$; konjunkcí K je spjata proměnná *q* a negace *r*, $\neg(p\to(q\wedge\neg r))$.

3) Při pohledu na rozsáhlou formuli NECAN*p*N*q*AN*p*N*q*CKN*p*N*q*KN*p*N*q* vidíme, že jde o negaci (tj. N) formule tvaru ekvivalence (tj. E), tedy $\neg((...)\leftrightarrow(...))$, přičemž na levé straně ekvivalence se nachází implikace (tj. C), která je vztažena na disjunkci (tj. A) negovaných proměnných *p* a *q*, $(\neg p\vee\neg q)$, a dále na disjunkci zrovna tak negovaných proměnných *p* a *q*, tedy $(\neg p\vee\neg q)\to(\neg p\vee\neg q)$; na pravé straně ekvivalence je rovněž implikace (tj. C), která je vztažena na dvě konjunkce negovaných proměnných *p* a *q*, tedy $(\neg p\wedge\neg q)\to(\neg p\wedge\neg q)$; jde tedy o formuli $\neg(\ ((\neg p\vee\neg q)\to(\neg p\vee\neg q)) \leftrightarrow ((\neg p\wedge\neg q)\to(\neg p\wedge\neg q))\ )$.

3.11 Cvičení – přepisy z a do polské notace

Následující formule přepište z polské do námi užívané notace:

1) NAN*p*N*q*

2) C*p*KN*qr*

3) ENC*p*A*pq*N*p*

4) ENC*pq*K*p*N*q*

5) EAN*pq*KC*pq*A*qr*

6) CC*p*C*qr*CC*pqr*

7) AAN*pq*K*q*A*r*N*p*

8) CCpCqrCCpqCpr

9) NEKApqrCNpr

10) EKpNKNqrKpANNqNr

Následující formule přepište z námi užívané notace do polské notace:

11) $\neg(p\rightarrow(q\wedge\neg r))$

12) $(p\leftrightarrow\neg q)\rightarrow(p\wedge\neg q)$

13) $(\neg(p\rightarrow q))\wedge(p\vee\neg q)$

14) $((p\rightarrow\neg q)\rightarrow q)\wedge\neg q$

15) $(p\rightarrow\neg q)\wedge(q\leftrightarrow\neg(p\rightarrow r))$

16) $\neg((p\rightarrow(q\vee\neg r))\leftrightarrow(p\vee r))$

17) $\neg(((p\rightarrow q)\wedge(\neg p\vee q))\leftrightarrow r)$

18) $(p\rightarrow q)\leftrightarrow((\neg p\vee r)\rightarrow(q\wedge\neg r))$

19) $\neg(\neg(\neg p\vee\neg(\neg q\rightarrow\neg r)) \leftrightarrow \neg(\neg(\neg p\wedge\neg q)\rightarrow\neg r))$

20) $\neg(\neg(\neg(\neg p\vee\neg q) \rightarrow \neg(\neg p\wedge\neg q)) \leftrightarrow \neg(\neg(\neg p\wedge\neg q) \rightarrow \neg(\neg p\vee\neg q)))$

3.11 Řešení – přepisy z a do polské notace

1) $\neg(\neg p\vee\neg q)$

2) $p\rightarrow(\neg q\wedge r)$

3) $\neg(p\rightarrow(p\vee q))\leftrightarrow\neg p$

4) $\neg(p\rightarrow q)\leftrightarrow(p\wedge\neg q)$

5) $(\neg p\vee q)\leftrightarrow((p\rightarrow q)\wedge(q\vee r))$

6) $(p\rightarrow(q\rightarrow r))\rightarrow((p\rightarrow q)\rightarrow r)$

7) $(\neg p \vee q) \vee (q \wedge (r \vee \neg p))$

8) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$

9) $\neg(\ ((p \vee q) \wedge r) \leftrightarrow (\neg p \rightarrow r)\ )$

10) $(p \wedge \neg(\neg q \wedge r)) \leftrightarrow (p \wedge (\neg\neg q \vee \neg r))$

11) NC*p*K*q*N*r*

12) CE*p*N*q*K*p*N*q*

13) KNC*pq*A*p*N*q*

14) KCC*p*N*qq*N*q*

15) KC*p*N*q*E*q*NC*pr*

16) NEC*p*A*q*N*r*A*pr*

17) NEKC*pq*AN*pqr*

18) EC*pq*CAN*pr*K*q*N*r*

19) NENAN*p*NCN*q*N*r*NCNKN*p*N*q*N*r*

20) NENCNAN*p*N*q*NKN*p*N*q*NCNKN*p*N*q*NAN*p*N*q*

4. Zjištění průběhu pravdivostních hodnot formule tabulkovou metodou

Nyní se naučíme zjišťovat, které pravdivostní hodnoty daná formule nabývá při kterých pravdivostních ohodnoceních výrokových proměnných, budeme tedy zjišťovat *průběh pravdivostních hodnot* dané formule. Užijeme k tomu *tabulkovou metodu*. Postup bude takový, že v přehledné tabulce jednotlivým výrokovým proměnným přiřadíme všechna možná pravdivostní ohodnocení a při tom vyhodnotíme vztahy mezi (pod)formulemi podle tabulek příslušných výrokových funkcí (při tomto tedy realizujeme rekurzivní algoritmus).

Abychom vystihli všechny možné valuace, a následně pak všechny možné hodnoty, které může celá formule při těchto valuacích nabývat, musíme vypsat všechny možné kombinace rozložení pravdivostních hodnot. Nejprve proto spočítáme všechny výrokové spojky, které jsou ve formuli užity, jejich počet je n. Poté připravíme 2^n řádků. Pod první výrokovou proměnnou, což je řekněme p, vypíšeme do sloupce 2^{n-1} jedniček, pod ně pak nuly; tento sloupec jedniček a nul přepíšeme pod všechny další výskyty proměnné p. Pod druhou proměnnou, q, vypíšeme do sloupce polovinu jedniček, než kolik jsme jich udělili proměnné p, tedy $2^{n-1}/2$, poté vypíšeme právě tolik nul a takovouto sekvenci jedniček a nul opakujeme až do posledního řádku; tento sloupec jedniček a nul přepíšeme pod všechny další výskyty proměnné q. Pokračujeme stejným způsobem pro všechny proměnné, přičemž ve sloupci pod poslední proměnnou se budou střídavě opakovat jedničky a nuly.

Nyní podle definic pravdivostních funkcí a v souladu s Principem kompozicionality vyhodnotíme všechny (pod)formule, jejichž vlastními podformulemi jsou atomické formule – vyhodnotíme tedy formule tvaru $\neg A$ a $A * B$, kde „*“ je některá námi používaná binární výroková spojka; jedničky a nuly píšeme zásadně pod symbol výrokové proměnné. Poté vyhodnocujeme všechny další podformule, jak jsou vyznačeny závorkami. Poslední zjištěný sloupec hodnot ukazuje hodnoty, které formule nabývá při jednotlivých pravdivostních ohodnoceních proměnných.

Ukážeme si dva užívané postupy pro vyhodnocení formule $(p \vee q) \rightarrow \neg q$. Pro snadnou rekonstrukci postupu vyhodnocování budeme v příkladech ve spodním řádku vyznačovat pořadí kroků (na pořadí kroků značených n.a, n.b atd., kde n je nějaké číslo, nezáleží; krok 1.i, kde i je nějaké písmeno, je ohodnocením výrokových proměnných). Výsledný sloupec vyznačujeme kurzívou, pochopitelně lze použít i jiné vyznačení.

$(p$	$\vee$	$q)$	$\rightarrow$	$\neg$	q
1	1	1	*0*	0	1
1	1	0	*1*	1	0
0	1	1	*0*	0	1
0	0	0	*1*	1	0
1.a)	3.)	1.b)	4.)	2.)	1.c)

Po určení možných pravdivostních hodnot v 1.*i* jsme sice provedli krok 2.), ale to jen proto, že byl o málo jednodušší než 3.); na pořadí kroků 2. a 3. zde totiž příliš nezáleží.

(Ještě poznámka: nenechme se splést tím, že pod antecedentem, jmenovitě pod znakem implikace, jsou jiné hodnoty, než jak je tomu v tabulce definující implikaci; z této definiční tabulky vybíráme ty řádky, které se nám hodí, např. druhý řádek, kdy na argumentu ⟨1,0⟩ dává implikace hodnotu 0, zužitkujeme v případě vyhodnocování naší formule v prvním a třetím řádku.)

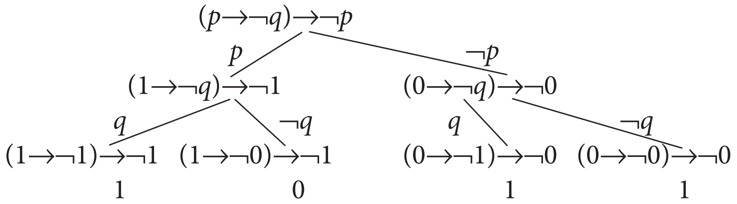
Pro zvýšení rychlosti vpisování hodnot a pro lepší orientaci se v praxi někdy užívá postup, kdy vyhledáme nejdříve to ohodnocení dílčí podformule, které je pro danou výrokovou spojku výjimečné, načež do zbylých řádků pak vepíšeme hodnoty opačné. Například disjunkce je nepravdivá jen, je-li argumentem dvojice ⟨0,0⟩, do toho řádku tedy vepíšeme jako hodnotu 0 a do ostatních řádku mechanicky vepíšeme hodnotu 1. Někdy je také užitečné nevypisovat pod sebe například tři jedničky, ale místo nich napsat jednu velkou jedničku přes tři řádky.

Druhou podobou tabulkové metody je následující postup, v němž je ohodnocení výrokových proměnných uvedeno zcela nalevo, od něj napravo jsou pak po řadě vyhodnoceny v samostatných sloupcích dílčí podformule a poslední krok vyhodnocování je tedy zcela napravo – poslední krok vyhodnocuje vztah mezi předposledními kroky (všimněme si, že v záhlaví tabulky je posloupnost vytvářející danou formuli):

$p\ q$	$(p\vee q)$	$\neg q$	$(p\vee q)\rightarrow\neg q$
1 1	1	0	*0*
1 0	1	1	*1*
0 1	1	0	*0*
0 0	0	1	*1*
1.)	2.a)	2.b)	3.)

Tabulkovou metodou lze kromě splnitelnosti ověřit i to, zda daná formule je tautologie: pokud výsledný sloupec hodnot obsahuje samé jedničky, čili daná formule je pravdivá při všech ohodnoceních jejích proměnných, formule je tautologií.

Doplňme si informaci o tabulkové metodě ještě i tím, že formule lze vyhodnocovat i pomocí *sémantických stromů*. Sémantický strom je (matematický) strom, jehož kořenem je daná formule a návěští (tj. místa větvení) obsahují částečně vyhodnocenou formuli. Toto vyhodnocení některé její proměnné odpovídá tomu, zda proměnná v dané větvi je nebo není negována (čemuž odpovídají hodnoty 1 nebo 0, jež bývají někdy reprezentovány jako ⊤ a ⊥). Větvení může vycházet z té či oné proměnné vyskytující se ve formuli, listy obsahují hodnoty, jichž formule nabývá při ohodnocení proměnných v dané větvi. Zde je ilustrativní příklad:



Jinou metodou nalezení modelu formule je příbuzná metoda sémantických tabel, jež je vysvětlena v kapitole 14. o důkazových systémech.

4.1 Příklady – zjištění průběhu pravdivostních hodnot formule

Pomocí tabulkové metody zjistěte průběh pravdivostních hodnot u následujících formulí:

1)

p	$\to$	p
1	*1*	1
0	*1*	0
1.a)	2.)	1.b)

Formule $p \rightarrow p$ nabývá při pravdivostním ohodnocení výrokové proměnné p hodnotou 1 pravdivostní hodnotu 1, při pravdivostním ohodnocení výrokové proměnné p hodnotou 0 také pravdivostní hodnotu 1 (jde tedy o tautologii).

2)

(p	$\rightarrow$	q)	$\rightarrow$	p
1	1	1	*1*	1
1	0	0	*1*	1
0	1	1	*0*	0
0	1	0	*0*	0
1.a)	2.)	1.c)	3.)	1.b)

Formule $(p \rightarrow q) \rightarrow p$ nabývá na argumentech $\langle 1,1 \rangle$ a $\langle 1,0 \rangle$, což jsou dvě možná ohodnocení proměnných p a q, pravdivostní hodnotu 1, na zbylých dvou ostatních dvojicích hodnotu 0. Mimochodem si povšimněme, že daná formule dává stejný průběh hodnot jako atomická formule p, je s ní tedy ekvivalentní.

3)

p	$\rightarrow$	(q	$\rightarrow$	p)
1	*1*	1	1	1
1	*1*	0	1	1
0	*1*	1	0	0
0	*1*	0	1	0
1.a)	3.)	1.c)	2.)	1.b)

Formule $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ nabývá při pravdivostním ohodnocení výrokových proměnných p a q dvojicí $\langle 1,1 \rangle$, kdy první člen dvojice je hodnotou pro p a druhý hodnotou pro q, pravdivostní hodnotu 1. Pro ostatní dvojice také, i v tomto případě jde tedy o tautologii; tato formule je tedy ekvivalentní formuli z příkladu 1).

4)

$\neg$	(q	$\rightarrow$	(q	$\wedge$	$\neg$	p))
1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	0
0	0	1	0	0	1	0
5.)	1.b)	4.)	1.c)	3.)	2.)	1.a)

Formule $\neg(q \rightarrow (q \wedge \neg p))$ nabývá na argumentu $\langle 1,1 \rangle$, který je ohodnocením proměnných p a q, pravdivostní hodnotu 1, na všech ostatních 0. Tato formule je tedy ekvivalentní formuli $p \wedge q$.

5)

$\neg$	$(p$	$\rightarrow$	$(p$	$\vee$	$q))$	$\leftrightarrow$	$\neg$	q
0	1	1	1	1	1	*1*	0	1
0	1	1	1	1	0	*0*	1	0
0	0	1	0	1	1	*1*	0	1
0	0	1	0	0	0	*0*	1	0
5.)	1.a)	4.)	1.b)	3.)	1.c)	6.)	2.)	1.d)

Daná formule nabývá na těch argumentech (které jsou ohodnocením proměnných p a q), jejichž druhým členem je pravdivostní hodnota 1, pravdivostní hodnotu 1, na všech ostatních 0.

6)

p	$\rightarrow$	$(\neg$	q	$\wedge$	$r))$
1	*0*	0	1	0	1
1	*0*	0	1	0	0
1	*1*	1	0	1	1
1	*0*	1	0	0	0
0	*1*	0	1	0	1
0	*1*	0	1	0	0
0	*1*	1	0	1	1
0	*1*	1	0	0	0

Další příklad netautologické a nekontradiktorické formule. Formule je tedy splnitelná interpretacemi indikovanými ve 3. a 5.–8. řádku.

7)

$(\neg$	p	$\vee$	$q)$	$\rightarrow$	$((p$	$\rightarrow$	$q)$	$\wedge$	$(q$	$\vee$	$r))$
0	1	1	1	*1*	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	*1*	1	1	1	1	1	1	0
0	1	0	0	*1*	1	0	0	0	0	1	1
0	1	0	0	*1*	1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	*1*	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	*1*	0	1	1	1	1	1	0
1	0	1	0	*1*	0	1	0	1	0	1	1
1	0	1	0	*0*	0	1	0	0	0	0	0

Daná formule nabývá pravdivostní hodnotu 0 tehdy, když ohodnocením proměnných p, q a r je pravdivostní hodnota 0, při ostatních valuacích je pravdivá.

8)

$(p$	$\rightarrow$	$(q$	$\rightarrow$	$r))$	$\rightarrow$	$((p$	$\rightarrow$	$q)$	$\rightarrow$	$(p$	$\rightarrow$	$r))$
1	1	1	1	1	*1*	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	*1*	1	1	1	0	1	0	0
1	1	0	1	1	*1*	1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	*1*	1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	*1*	0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	*1*	0	1	1	1	0	1	0
0	1	0	1	1	*1*	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	*1*	0	1	0	1	0	1	0

Daná formule nabývá na všech argumentech, které jsou ohodnocením proměnných p, q a r, pravdivostní hodnotu 1 (jde tedy o tautologii).

9)

$(((\neg$	$p)$	$\wedge$	$q)$	$\vee$	$r)$	$\rightarrow$	s
0	1	0	1	1	1	*1*	1
0	1	0	1	1	1	*0*	0
0	1	0	1	0	0	*1*	1
0	1	0	1	0	0	*1*	0
0	1	0	0	1	1	*1*	1
0	1	0	0	1	1	*0*	0
0	1	0	0	0	0	*1*	1
0	1	0	0	0	0	*1*	0
1	0	1	1	1	1	*1*	1
1	0	1	1	1	1	*0*	0
1	0	1	1	1	0	*1*	1
1	0	1	1	1	0	*0*	0
1	0	0	0	1	1	*1*	1
1	0	0	0	1	1	*0*	0
1	0	0	0	0	0	*1*	1
1	0	0	0	0	0	*1*	0

(Připomínáme, že v případě, že pro argument, totiž *n*-tici pravdivostních hodnot, slouží 4 proměnné, pro celou kombinatoriku možných rozložení pravdivostních hodnot potřebujeme 2^4, tj. 16 řádků.)

10)

$((p$	$\uparrow$	$q)$	$\uparrow$	$q)$	$\uparrow$	$(p$	$\uparrow$	$q))$
1	0	1	1	1	*1*	1	0	1
1	1	0	1	0	*0*	1	1	0
0	1	1	0	1	*1*	0	1	1
0	1	0	1	0	*0*	0	1	0

Daná formule nabývá na daných argumentech vždy téže hodnoty, jaká je valuací přiřazena proměnné *q*; daná formule je tedy ekvivalentní formuli *q*.

4.2 Cvičení – zjištění průběhu pravdivostních hodnot formule

Sestrojením tabulky zjistěte průběh pravdivostních hodnot následujících formulí:

1) $\neg(\neg p \vee \neg q)$

2) $(p \vee q) \leftrightarrow (q \wedge \neg p)$

3) $(p \leftrightarrow \neg q) \rightarrow (p \wedge \neg q)$

4) $(p \uparrow q) \uparrow p$

5) $\neg(p \rightarrow (q \wedge \neg r))$

6) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow ((\neg p \vee r) \rightarrow (q \wedge \neg r))$

7) $((p \rightarrow q) \wedge r) \vee (\neg p \wedge q)$

8) $(p \rightarrow \neg q) \wedge (q \leftrightarrow \neg(p \vee r))$

9) $(\neg p \vee q) \vee (q \wedge (r \vee \neg p))$

10) $(p \wedge \neg(\neg q \wedge r)) \leftrightarrow (p \wedge (\neg\neg q \vee \neg r))$

4.2 Řešení – zjištění průběhu pravdivostních hodnot formule

1)

p	q	hodnoty
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

(Tedy shodně s $p \wedge q$.)

2)

p	q	hodnoty
1	1	0
1	0	0
0	1	1
0	0	1

(Tedy shodně s $\neg p$.)

3)

p	q	hodnoty
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	1

(Tedy shodně s $p \to q$.)

4)

p	q	hodnoty
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

5)

p	q	r	hodnoty
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

6)

p	q	r	hodnoty
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

7)

p	q	r	hodnoty
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

8)

p	q	r	hodnoty
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

9)

p	q	r	hodnoty
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	1

10)

p	q	r	hodnoty
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	1

4.3 Příklady – ověřování, zda je daná formule tautologií tabulkovou metodou

Už výše jsme řekli, že tabulkovou metodu lze využít i pro ověření, zda je určitá formule tautologií. Zde je několik příkladů.

1)

$(p$	$\wedge$	$\neg$	$p)$
1	*0*	0	1
0	*0*	1	0

Daná formule není tautologií, nenabývá totiž pravdivostní hodnoty 1 při jakémkoli pravdivostním ohodnocení jejích výrokových proměnných.

2)

$(\neg$	q	$\rightarrow$	$\neg$	$p)$	$\rightarrow$	$(p$	$\rightarrow$	$q)$
0	1	1	0	1	*1*	1	1	1
1	0	0	0	1	*1*	1	0	0
0	1	1	1	0	*1*	0	1	1
1	0	1	1	0	*1*	0	1	0

Daná formule je tautologií, neboť nabývá pravdivostní hodnoty 1 při jakémkoli pravdivostním ohodnocení jejích výrokových proměnných, tj. při jakékoli valuaci.

3)

$(p$	$\downarrow$	$q)$	$\leftrightarrow$	$\neg$	$(p$	$\vee$	$q)$
1	0	1	*1*	0	1	1	1
1	0	0	*1*	0	1	1	0
0	0	1	*1*	0	0	1	1
0	1	0	*1*	1	0	0	0

Daná formule je tautologií.

4)

$(p$	$\uparrow$	$q)$	$\uparrow$	$((p$	$\uparrow$	$q)$	$\uparrow$	$(p$	$\uparrow$	$q))$
1	0	1	*1*	1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	*1*	1	1	0	0	1	1	0
0	1	1	*1*	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	*1*	0	1	0	0	0	1	0

Tato formule je také tautologií.

4.4 Cvičení – ověřování, zda je daná formule tautologií tabulkovou metodou

Tabulkovou metodou ověřte, zda jsou níže uvedené formule tautologiemi VL:

1) $\neg(p\rightarrow q)\wedge(p\vee\neg q)$

2) $\neg(p\rightarrow q)\leftrightarrow(p\wedge\neg q)$

3) $((p\rightarrow\neg q)\rightarrow q)\wedge\neg q$

4) $(p\wedge q)\rightarrow(q\wedge(\neg q\rightarrow r)\wedge q)$

5) $((\neg p\rightarrow q)\vee(r\vee s))\vee(s\wedge\neg s)$

4.4 Řešení – ověřování, zda je daná formule tautologií tabulkovou metodou

1) Daná formule není tautologií. Hodnota 0 je v řádcích 1 a 3–4.

2) Daná formule je tautologií.

3) Daná formule není v tautologií, je dokonce kontradikcí.

4) Daná formule je tautologií.

5) Daná formule není tautologií. Hodnota 0 je v posledním řádku.

4.5 Cvičení – splnitelnost množiny formulí

1) Tabulkovou metodou určete, zda je splnitelná množina formulí $\{(p \rightarrow q), (p \vee q), (\neg p \wedge q)\}$.

2) Tabulkovou metodou určete, zda je splnitelná množina formulí $\{(p \rightarrow r), (q \rightarrow r), (p \vee q)\}$.

3) Tabulkovou metodou určete, zda je splnitelná následující množina výroků. „Právě tehdy, když neprospěji u zkoušky, budu muset o prázdninách studovat“, „Prospěji u zkoušky“, „Není pravda, že u zkoušky neprospěji nebo budu muset o prázdninách studovat“.

4.5 Řešení – splnitelnost množiny formulí

1) Daný systém formulí je splnitelný, jeho modelem je valuace, při níž jsou všechny tři formule $(p \rightarrow q)$, $(p \vee q)$, $(\neg p \wedge q)$ pravdivé:

p	q	$(p \rightarrow q)$	$(p \vee q)$	$(\neg p \wedge q)$
1	1	1	1	0
1	0	0	1	0
0	1	1	1	1
0	0	1	0	0

2) Daný systém formulí je splnitelný, jeho modely jsou valuace v řádcích následující tabulky, za nichž jsou všechny tři formule $(p \rightarrow r)$, $(q \rightarrow r)$ a $(p \vee q)$ pravdivé, tj. v řádcích 1, 3 a 5 (záhlaví tabulky nepočítáme mezi řádky):

p	q	r	$(p \rightarrow r)$	$(q \rightarrow r)$	$(p \vee q)$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0
0	0	0	1	1	0

3) Daný systém formulí je splnitelný, jeho modelem je valuace z druhého řádku následující tabulky:

p	q	$(\neg p \leftrightarrow q)$	$\neg(\neg p \vee q)$
1	1	0	0
1	0	1	1
0	1	1	0
0	0	0	0

5. Odvození výrokových spojek z jiných výrokových spojek

V této kapitole se naučíme, jak si z určité množiny výrokových spojek odvodit všechny zbývající výrokové spojky. Množiny, které takovéto odvození umožňují, se nazývají *funkčně úplné množiny spojek*. Příklady takovýchto množin jsou {¬,→}, {¬,∧}, {¬,∨}, {¬, if-then-else}, anebo dokonce jednoprvkové množiny {↑}, {↓}; funkčně neúplnými jsou např. {∧,∨}, {¬}.

Známá množina pěti výrokových spojek {¬,∧,∨,→,↔} tedy obsahuje redundantní prvky. Ty jsou však užitečné prakticky, poněvadž mají často užívané koreláty v našem jazyce, totiž příslušné gramatické spojky. V logických textech jsou ony ‚nadbytečné' spojky zaváděny pomocí definic jako např. „$p \rightarrow q =_{df} \neg p \vee q$". Taková definice vlastně říká, že „$p \rightarrow q$" je jazyková zkratka za „$\neg p \vee q$". Prakticky však jde o to naznačit, že některé spojky (zde např. ∨) jsou v příslušném deduktivním systému chápány jako základní, kdežto jiné (např. → v našem příkladu) jako odvozené. Množina pravdivostních funkcí se nijak nemění, ta je již dána; odlišení základních a odvozených spojek pouze ukazuje, pomocí jakých výrazů a jakým způsobem o nich budeme mluvit. (Níže v této kapitole nebudeme příliš mezi pravdivostními funkcemi a je označujícími výrokovými spojkami odlišovat.)

Zejména v našem prvním příkladu si ukážeme, jak určitou pravdivostní funkci vyjádřit pomocí formule obsahující pouze zavedené výrokové spojky. Tato metoda je mimochodem zvlášť užitečná, pokud si chceme odvodit nějakou tautologii tvaru ekvivalence, na níž jsme pozapomněli.

5.1 Příklady – odvození výrokových spojek z jiných výrokových spojek

1) Provedeme odvození nejznámějších výrokových spojek z negace a disjunkce, tj. z množiny {¬,∨}. Nejprve s pomocí ¬ a ∨ odvodíme implikaci. Implikace je binární funkce, proto ji zkusme odvodit z binární funkce disjunkce:

p	$\vee$	q
1	1	1
1	1	0
0	1	1
0	0	0

Zkusíme-li negovat p dostaneme definici námi hledané implikace $\rightarrow$:

$\neg$	p	$\vee$	q
0	1	*1*	1
0	1	*0*	0
1	0	*1*	1
1	0	*1*	0

Obdobným způsobem odvodíme konjunkci. Tu lze odvodit buď z právě zavedené implikace, anebo z disjunkce, jež je základnější. V námi již známé formuli $\neg p \vee q$ zkusíme negovat též q, což dává:

$\neg$	p	$\vee$	$\neg$	q
0	1	*0*	0	1
0	1	*1*	1	0
1	0	*1*	0	1
1	0	*1*	1	0

Vidíme, že výsledný sloupec pravdivostních hodnot je ‚zrcadlovým obrazem' hledaného průběhu pravdivostních podmínek. Proto negujeme celou formuli – dostaneme tak konjunkci $\wedge$:

$\neg($	$\neg$	p	$\vee$	$\neg$	$q)$
1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0

Ekvivalenci $\leftrightarrow$ nyní pro jednoduchost definujeme jako implikaci oběma směry:

$(p$	$\rightarrow$	$q)$	$\wedge$	$(q$	$\rightarrow$	$p)$
1	1	1	*1*	1	1	1
1	0	0	*0*	0	1	1
0	1	1	*0*	1	0	0
0	1	0	*1*	0	1	0

2) Nyní odvodíme nejznámější pravdivostní funkce s pomocí Schefferovy funkce:

p	$\uparrow$	q
1	*0*	1
1	*1*	0
0	*1*	1
0	*1*	0

Základní krok spočívá v tom, že si pomocí $\uparrow$ definujeme negaci, což vypadá obtížně vzhledem k tomu, že $\uparrow$ je binární, kdežto $\neg$ unární. Trik bude v tom, že $\uparrow$ nebude operovat na všech možných dvojicích pravdivostních hodnot, ale jen na některých:

p	$\uparrow$	p
1	*0*	1
0	*1*	0

Čili $\neg p$ je definovatelná pomocí $p \uparrow p$. Pro srovnání uvádíme odvození pravdivostní funkce unární verum:

$(p$	$\uparrow$	$p)$	$\uparrow$	p
1	0	1	*1*	1
0	1	0	*1*	0

S pomocí negace snadno definujeme konjunkci $\wedge$:

$\neg$	$(p$	$\uparrow$	$q)$
1	1	0	1
0	1	1	0
0	0	1	1
0	0	1	0

Už v předchozím příkladu jsme viděli, jak třeba z $\neg$ a $\wedge$ nadefinovat postupně $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$. Nejznámější výrokové spojky ale lze nadefinovat výlučně s pomocí Schefferovy funkce $\uparrow$. Definici $\neg$ jsme již viděli; nyní definujme třeba $\wedge$, ovšem bez využití $\neg$:

$(p$	$\uparrow$	$q)$	$\uparrow$	$(p$	$\uparrow$	$q)$
1	0	1	*1*	1	0	1
1	1	0	*0*	1	1	0
0	1	1	*0*	0	1	1
0	1	0	*0*	0	1	0

Implikaci $\rightarrow$ definujeme takto:

(*p*	↑	*q*)	↑	*p*
1	0	1	*1*	1
1	1	0	*0*	1
0	1	1	*1*	0
0	1	0	*1*	0

Nyní definujeme pro ukázku vylučovací disjunkci $\vee\vee$:

((*p*	↑	*q*)	↑	*p*)	↑	((*p*	↑	*q*)	↑	*q*)
1	0	1	1	1	*0*	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	*1*	1	1	0	1	0
0	1	1	1	0	*1*	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	*0*	0	1	0	1	0

Definice disjunkce $\vee$ je jednodušší:

(*p*	↑	*p*)	↑	(*q*	↑	*q*)
1	0	1	*1*	1	0	1
1	0	1	*1*	0	1	0
0	1	0	*1*	1	0	0
0	1	0	*0*	0	1	1

Konečně ekvivalenci $\leftrightarrow$ definujeme pomocí $\uparrow$ spojující formuli pro $\vee$ s formulí $p\uparrow q$:

((*p*	↑	*p*)	↑	(*q*	↑	*q*))	↑	(*p*	↑	*q*)
1	0	1	1	1	0	1	*1*	1	0	1
1	0	1	1	0	1	0	*0*	1	1	0
0	1	0	1	1	0	0	*0*	0	1	1
0	1	0	0	0	1	1	*1*	0	1	0

3) O něco komplikovanější je definování tří- a vícečetných pravdivostních funkcí. Tento podnik je založen na tom, že každé formuli koresponduje nějaká pravdivostní funkce. Z toho plyne, že formuli obsahující například tři (odlišné) proměnné odpovídá nějaká ternární funkce. (V některých případech je například třetí proměnná eliminovatelná, čemuž je tak tehdy, když hodnotu nějaké ternární funkce lze definovat zcela bez pomoci třetího parametru.) Příkladem je už výše uváděná definice funkce if-then-else pomocí formule $(p\rightarrow q)\wedge(\neg p\rightarrow r)$.

5.2 Cvičení – odvození výrokových spojek z jiných výrokových spojek

1) S pomocí $\neg$ a $\vee$ odvoďte $\wedge$.

2) S pomocí $\neg$ a $\wedge$ odvoďte $\vee$.

3) S pomocí $\neg$ a $\vee$ odvoďte $\rightarrow$.

4) S pomocí $\neg$ a $\wedge$ odvoďte $\rightarrow$.

5) S pomocí $\rightarrow$, $\wedge$ a $\neg$ odvoďte $\leftrightarrow$.

6) Odvoďte nejznámější pravdivostních funkce pomocí Nicod-Peirceovy funkce $\downarrow$.

5.2 Řešení – odvození výrokových spojek z jiných výrokových spojek

1) $(p\wedge q) =_{\mathrm{df}} \neg(\neg p\vee\neg q)$

2) $(p\vee q) =_{\mathrm{df}} \neg(\neg p\wedge\neg q)$

3) $(p\rightarrow q) =_{\mathrm{df}} (\neg p\vee q)$

4) $(p\rightarrow q) =_{\mathrm{df}} \neg(p\wedge\neg q)$

5) $(p\leftrightarrow q) =_{\mathrm{df}} ((p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p))$

6) (Srov. s výše uváděnými definicemi známých výrokových spojek pomocí $\uparrow$.)

Nejprve definujeme negaci $\neg$:

p	$\downarrow$	p
1	*0*	1
0	*1*	0

Definujeme disjunkci $\vee$:

$(p$	$\downarrow$	$q)$	$\downarrow$	$(p$	$\downarrow$	$q)$
1	0	1	*1*	1	0	1
1	0	0	*1*	1	0	0
0	0	1	*1*	0	0	1
0	1	0	*0*	0	1	0

Definujeme konjunkci $\wedge$:

$(p$	$\downarrow$	$p)$	$\downarrow$	$(q$	$\downarrow$	$q)$
1	0	1	*1*	1	0	1
1	0	1	*0*	0	1	0
0	1	0	*0*	1	0	0
0	1	0	*0*	0	0	1

Pro ukázku definujeme i negovanou implikaci:

$(p$	$\downarrow$	$q)$	$\downarrow$	q
1	0	1	*0*	1
1	0	0	*1*	0
0	0	1	*0*	1
0	1	0	*0*	0

Implikaci $\rightarrow$ definujeme jakožto spojení (pomocí $\downarrow$) dvou formulí pro negovanou implikaci:

$((p$	$\downarrow$	$q)$	$\downarrow$	$q)$	$\downarrow$	$((p$	$\downarrow$	$q)$	$\downarrow$	$q)$
1	0	1	0	1	*1*	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	*0*	1	0	0	1	0
0	0	1	0	1	*1*	0	0	1	0	1
0	1	0	0	0	*1*	0	1	0	0	0

Definujeme ekvivalenci $\leftrightarrow$:

$((p$	$\downarrow$	$q)$	$\downarrow$	$q)$	$\downarrow$	$((p$	$\downarrow$	$q)$	$\downarrow$	$p)$
1	0	1	0	1	*1*	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	*0*	1	0	0	0	1
0	0	1	0	1	*0*	0	0	1	1	0
0	1	0	0	0	*1*	0	1	0	0	0

6. Vybrané tautologie

Tautologie jsou alternativně zvány *logické pravdy* či *logicky platné formule*. O některých výlučných z nich, např. zákonu sporu, se hovoří též jako o *logických* *zákonech*. Logické pravdy jsou to proto, že se liší od obyčejných, faktuálních (empirických) pravd. Logicky platné proto, že platí nikoli kvůli momentálnímu stavu světa, ale takříkajíc kvůli logice. Logické zákony proto, že to jsou prostě ‚zákony myšlení'. Jak si totiž povšimneme i níže, tyto logické zákony lze převést na odvozovací pravidla, což ukazuje význam tautologií. Tautologie tvaru ekvivalence odpovídají obousměrným odvozením (tj. vyplýváním) jedné formule z druhé; tautologie tvaru implikace zas odpovídají odvozením jedné formule z druhé ve směru šipky. Tautologie jsou tedy jakýmisi úsudky s prázdným počtem předpokladů – jsou to tvrzení, která platí nepodmíněně, neodvisle od podpůrných předpokladů.

Tautologie tvaru ekvivalence mají tu vlastnost, že formule po stranách $\leftrightarrow$ mají shodný průběh pravdivostních podmínek. Dobře je to vidět například na $p \leftrightarrow \neg\neg p$. Tautologie tvaru implikace mají specifickou obdobu této vlastnosti: formule napravo od $\rightarrow$, tedy konsekvent, má hodnotu 1 při všech těch ohodnoceních (valuacích) výrokových proměnných, při nichž má hodnotu 1 formule nalevo od $\rightarrow$, tedy antecedent; v případě hodnoty 1 u konsekventu nezáleží, zda antecedent má při tomtéž ohodnocení hodnotu 1 nebo 0. Srov. např. $(p \wedge q) \rightarrow p$.

Následující seznam vybraných tautologií ukazuje konkrétní formule s proměnnými p a q (atd.), ač by namísto nich mohly být užity jiné proměnné. Nejen to, namísto p a q by mohly být uplatněny libovolné formule, schematicky tedy A, B atd. Takovéto zobecnění formulí z níže uvedeného seznamu však ponecháváme na čtenáři.

Tautologií je nekonečně mnoho, což plyne například z právě uvedené úvahy o nahrazování proměnných jinými proměnnými. Námi uváděný seznam je tedy výběrem a to výběrem jen těch nejčastěji diskutovaných tautologií.

Náš seznam vybraných tautologií je pro lepší chápání organizován do několika skupin. Ve skupině A) jsou některé velmi známé tautologie jako zákon sporu – „není pravda, že je pravdivé *p* i negace *p*" (kdyby platilo „*p* a zároveň negace *p*", byl by to spor; negací sporu je tautologie), zákon vyloučeného třetího – „buďto *p* anebo negace *p*" (ale už takříkajíc nic třetího; lat. tertium non datur), či zákon dvojí negace – „*p* je totéž jako negace negace *p*". Adepti logiky si zákon sporu a zákon vyloučeného třetího často pletou, někdy i s jinými zákony, čehož je třeba se vyvarovat.

Ve skupině B) jsou vlastně transformační tautologie, ukazují totiž některé vzájemné převody výrokových spojek. Nejznámější je De Morganův zákon, k němuž byla vytvořena populární říkanka „negovaná disjunkce je konjunkcí negací“ a v obdobě pak „negovaná konjunkce je disjunkcí negací“. Zajímavé je, že jde o jakési dvě obdoby téhož. Nechť si čtenář dobře všimne, že celá formule (tj. De Morganův zákon) obsahuje tři negace na třech různých místech, přičemž ty negace mohou být přesunuty na druhou stranu ‚rovnice‘, srov. např. $\neg(p\wedge q)\leftrightarrow(\neg p\vee\neg q)$ a $(p\wedge q)\leftrightarrow\neg(\neg p\vee\neg q)$ (vnější negace přesunuta zleva napravo od $\leftrightarrow$; přesouvání negace na druhou stranu $\leftrightarrow$ funguje i u jiných zákonů).

Skupina zákonů C) shrnuje některé algebraické vlastnosti výrokových spojek.

Ve skupině D) jsou další v klasické logice známé tautologie. Některé z nich (zákon Dunse Scota – „ze sporu plyne cokoliv“, zákon redukce ad absurdum) mají svou pregnantní obdobu v odvozovacích pravidlech.

Skupina E) ukazuje zajímavá spojení tautologické nebo kontradiktorické formule s běžnou formulí. Například spojíme-li p s nějakou tautologií pomoci konjunkce, výsledná formule má týž průběh pravdivostních hodnot jako tato formule; spojíme-li však p s nějakou tautologií disjunkcí, výsledná formule má tytéž pravdivostní hodnoty jako tautologie. Přidány jsou někdy uváděné ‚definice‘ logických konstant $\top$ a $\bot$ pomocí zákona vyloučeného třetího a sporu (nikoli zákona sporu), což ale může být činěno pomocí libovolné tautologie a kontradikce.

Ve skupině F) jsou některé odvozovací zákony, které jsou uvedeny i v kalkulech přirozené dedukce (srov. kap. 14.); některé z nich jsou coby jeden směr implikace obsaženy v již uvedených tautologiích tvaru ekvivalence.

Desítka vůbec nejdůležitějších tautologií je indikována pomocí *.

A)

$p \leftrightarrow \neg\neg p$	*zákon dvojité negace*	*
$\neg(p\wedge\neg p)$	*zákon sporu*	*
$p\vee\neg p$	*zákon vyloučeného třetího*	*
$p\rightarrow p$	*zákon totožnosti*	
$p \leftrightarrow (p\vee p)$	*zákon idempotence konjunkce*	
$p \leftrightarrow (p\vee p)$	*zákon idempotence disjunkce*	

B)

$\neg(p\wedge q) \leftrightarrow (\neg p\vee\neg q)$	*De Morganův zákon* (DM) „negovaná konjunkce je disjunkcí negací“	*
$(p\wedge q) \leftrightarrow \neg(\neg p\vee\neg q)$		
$(p\wedge q) \leftrightarrow \neg(p \rightarrow \neg q)$		
$\neg(p\vee q) \leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q)$	*De Morganův zákon* (DM) „negovaná disjunkce je konjunkcí negací“	*
$(p\vee q) \leftrightarrow \neg(\neg p\wedge\neg q)$		
$(p\vee q) \leftrightarrow (\neg p\rightarrow q)$		
$\neg(p\rightarrow q) \leftrightarrow (p\wedge\neg q)$	*převod implikace na konjunkci* „negovaná implikace je konjunkce s negací“	*
$(p\rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p\vee q)$	*převod implikace na disjunkci*	*
$(p\rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q\rightarrow\neg p)$	*transpozice* (konverze) *implikace*	*
$(p\leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p))$	*rozklad ekvivalence na implikace* „ekvivalence je obousměrná implikace“	*
$(p\leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p\rightarrow q)\wedge(\neg p\rightarrow\neg q))$		
$(p\leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p\vee q)\vee(\neg p\wedge\neg q))$		
$(p\leftrightarrow q) \leftrightarrow ((\neg p\vee q)\wedge(p\vee\neg q))$		

C)

$(p\vee q) \leftrightarrow (q\vee p)$	*komutativita*
$(p\vee q) \leftrightarrow (q\vee p)$	
$(p\leftrightarrow q) \leftrightarrow (q\leftrightarrow p)$	
$(p\wedge(q\wedge r)) \leftrightarrow ((p\wedge q)\wedge r)$	*asociativita*
$(p\vee(q\vee r)) \leftrightarrow ((p\vee q)\vee r)$	
$(p\leftrightarrow(q\leftrightarrow r)) \leftrightarrow((p\leftrightarrow q)\leftrightarrow r)$	
$(p\wedge(q\vee r)) \leftrightarrow ((p\vee q)\vee(p\vee r))$	*distributivita*
$(p\vee(q\wedge r)) \leftrightarrow ((p\vee q)\wedge(p\vee r))$	
$(p\rightarrow q) \rightarrow ((q\rightarrow r)\rightarrow(p\rightarrow r))$	*tranzitivita*

D)

$p\rightarrow(q\rightarrow p)$	*zákon simplifikace*	*
$(p\wedge\neg p)\rightarrow q$	*zákon Dunse Scota* („ex falso quodlibet“)	*
$((p\rightarrow q)\wedge(p\rightarrow\neg q)) \rightarrow \neg p$	*zákon redukce ad absurdum*	
$(p\rightarrow q) \rightarrow ((q\rightarrow r)\rightarrow(p\rightarrow r))$	*hypotetický sylogismus*	
$(p\rightarrow(q\rightarrow r)) \leftrightarrow ((p\vee q)\rightarrow r)$	*zákon slučování premis*	
$(p\rightarrow(q\rightarrow r)) \rightarrow (q\rightarrow(p\rightarrow r))$	*zákon záměny premis*	

E) (kde T je nějaká tautologie a K je nějaká kontradikce)

$(p \wedge \mathrm{T}) \leftrightarrow p$	*neutrálnost tautologie ke konjunkci*
$(p \wedge \mathrm{K}) \leftrightarrow \mathrm{K}$	*agresivnost kontradikce ke konjunkci*
$(p \vee \mathrm{T}) \leftrightarrow \mathrm{T}$	*agresivnost tautologie k disjunkci*
$(p \vee \mathrm{K}) \leftrightarrow p$	*neutrálnost kontradikce k disjunkci*
$\top \leftrightarrow (p \vee \neg p)$	
$\bot \leftrightarrow (p \wedge \neg p)$	

F)

$p \rightarrow \neg\neg p$	*zavedení dvojité negace*
$\neg\neg p \rightarrow p$	*eliminace dvojité negace*
$(p \wedge q) \rightarrow p$	*eliminace konjunkce*
$(p \wedge q) \rightarrow q$	*eliminace konjunkce*
$p \rightarrow (p \vee q)$	*zavedení disjunkce*
$q \rightarrow (p \vee q)$	*zavedení disjunkce*
$(p \wedge (p \vee q)) \leftrightarrow p$	*zákon absorpce*
$(p \vee (p \wedge q)) \leftrightarrow p$	*zákon absorpce*

6.1 Cvičení – vybrané tautologie

1) Uveďte zákon vyloučeného třetího a zákon sporu. Popište rozdíly mezi těmito tautologiemi.

2) Uveďte De Morganův zákon v některé z variant a popište, jak z ní odvodit varianty další.

3) Uveďte zákon Dunse Scota, zákon reductio ad absurdum, zákon simplifikace.

4) Uveďte zákon ukazující převod implikace na disjunkci a zákon ukazující převod implikace na konjunkci.

5) Uveďte ty tautologie z výše uváděného seznamu, jež nám ukazují, které formule jsou ekvivalentní formuli p.

7. Ekvivalentní transformace

Tautologie tvaru ekvivalence nám ukazují dvojice formulí, které jsou ekvivalentní. Například netautologická a nekontradiktorická formule $\neg(p\wedge q)$ je, jak ukazuje De Morganův zákon, ekvivalentní netautologické a nekontradiktorické formuli $(\neg p\vee\neg q)$. De Morganův zákon tak můžeme použít k transformaci, ‚přepisu' jedné formule na druhou. Podobně u jiných případů. Řetězec transformací můžeme pokládat za důkaz koncové formule z kterékoli z předcházejících formulí. Z jiného úhlu pohledu: ekvivalence ukazují vyplývání oběma směry.

Nyní si podrobně okomentujeme jeden vzorový příklad procvičující ekvivalentní transformace, přičemž zadání úkolu zní třeba následovně: Transformujte formuli $\neg((\neg p\vee q)\wedge(\neg r\wedge s))$ tak, aby se negátory (tj. znaky negace) vyskytovaly nanejvýše před atomickými formulemi (tj. výrokovými proměnnými). Při řešení budeme soustavně uplatňovat De Morganovy zákony a zákon dvojí negace.

Naší formulí je tedy:

$$\neg(\ (\neg p\vee q)\wedge(\neg r\wedge s)\ )$$

V prvním kroku se zbavíme vnějšího negátoru tím, že uplatníme De Morganův zákon pro převod konjunkce na disjunkci $\neg(A\wedge B)\leftrightarrow(\neg A\vee\neg B)$, přičemž za podformuli A budeme považovat podformuli $(\neg p\vee q)$ a za podformuli B budeme považovat podformuli $(\neg r\wedge s)$. Pro orientaci je dobré si tyto podformule $(\neg p\vee q)$ a $(\neg r\wedge s)$ například podtrhnout. Správným výsledkem aplikace tohoto postupu je:

$$\neg(\neg p\vee q)\vee\neg(\neg r\wedge s)$$

Právě zde adepti logiky velmi často chybují. Typickou chybou je, že si neohlídají, že ve výsledné formuli má být např. formule A, tj. $(\neg p\vee q)$, negována; také zapomínají zaměnit operátor $\vee$ za $\wedge$. Abychom takovýmto chybám předcházeli, pomůže si nejprve vyznačit matrici výsledné formule, totiž $\neg...\vee\neg...$, a teprve pak opisovat formule A a B. Další typická chyba je produktem netrpělivosti: adept logiky se totiž pokouší formuli A (či B) nejen opsat z formule vstupní, ale zároveň provést její další úpravu; takže zatímco správným výsledkem by mělo být např. $(p\wedge\neg q)\vee\neg(\neg r\wedge s)$, kvůli chybě je to např. $(\neg p\vee\neg q)\vee\neg(\neg r\wedge s)$. Takovéto chybě lze předcházet pečlivostí a snahou o postupné zvládání úkolů, kdy máme jejich řešení zcela pod vědomou kontrolou. Postupné rozepisování kroků má navíc tu výhodu, že v něm lze snáze provést kontrolu případných chyb.

Naším druhým krokem bude, že se zbavíme negace před závorkou třeba v pravé části formule. Opět uplatníme De Morganův zákon (v téže variantě), přičemž nyní za podformuli A budeme považovat podformuli $\neg r$ a za podformuli B budeme považovat podformuli s:

$$\neg(\neg p \lor q) \lor (\neg\neg r \lor \neg s)$$

V pravé části formule uplatníme zákon dvojité negace, tj. $\neg\neg A \leftrightarrow A$, přičemž za A uvažujeme podformuli r:

$$\neg(\neg p \lor q) \lor (r \lor \neg s)$$

Naším dalším krokem – ten však mohl předcházet krok předchozí – bude, že se zbavíme negace před závorkou nalevo a to tak, že uplatníme De Morganův zákon pro převod disjunkce na konjunkci $\neg(A \lor B) \leftrightarrow (\neg A \land \neg B)$, přičemž za podformuli A budeme teď považovat podformuli $\neg p$ a za podformuli B budeme považovat podformuli q:

$$(\neg\neg p \land \neg q) \lor (r \lor \neg s)$$

V levé části formule uplatníme zákon dvojité negace:

$$(p \land \neg q) \lor (r \lor \neg s)$$

Nyní jsme dosáhli cíle, neboť tato formule je nejen ekvivalentní formuli vstupní, ale neobsahuje negátor na jiném místě než před atomickou formulí.

Ekvivalentní transformace využíváme rovněž při řešení úloh dotazujících se na ekvivalent daného výroku. Například máme formulovat co nejjednodušší výrok, jenž je ekvivalentní výroku:

Jestliže mám dalekohled, pozoruji ptactvo.

Tomuto výroku je sice ekvivalentní mnoho výroků, nicméně za nejjednodušší ekvivalent budeme mít „Nemám dalekohled nebo pozoruji ptactvo“. To je patrné z toho, že formuli $p \rightarrow q$, jež je formalizací daného výroku, je ekvivalentní $\neg p \lor q$. Slovním korelátem formule $\neg p \lor q$ je „Nemám dalekohled nebo pozoruji ptactvo“.

Jiným cvičením na ekvivalentní výroky je výběr z možností, kdy právě jeden z nabízených výroků je ekvivalentní danému výroku:

Na výlet pojedeme vlakem nebo pojedeme autobusem.

i) Neumím anglicky nebo umím německy.
i) Jestliže na výlet pojedeme autobusem, nepojedeme vlakem.
ii) Na výlet nepojedeme vlakem nebo pojedeme autobusem.
iii) Na výlet pojedeme vlakem a pojedeme autobusem.
iv) Jestliže na výlet nepojedeme vlakem, pojedeme autobusem.
v) Na výlet pojedeme vlakem a nepojedeme autobusem.

Při řešení využíváme VL tak, že nejprve formalizujeme daný výrok: $p \vee q$. Poté provedeme ekvivalentní transformaci (transformace) této formule na nějakou jednoduchou ekvivalentní formuli, např. $\neg p \rightarrow q$ či $q \vee p$ nebo $\neg q \rightarrow p$; tuto formuli (formule) vyjádříme slovně: „Jestliže na výlet nepojedeme vlakem, tak pojedeme autobusem", atd. Tuto slovní podobu pak hledáme mezi nabízenými možnostmi; v našem případě je správnou odpovědí iv).

7.1 Příklady – ekvivalentní transformace formulí

1) Převeďte formuli $\neg((\neg p \vee q) \vee (q \wedge (r \vee \neg p)))$ tak, aby se znaky negace, negátory vyskytovaly nanejvýše před výrokovými proměnnými. Opakovaně budeme uplatňovat De Morganovy zákony (DM) a zákon dvojité negace (z. $\neg\neg$):

$\neg((\neg p \vee q) \vee (q \wedge (r \vee \neg p)))$	
$\leftrightarrow [\ \neg(\neg p \vee q) \wedge \neg(q \wedge (r \vee \neg p))\ ]$	DM na celou formuli
$\leftrightarrow [\ (\neg\neg p \wedge \neg q) \wedge \neg(q \wedge (r \vee \neg p))\ ]$	DM nalevo
$\leftrightarrow [\ (p \wedge \neg q) \wedge \neg(q \wedge (r \vee \neg p))\ ]$	z. $\neg\neg$ nalevo
$\leftrightarrow [\ (p \wedge \neg q) \wedge (\neg q \vee \neg(r \vee \neg p))\ ]$	DM napravo
$\leftrightarrow [\ (p \wedge \neg q) \wedge (\neg q \vee (\neg r \wedge \neg\neg p))\ ]$	DM napravo
$\leftrightarrow [\ (p \wedge \neg q) \wedge (\neg q \vee (\neg r \wedge p))\ ]$	z. $\neg\neg$ napravo

2) Převeďte formuli $\neg((p \wedge \neg q) \wedge (\neg q \vee (\neg r \wedge p)))$ tak, aby se negátory vyskytovaly nanejvýše před výrokovými proměnnými:

$\neg(\ (p \wedge \neg q) \wedge (\neg q \vee (\neg r \wedge p))\ )$	
$\leftrightarrow [\ \neg(p \wedge \neg q) \vee \neg(\neg q \vee (\neg r \wedge p))\ ]$	DM na celou formuli
$\leftrightarrow [\ (\neg p \vee \neg\neg q) \vee \neg(\neg q \vee (\neg r \wedge p))\ ]$	DM nalevo
$\leftrightarrow [\ (\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee (\neg r \wedge p))\ ]$	z. $\neg\neg$ nalevo
$\leftrightarrow [\ (\neg p \vee q) \vee (\neg\neg q \wedge \neg(\neg r \wedge p))\ ]$	DM napravo
$\leftrightarrow [\ (\neg p \vee q) \vee (q \wedge \neg(\neg r \wedge p))\ ]$	z. $\neg\neg$ napravo

$\leftrightarrow$ [$(\neg p \vee q) \vee (q \wedge (\neg\neg r \vee \neg p))$]	DM napravo
$\leftrightarrow$ [$(\neg p \vee q) \vee (q \wedge (r \vee \neg p))$]	z. $\neg\neg$ napravo

3) Převeďte formuli $\neg((p \wedge (\neg q \vee r)) \wedge (\neg q \vee r))$ tak, aby se negátory vyskytovaly nanejvýše před výrokovými proměnnými:

$\neg((p \wedge (\neg q \vee r)) \wedge (\neg q \vee r))$	
$\leftrightarrow$ [$\neg(p \wedge (\neg q \vee r))) \vee (\neg(\neg q \vee r))$]	DM na celou formuli
$\leftrightarrow$ [$(\neg p \vee \neg(\neg q \vee r)) \vee (\neg(\neg q \vee r))$]	DM nalevo
$\leftrightarrow$ [$(\neg p \vee (\neg\neg q \wedge \neg r)) \vee (\neg(\neg q \vee r))$]	DM nalevo
$\leftrightarrow$ [$(\neg p \vee (q \wedge \neg r)) \vee (\neg(\neg q \vee r))$]	z. $\neg\neg$ nalevo
$\leftrightarrow$ [$(\neg p \vee (q \wedge \neg r)) \vee (\neg\neg q \wedge \neg r)$]	DM napravo
$\leftrightarrow$ [$(\neg p \vee (q \wedge \neg r)) \vee (q \wedge \neg r)$]	z. $\neg\neg$ napravo
$\leftrightarrow$ [$\neg p \vee (q \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg r)$]	eliminace nadbytečných závorek
$\leftrightarrow$ [$\neg p \vee (q \wedge \neg r)$]	zákon idempotence $\vee$

4) Převeďte formuli $\neg\neg(p \wedge \neg q) \vee \neg(\neg p \wedge q)$ tak, aby se v ní vyskytovaly jen znaky implikace. Jeden z možných postupů:

$\neg\neg(p \wedge \neg q) \vee \neg(\neg p \wedge q)$	
$\leftrightarrow$ [$(p \wedge \neg q) \vee \neg(\neg p \wedge q)$]	z. $\neg\neg$ nalevo
$\leftrightarrow$ [$(p \wedge \neg q) \vee (\neg\neg p \vee \neg q)$]	DM napravo
$\leftrightarrow$ [$(p \wedge \neg q) \vee (p \vee \neg q)$]	z. $\neg\neg$ napravo
$\leftrightarrow$ [$\neg(p \to \neg\neg q) \vee (p \vee \neg q)$]	převod $\wedge$ na $\to$ nalevo
$\leftrightarrow$ [$\neg(p \to q) \vee (p \vee \neg q)$]	z. $\neg\neg$ nalevo
$\leftrightarrow$ [$\neg(p \to q) \vee (\neg p \to \neg q)$]	převod $\vee$ na $\to$ napravo
$\leftrightarrow$ [$\neg\neg(p \to q) \to (\neg p \to \neg q)$]	převod $\vee$ na $\wedge$ na celou formuli
$\leftrightarrow$ [$(p \to q) \to (\neg p \to \neg q)$]	z. $\neg\neg$ nalevo
$\leftrightarrow$ [$(p \to q) \to (q \to p)$]	transpozice $\to$ napravo

7.2 Cvičení – transformace formulí

Následující formule transformujte tak, aby se negátory vyskytovaly nanejvýše před výrokovými proměnnými. (Níže v řešeních výslednou formuli pro zajímavost upravujeme ještě dále a to s pomocí dalších zákonů.)

1) $\neg((p \wedge \neg q) \vee (\neg q \wedge r))$

2 $\neg((p \to q) \wedge (\neg q \to \neg p))$

3) $\neg(\neg p \vee ((q \wedge r) \rightarrow p))$

4) $\neg((\neg p \rightarrow \neg q) \vee (\neg p \rightarrow q))$

5) $\neg((p \rightarrow \neg q) \wedge (\neg s \leftarrow r))$

6) $\neg((\neg p \vee q) \rightarrow (p \wedge \neg q))$

7) $\neg(((p \vee q) \vee r) \vee (\neg p \rightarrow r))$

8) $\neg(\neg(p \wedge \neg q) \rightarrow (q \wedge \neg p))$

9) $\neg(((p \rightarrow q) \vee (\neg p \vee q)) \vee r)$

10) $\neg(\neg(p \rightarrow q) \rightarrow ((r \rightarrow \neg p) \vee q))$

11) $\neg(\neg(p \vee (q \vee r)) \rightarrow (q \vee \neg r))$

12) $\neg(((p \rightarrow q) \vee (\neg p \rightarrow r)) \vee (q \rightarrow (p \vee r)))$

13) $\neg(\neg(p \rightarrow (q \vee \neg r)) \rightarrow (p \vee r))$

14) $\neg(\neg(\neg p \vee (\neg q \rightarrow \neg r)) \rightarrow \neg(\neg(\neg p \wedge \neg q) \vee \neg r))$

15) $\neg(((\neg p \vee \neg q) \wedge (p \rightarrow q)) \wedge ((\neg p \vee \neg r) \wedge (p \rightarrow r)))$

16) $\neg(\neg(p \rightarrow q) \wedge (\neg(p \rightarrow r) \wedge (\neg q \wedge r)))$

17) $\neg(((\neg p \wedge q) \wedge (\neg p \wedge r)) \wedge (\neg q \wedge r))$

18) $\neg((\neg(\neg p \vee \neg q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q)) \wedge (\neg(\neg p \vee \neg q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q)))$

7.2 Řešení – transformace formulí

1)

$\neg((p \wedge \neg q) \vee (\neg q \wedge r))$	
$\leftrightarrow [\ \neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg(\neg q \wedge r)\ ]$	DM na celou formuli
$\leftrightarrow [\ (\neg p \vee \neg\neg q) \wedge \neg(\neg q \wedge r)\ ]$	DM nalevo
$\leftrightarrow [\ (\neg p \vee q) \wedge \neg(\neg q \wedge r)\ ]$	z. $\neg\neg$ nalevo
$\leftrightarrow [\ (\neg p \vee q) \wedge (\neg\neg q \vee \neg r)\ ]$	DM napravo
$\leftrightarrow [\ (\neg p \vee q) \wedge (q \vee \neg r)\ ]$	z. $\neg\neg$ napravo

$\leftrightarrow [\ (p\rightarrow q) \wedge (q\vee\neg r)\ ]$	převod $\vee$ na $\rightarrow$
$\leftrightarrow [\ (p\rightarrow q) \wedge (\neg r\vee q))\ ]$	komutativita $\vee$ napravo
$\leftrightarrow [\ (p\rightarrow q) \wedge (r\rightarrow q)\ ]$	převod $\vee$ na $\rightarrow$

2)

$\neg((p\rightarrow q) \wedge (\neg q\rightarrow\neg p))$	
$\leftrightarrow [\ \neg(p\rightarrow q) \vee \neg(\neg q\rightarrow\neg p)\ ]$	DM na celou formuli
$\leftrightarrow [\ (p\wedge\neg q) \vee \neg(\neg q\rightarrow\neg p)\ ]$	převod $\rightarrow$ na $\wedge$
$\leftrightarrow [\ (p\wedge\neg q) \vee (\neg q\wedge\neg\neg p)\ ]$	převod $\rightarrow$ na $\wedge$
$\leftrightarrow [\ (p\wedge\neg q) \vee (\neg q\wedge p)\ ]$	z. $\neg\neg$ napravo
$\leftrightarrow [\ (p\wedge\neg q) \vee (p\wedge\neg q)\ ]$	komutativita $\wedge$
$\leftrightarrow [\ (p\wedge\neg q)\ ]$	idempotence $\vee$

3)

$\neg(\neg p\vee((q\wedge r)\rightarrow p))$	
$\leftrightarrow [\ \neg\neg p\wedge\neg((q\wedge r)\rightarrow p)\ ]$	DM na celou formuli
$\leftrightarrow [\ p\wedge\neg((q\wedge r)\rightarrow p)\ ]$	z. $\neg\neg$
$\leftrightarrow [\ p\wedge((q\wedge r)\wedge\neg p)\ ]$	převod $\rightarrow$ na $\wedge$
$\leftrightarrow [\ p\wedge q\wedge r\wedge\neg p\ ]$	eliminace nadbytečných závorek (asociativita $\wedge$)
$\leftrightarrow [\ (p\wedge\neg p)\wedge(q\wedge r)\ ]$	komutativita $\wedge$
$\leftrightarrow (p\wedge\neg p)$	agresivnost kontradikce ke $\wedge$

4)

$\neg(\ (\neg p\rightarrow\neg q) \vee (\neg p\rightarrow q)\ )$	
$\leftrightarrow [\ \neg(\neg p\rightarrow\neg q) \wedge \neg(\neg p\rightarrow q)\ ]$	DM na celou formuli
$\leftrightarrow [\ (\neg p\wedge\neg\neg q) \wedge \neg(\neg p\rightarrow q)\ ]$	převod $\rightarrow$ na $\wedge$
$\leftrightarrow [\ (\neg p\wedge q) \wedge \neg(\neg p\rightarrow q)\ ]$	z. $\neg\neg$ napravo
$\leftrightarrow [\ (\neg p\wedge q) \wedge (\neg p\wedge\neg q)\ ]$	převod $\rightarrow$ na $\wedge$
$\leftrightarrow [\ \neg p\wedge q\wedge\neg p\wedge\neg q\ ]$	komutativita $\wedge$
$\leftrightarrow [\ \neg p\wedge q\wedge\neg q\ ]$	idempotence $\wedge$
$\leftrightarrow (q\wedge\neg q)$	agresivnost kontradikce ke $\wedge$

5)

$\neg(\ (p\rightarrow\neg q) \wedge (\neg s\leftarrow r)\ )$	
$\leftrightarrow [\ \neg(p\rightarrow\neg q) \vee \neg(\neg s\leftarrow r)\ ]$	DM na celou formuli
$\leftrightarrow [\ (p\wedge\neg\neg q) \vee \neg(\neg s\leftarrow r)\ ]$	převod $\rightarrow$ na $\wedge$
$\leftrightarrow [\ (p\wedge q) \vee \neg(\neg s\leftarrow r)\ ]$	z. $\neg\neg$ nalevo
$\leftrightarrow [\ (p\wedge q) \vee \neg(\neg\neg r\rightarrow\neg s)\ ]$	převod $\leftarrow$ na $\rightarrow$ napravo
$\leftrightarrow [\ (p\wedge q) \vee \neg(r\rightarrow\neg s)\ ]$	z. $\neg\neg$ napravo
$\leftrightarrow [\ (p\wedge q) \vee (r\wedge\neg\neg s)\ ]$	převod $\rightarrow$ na $\wedge$
$\leftrightarrow [\ (p\wedge q) \vee (r\wedge s)\ ]$	z. $\neg\neg$ napravo

6)

$\neg(\ (\neg p \vee q) \rightarrow (p \wedge \neg q)\ )$	
$\leftrightarrow [\ (\neg p \vee q) \wedge \neg(p \wedge \neg q)\ ]$	převod $\rightarrow$ na $\wedge$
$\leftrightarrow [\ (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg\neg q)\ ]$	DM napravo
$\leftrightarrow [\ (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee q)\ ]$	z. $\neg\neg$ napravo
$\leftrightarrow [\ (p \rightarrow q) \wedge (\neg p \vee q)\ ]$	převod $\vee$ na $\rightarrow$
$\leftrightarrow [\ (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow q)\ ]$	převod $\vee$ na $\rightarrow$
$\leftrightarrow (p \rightarrow q)$	idempotence $\wedge$

7)

$\neg(\ ((p \vee q) \vee r) \vee (\neg p \rightarrow r)\ )$	
$\leftrightarrow [\ \neg((p \vee q) \vee r) \wedge \neg(\neg p \rightarrow r)\ ]$	DM na celou formuli
$\leftrightarrow [\ (\neg(p \vee q) \wedge \neg r) \wedge \neg(\neg p \rightarrow r)\ ]$	DM nalevo
$\leftrightarrow [\ ((\neg p \wedge \neg q) \wedge \neg r) \wedge \neg(\neg p \rightarrow r)\ ]$	DM nalevo
$\leftrightarrow [\ ((\neg p \wedge \neg q) \wedge \neg r) \wedge (\neg p \wedge \neg r)\ ]$	převod $\rightarrow$ na $\wedge$
$\leftrightarrow [\ \neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge \neg p \wedge \neg r\ ]$	eliminace nadbytečných závorek (asociativita $\wedge$)
$\leftrightarrow [\ \neg p \wedge \neg p \wedge \neg r \wedge \neg r \wedge \neg q\ ]$	komutativita $\wedge$
$\leftrightarrow [\ \neg p \wedge \neg r \wedge \neg r \wedge \neg q\ ]$	idempotence $\wedge$
$\leftrightarrow [\ \neg p \wedge \neg r \wedge \neg q\ ]$	idempotence $\wedge$

8)

$\neg(\neg(p \wedge \neg q) \rightarrow (q \wedge \neg p))$	
$\leftrightarrow [\ \neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg(q \wedge \neg p)\ ]$	převod $\rightarrow$ na $\wedge$
$\leftrightarrow [\ (\neg p \vee \neg\neg q) \wedge \neg(q \wedge \neg p)\ ]$	DM v levé části
$\leftrightarrow [\ (\neg p \vee q) \wedge \neg(q \wedge \neg p)\ ]$	z. $\neg\neg$ nalevo
$\leftrightarrow [\ (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg\neg p)\ ]$	DM napravo
$\leftrightarrow [\ (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)\ ]$	z. $\neg\neg$ napravo
$\leftrightarrow [\ (p \rightarrow q) \wedge (\neg q \vee p)\ ]$	převod $\vee$ na $\rightarrow$
$\leftrightarrow [\ (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)\ ]$	převod $\vee$ na $\rightarrow$
$\leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$	„ekvivalence je implikace oběma směry"

9)

$\neg(\ ((p \rightarrow q) \vee (\neg p \vee q)) \vee r)$	
$\leftrightarrow [\ \neg((p \rightarrow q) \vee (\neg p \vee q)) \wedge \neg r\ ]$	DM na celou formuli
$\leftrightarrow [\ (\neg(p \rightarrow q) \wedge \neg(\neg p \vee q)) \wedge \neg r\ ]$	DM v levé části
$\leftrightarrow [\ ((p \wedge \neg q) \wedge \neg(\neg p \vee q)) \wedge \neg r\ ]$	převod $\rightarrow$ na $\wedge$
$\leftrightarrow [\ ((p \wedge \neg q) \wedge (\neg\neg p \wedge \neg q)) \wedge \neg r\ ]$	DM uprostřed formule
$\leftrightarrow [\ ((p \wedge \neg q) \wedge (p \wedge \neg q)) \wedge \neg r\ ]$	z. $\neg\neg$ uprostřed
$\leftrightarrow [\ p \wedge \neg q \wedge p \wedge \neg q \wedge \neg r\ ]$	eliminace nadbytečných závorek (asociativita $\wedge$)
$\leftrightarrow [\ p \wedge p \wedge \neg q \wedge \neg q \wedge \neg r\ ]$	komutativita $\wedge$
$\leftrightarrow [\ p \wedge \neg q \wedge \neg q \wedge \neg r\ ]$	idempotence $\wedge$
$\leftrightarrow [\ p \wedge \neg q \wedge \neg r\ ]$	idempotence $\wedge$

10)

$\neg(\neg(p\to q)\to((r\to\neg p)\vee q))$	
$\leftrightarrow [\ \neg(p\to q)\wedge\neg((r\to\neg p)\vee q)\ ]$	převod $\to$ na $\wedge$
$\leftrightarrow [\ (p\wedge\neg q)\wedge\neg((r\to\neg p)\vee q)\ ]$	převod $\to$ na $\wedge$
$\leftrightarrow [\ (p\wedge\neg q)\wedge(\neg(r\to\neg p)\wedge\neg q)\ ]$	DM napravo
$\leftrightarrow [\ (p\wedge\neg q)\wedge(r\wedge\neg\neg p)\wedge\neg q)\ ]$	převod $\to$ na $\wedge$
$\leftrightarrow [\ (p\wedge\neg q)\wedge(r\wedge p)\wedge\neg q)\ ]$	z. $\neg\neg$ napravo
$\leftrightarrow [\ p\wedge\neg q\wedge r\wedge p\wedge\neg q\ ]$	eliminace nadbytečných závorek (asociativita $\wedge$)
$\leftrightarrow [\ p\wedge p\wedge\neg q\wedge\neg q\wedge r\ ]$	komutativita $\wedge$
$\leftrightarrow [\ p\wedge\neg q\wedge\neg q\wedge r\ ]$	idempotence $\wedge$
$\leftrightarrow [\ p\wedge\neg q\wedge r\ ]$	idempotence $\wedge$

11)

$\neg(\neg(p\vee(q\vee r))\to(q\vee\neg r))$	
$\leftrightarrow [\ \neg(p\vee(q\vee r))\wedge\neg(q\vee\neg r)\ ]$	převod $\to$ na $\wedge$
$\leftrightarrow [\ (\neg p\wedge\neg(q\vee r))\wedge\neg(q\vee\neg r)\ ]$	DM nalevo
$\leftrightarrow [\ (\neg p\wedge(\neg q\wedge\neg r))\wedge\neg(q\vee\neg r)\ ]$	DM nalevo
$\leftrightarrow [\ (\neg p\wedge(\neg q\wedge\neg r))\wedge(\neg q\wedge\neg\neg r)\ ]$	DM napravo
$\leftrightarrow [\ (\neg p\wedge(\neg q\wedge\neg r))\wedge(\neg q\wedge r)\ ]$	z. $\neg\neg$ napravo
$\leftrightarrow [\ \neg p\wedge\neg q\wedge\neg r\wedge\neg q\wedge r\ ]$	eliminace nadbytečných závorek (asociativita $\wedge$)
$\leftrightarrow [\ \neg p\wedge(r\wedge\neg r)\wedge(\neg q\wedge\neg q)\ ]$	komutativita $\wedge$
$\leftrightarrow [\ \neg p\wedge(r\wedge\neg r)\wedge\neg q\ ]$	idempotence $\wedge$
$\leftrightarrow [\ \neg p\wedge\neg q\wedge(r\wedge\neg r)\ ]$	komutativita $\wedge$
$\leftrightarrow (r\wedge\neg r)$	agresivnost kontradikce ke $\wedge$

12)

$\neg(\ ((p\to q)\vee(\neg p\to r))\vee(q\to(p\vee r))\ )$	
$\leftrightarrow [\ \neg((p\to q)\vee(\neg p\to r))\wedge\neg(q\to(p\vee r))\ ]$	DM
$\leftrightarrow [\ (\neg(p\to q)\wedge\neg(\neg p\to r))\wedge\neg(q\to(p\vee r))\ ]$	DM nalevo
$\leftrightarrow [\ ((p\wedge\neg q)\wedge\neg(\neg p\to r))\wedge\neg(q\to(p\vee r))\ ]$	převod $\to$ na $\wedge$
$\leftrightarrow [\ ((p\wedge\neg q)\wedge(\neg p\wedge\neg r))\wedge\neg(q\to(p\vee r))\ ]$	převod $\to$ na $\wedge$
$\leftrightarrow [\ ((p\wedge\neg q)\wedge(\neg p\wedge\neg r))\wedge(q\wedge\neg(p\vee r))\ ]$	převod $\to$ na $\wedge$
$\leftrightarrow [\ ((p\wedge\neg q)\wedge(\neg p\wedge\neg r))\wedge(q\wedge(\neg p\wedge\neg r))\ ]$	DM napravo
$\leftrightarrow [\ p\wedge\neg q\wedge\neg p\wedge\neg r\wedge q\wedge\neg p\wedge\neg r\ ]$	eliminace nadbytečných závorek (asociativita $\wedge$)
$\leftrightarrow [\ p\wedge\neg p\wedge\neg p\wedge q\wedge\neg q\vee\neg r\wedge\neg r\ ]$	komutativita $\wedge$
$\leftrightarrow [\ p\wedge\neg p\wedge q\wedge\neg q\vee\neg r\wedge\neg r\ ]$	idempotence $\wedge$
$\leftrightarrow [\ (p\wedge\neg p)\wedge(q\wedge\neg q)\wedge\neg r\ ]$	idempotence $\wedge$
$\leftrightarrow (p\wedge\neg p)$	agresivnost kontradikce ke $\wedge$

13)

$\neg(\ \neg(p\rightarrow(q\vee\neg r)) \rightarrow (p\vee r))$	
$\leftrightarrow [\ \neg(p\rightarrow(q\vee\neg r)) \wedge \neg(p\vee r)\ ]$	převod $\rightarrow$ na $\wedge$
$\leftrightarrow [\ (p\wedge\neg(q\vee\neg r)) \wedge \neg(p\vee r)\ )\ ]$	převod $\rightarrow$ na $\wedge$
$\leftrightarrow [\ (p\wedge(\neg q\wedge\neg\neg r)) \wedge \neg(p\vee r)\ ]$	DM nalevo
$\leftrightarrow [\ (p\wedge(\neg q\wedge r)) \wedge \neg(p\vee r)\ ]$	z. $\neg\neg$ nalevo
$\leftrightarrow [\ (p\wedge(\neg q\wedge r)) \wedge (\neg p\wedge\neg r)\ ]$	DM napravo
$\leftrightarrow [\ p\wedge\neg q\wedge r\wedge\neg p\wedge\neg r\ ]$	eliminace nadbytečných závorek
$\leftrightarrow [\ p\wedge\neg p\wedge r\wedge\neg r\wedge\neg q\ ]$	komutativita $\wedge$
$\leftrightarrow [\ p\wedge\neg p\wedge\neg q\ ]$	konjunkce dvou kontradikcí dává kontradikci
$\leftrightarrow [\ p\wedge\neg p\ ]$	agresivnost kontradikce ke $\wedge$

14)

$[\ \neg(\ \neg(\neg p\vee(\neg q\rightarrow\neg r)) \rightarrow \neg(\neg(\neg p\wedge\neg q)\vee\neg r)\ )\ ]$	
$\leftrightarrow [\ \neg(\neg p\vee(\neg q\rightarrow\neg r)) \wedge \neg\neg(\neg(\neg p\wedge\neg q)\vee\neg r)\ ]$	převod $\rightarrow$ na $\wedge$
$\leftrightarrow [\ \neg(\neg p\vee (\neg q\rightarrow\neg r)) \wedge (\neg(\neg p\wedge\neg q)\vee\neg r)\ ]$	z. $\neg\neg$
$\leftrightarrow [\ (\neg\neg p\wedge\neg(\neg q\rightarrow\neg r)) \wedge (\neg(\neg p\wedge\neg q)\vee\neg r)\ ]$	DM nalevo
$\leftrightarrow [\ (p\wedge\neg(\neg q\rightarrow\neg r)) \wedge (\neg(\neg p\wedge\neg q)\vee\neg r)\ ]$	z. $\neg\neg$
$\leftrightarrow [\ (p\wedge(\neg q\wedge\neg\neg r)) \wedge (\neg(\neg p\wedge\neg q)\vee\neg r)\ ]$	převod $\rightarrow$ na $\wedge$
$\leftrightarrow [\ (p\wedge(\neg q\wedge r)) \wedge (\neg(\neg p\wedge\neg q)\vee\neg r)\ ]$	z. $\neg\neg$
$\leftrightarrow [\ (p\wedge(\neg q\wedge r)) \wedge ((\neg\neg p\vee\neg\neg q)\vee\neg r)\ ]$	DM napravo
$\leftrightarrow [\ (p\wedge(\neg q\wedge r)) \wedge ((p\vee q)\vee\neg r)\ ]$	z. $\neg\neg$
$\leftrightarrow [\ (p\wedge\neg q\wedge r) \wedge (p\vee q\vee\neg r)\ ]$	eliminace nadbytečných závorek (asociativita. $\wedge$)

15)

$\neg(\ ((\neg p\vee\neg q)\wedge(p\rightarrow q))\wedge((\neg p\vee\neg r)\wedge(p\rightarrow r))\ )$	
$\leftrightarrow [\ \neg((\neg p\vee\neg q)\wedge(p\rightarrow q))\vee\neg((\neg p\vee\neg r)\wedge(p\rightarrow r))\ ]$	DM
$\leftrightarrow [\ (\neg(\neg p\vee\neg q)\vee\neg(p\rightarrow q))\vee\neg((\neg p\vee\neg r)\wedge(p\rightarrow r))\ ]$	DM nalevo
$\leftrightarrow [\ ((\neg\neg p\wedge\neg\neg q)\vee\neg(p\rightarrow q))\vee\neg((\neg p\vee\neg r)\wedge(p\rightarrow r))\ ]$	DM nalevo
$\leftrightarrow [\ ((p\wedge\neg\neg q)\vee\neg(p\rightarrow q))\vee\neg((\neg p\vee\neg r)\wedge(p\rightarrow r))\ ]$	z. $\neg\neg$ nalevo
$\leftrightarrow [\ ((p\wedge q)\vee\neg(p\rightarrow q))\vee\neg((\neg p\vee\neg r)\wedge(p\rightarrow r))\ ]$	z. $\neg\neg$ nalevo
$\leftrightarrow [\ ((p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q))\vee\neg((\neg p\vee\neg r)\wedge(p\rightarrow r))\ ]$	převod $\rightarrow$ na $\wedge$
$\leftrightarrow [\ ((p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q))\vee(\neg(\neg p\vee\neg r)\vee\neg(p\rightarrow r))\ ]$	DM napravo
$\leftrightarrow [\ ((p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q))\vee((\neg\neg p\wedge\neg\neg r)\vee\neg(p\rightarrow r))\ ]$	DM napravo
$\leftrightarrow [\ ((p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q))\vee((p\wedge\neg\neg r)\vee\neg(p\rightarrow r))\ ]$	z. $\neg\neg$ napravo
$\leftrightarrow [\ ((p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q))\vee((p\wedge r)\vee\neg(p\rightarrow r))\ ]$	z. $\neg\neg$ napravo

16)

$\neg(\neg(p\rightarrow q)\wedge(\neg(p\rightarrow r)\wedge(\neg q\wedge r)))$	
$\leftrightarrow [\neg\neg(p\rightarrow q)\vee\neg(\neg(p\rightarrow r)\wedge(\neg q\wedge r))]$	DM
$\leftrightarrow [(p\rightarrow q)\vee\neg(\neg(p\rightarrow r)\wedge(\neg q\wedge r))]$	z. ¬¬ nalevo
$\leftrightarrow [(p\rightarrow q)\vee(\neg\neg(p\rightarrow r)\vee\neg(\neg q\wedge r))]$	DM napravo
$\leftrightarrow [(p\rightarrow q)\vee((p\rightarrow r)\vee\neg(\neg q\wedge r))]$	z. ¬¬ napravo
$\leftrightarrow [(p\rightarrow q)\vee((p\rightarrow r)\vee(\neg\neg q\vee\neg r))]$	DM napravo
$\leftrightarrow [(p\rightarrow q)\vee((p\rightarrow r)\vee(q\vee\neg r))]$	z. ¬¬ napravo
$\leftrightarrow [(\neg p\vee q)\vee((p\rightarrow r)\vee(q\vee\neg r))]$	převod → na ∨
$\leftrightarrow [(\neg p\vee q)\vee((\neg p\vee r)\vee(q\vee\neg r))]$	převod → na ∨
$\leftrightarrow [\neg p\vee q\vee\neg p\vee r\vee q\vee\neg r]$	eliminace nadbytečných závorek (asociativita ∨)
$\leftrightarrow [\neg p\vee\neg p\vee q\vee q\vee r\vee\neg r]$	komutativita ∨
$\leftrightarrow [\neg p\vee q\vee q\vee r\vee\neg r]$	idempotence ∨
$\leftrightarrow [(\neg p\vee q)\vee(r\vee\neg r)]$	idempotence ∨
$\leftrightarrow (r\vee\neg r)$	agresivnost tautologie k ∨

17)

$\neg(((\neg p\wedge q)\wedge(\neg p\wedge r))\wedge(\neg q\wedge r))$	
$\leftrightarrow [\neg((\neg p\wedge q)\wedge(\neg p\wedge r))\vee\neg(\neg q\wedge r)]$	DM
$\leftrightarrow [(\neg(\neg p\wedge q)\vee\neg(\neg p\wedge r))\vee\neg(\neg q\wedge r)]$	DM nalevo
$\leftrightarrow [(\neg\neg p\vee\neg q)\vee\neg(\neg p\wedge r))\vee\neg(\neg q\wedge r)]$	DM nalevo
$\leftrightarrow [((p\vee\neg q)\vee\neg(\neg p\wedge r))\vee\neg(\neg q\wedge r)]$	z. ¬¬ nalevo
$\leftrightarrow [((p\vee\neg q)\vee(\neg\neg p\vee\neg r))\vee\neg(\neg q\wedge r))]$	DM nalevo
$\leftrightarrow [((p\vee\neg q)\vee(p\vee\neg r))\vee\neg(\neg q\wedge r)]$	z. ¬¬ nalevo
$\leftrightarrow [((p\vee\neg q)\vee(p\vee\neg r))\vee(\neg\neg q\vee\neg r)]$	DM napravo
$\leftrightarrow [((p\vee\neg q)\vee(p\vee\neg r))\vee(q\vee\neg r)]$	z. ¬¬ napravo
$\leftrightarrow [p\vee\neg q\vee p\vee\neg r\vee q\vee\neg r]$	eliminace nadbytečných závorek (asociativita ∨)
$\leftrightarrow [p\vee p\vee\neg r\vee\neg r\vee q\vee\neg q]$	komutativita ∨
$\leftrightarrow [p\vee\neg r\vee\neg r\vee q\vee\neg q]$	idempotence ∨
$\leftrightarrow [p\vee\neg r\vee(q\vee\neg q)]$	idempotence ∨
$\leftrightarrow (q\vee\neg q)$	agresivnost tautologie k ∨

18)

$\neg(\ (\neg(\neg p\vee\neg q) \to (\neg p\vee\neg q)\ ) \vee (\neg(\neg p\vee\neg q) \to (\neg p\vee\neg r)\ )\ )$

$\leftrightarrow [\ \neg(\ \neg(\neg p\vee\neg q) \to (\neg p\vee\neg q)\ ) \wedge \neg(\neg(\neg p\vee\neg q) \to (\neg p\vee\neg r)\ )\ ]$ DM na celek formule

$\leftrightarrow [\ (\ \neg(\neg p\vee\neg q) \wedge \neg(\neg p\vee\neg q)\ ) \wedge \neg(\neg(\neg p\vee\neg q) \to (\neg p\vee\neg r)\ )\ ]$ převod $\to$ na $\wedge$

$\leftrightarrow [\ (\ \neg(\neg p\vee\neg q) \wedge \neg(\neg p\vee\neg q)\ ) \wedge (\ \neg(\neg p\vee\neg q) \wedge \neg(\neg p\vee\neg r)\ )\ ]$ převod $\to$ na $\wedge$

$\leftrightarrow [\ (\ (\neg\neg p\wedge\neg\neg q) \wedge \neg(\neg p\vee\neg q)\ ) \wedge (\ \neg(\neg p\vee\neg q) \wedge \neg(\neg p\vee\neg r)\ )\ ]$ DM nalevo

$\leftrightarrow [\ (\ (p\wedge q) \wedge \neg(\neg p\vee\neg q)\ ) \wedge (\ \neg(\neg p\vee\neg q) \wedge \neg(\neg p\vee\neg r)\ )\ ]$ z. $\neg\neg$

$\leftrightarrow [\ (\ (p\wedge q) \wedge (\neg\neg p\wedge\neg\neg q)\ ) \wedge (\ \neg(\neg p\vee\neg q) \wedge \neg(\neg p\vee\neg r)\ )\ ]$ DM nalevo

$\leftrightarrow [\ (\ (p\wedge q) \wedge (p\wedge q)\ ) \wedge (\neg(\neg p\vee\neg q) \wedge \neg(\neg p\vee\neg r)\ )\ ]$ z. $\neg\neg$

$\leftrightarrow [\ (\ (p\wedge q) \wedge (p\wedge q)\ ) \wedge (\ (\neg\neg p\wedge\neg\neg q) \wedge \neg(\neg p\vee\neg r)\ )\ ]$ DM napravo

$\leftrightarrow [\ (\ (p\wedge q) \wedge (p\wedge q)\ ) \wedge (\ (p\wedge q) \wedge \neg(\neg p\vee\neg r)\ )\ ]$ z. $\neg\neg$

$\leftrightarrow [\ (\ (p\wedge q) \wedge (p\wedge q)\ ) \wedge (\ (p\vee q) \wedge (\neg\neg p\wedge\neg\neg r)\ )\ ]$ DM napravo

$\leftrightarrow [\ (\ (p\wedge q) \wedge (p\wedge q)\ ) \wedge (\ (p\wedge q) \wedge (p\wedge r)\ )\ ]$ z. $\neg\neg$

$\leftrightarrow [\ (p\wedge q) \wedge (p\wedge q) \wedge (p\wedge q) \wedge (p\wedge r)\ ]$ eliminace nadbytečných závorek

$\leftrightarrow [\ (p\wedge q) \wedge (p\wedge r)]$ idempotence $\wedge$

$\leftrightarrow [\ p\wedge q\wedge p\wedge r\ ]$ eliminace nadbytečných závorek

$\leftrightarrow [p\wedge q\wedge r]$ idempotence $\wedge$

7.3 Cvičení – ekvivalence výroků

Určete co možná nejjednodušší výrok ekvivalentní danému výroku:

1) Není zamračeno nebo prší.

2) Není pravda, že prší a je mlha.

3) Budu-li v létě u moře, tak budu odpočatý.

4) Doma mi chybí chleba nebo mi chybí máslo.

5) Je-li motor zadřený, auto není pojízdné.

6) O zimních prázdninách nebudou přednášky nebo nebudou cvičení.

7) Není-li slunečné počasí, venku není teplo.

8) Není-li uvedeno jinak, představení začíná v 19:30 hodin.

9) Jestliže se zúčastnil konference, tak si připravoval referát, ale nestihl včas podat grantovou přihlášku.

10) Jestliže není pravda, že Gödel je matematik a logik, tak je dokazatelná Church-Turingova teze.

11) Obhájce říká: „Obžalovaný je sice lhář, ale není zloděj". Žalobce říká: „Není pravda, že obžalovaný je jenom lhář a přitom není zloděj". S pomocí jiných spojek vyjádřete výrok, jež je ekvivalentní výroku žalobce.

12) Je dán výrok: „Není-li Londýn větší než Oxford, pak není pravda, že je-li Londýn větší než Oxford, pak není pravda, že Londýn je větší než Oxford". Co je výrokem vlastně řečeno? (Najděte jednodušší ekvivalent výroku daného.)

7.3 Řešení – ekvivalence výroků

1) Výroku odpovídající formule $\neg p \lor q$ je dle tautologie převádějící formuli tvaru disjunkce na implikaci ekvivalentní formuli $p \to q$, slovně vyjádřeno: „Jestliže je zamračeno, tak prší".

2) Příslušnou formulí je $\neg(p \land q)$. Této formuli je dle De Morganova zákona ekvivalentní formule $\neg p \lor \neg q$, což slovně vyjádříme jako „Neprší nebo není mlha".

3) Příslušná formule $p \to q$ je ekvivalentní formuli $\neg p \lor q$, slovně tedy: „Nebudu v létě u moře nebo budu odpočatý".

4) Příslušná formule $p \lor q$ je ekvivalentní např. formuli $\neg p \to q$, slovně tedy: „Jestliže mi doma nechybí chleba, chybí mi máslo".

5) Příslušná formule $p \to \neg q$ je ekvivalentní např. formuli $\neg p \to q$, slovně tedy: „Je-li auto pojízdné, tak motor není zadřený".

6) Příslušná formule $\neg p \lor \neg q$ je ekvivalentní např. formuli $p \to \neg q$, slovně tedy: „Budou-li o zimních prázdninách přednášky, nebudou cvičení".

7) Příslušná formule $\neg p \rightarrow \neg q$ je ekvivalentní například formuli $q \rightarrow p$, slovně tedy: „Je-li venku teplo, je slunečné počasí“.

8) Příslušnou formuli podrobíme ekvivalentním transformacím: $(\neg p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg\neg p \vee q) \leftrightarrow (p \vee q)$; slovně tedy: „Je to uvedeno jinak nebo představení začíná v 19:30 hodin“.

9) Příslušnou formuli podrobíme ekvivalentním transformacím: $(p \rightarrow (q \wedge \neg r)) \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg(q \wedge \neg r)) \leftrightarrow (\neg p \vee (q \wedge \neg r))$; slovně tedy: „Nezúčastnil se konference nebo si pečlivě připravoval referát a nestihl včas podat grantovou přihlášku“.

10) Provedeme formalizaci daného výroku a pak ekvivalentní transformace:

$\neg(p \wedge q) \rightarrow r$	
$\leftrightarrow \neg\neg(p \wedge q) \vee r$	převod $\rightarrow$ na $\vee$
$\leftrightarrow (p \wedge q) \vee r$	z. $\neg\neg$

Slovně tedy: „Gödel je matematik a logik nebo je dokazatelná Church-Turingova teze“.

11) Provedeme formalizaci výroku žalobce a poté provedeme ekvivalentní transformace takto získané formule:

$\neg(p \wedge \neg q)$	
$\leftrightarrow \neg p \vee \neg\neg q$	De Morganův zákon
$\leftrightarrow \neg p \vee q$	z. $\neg\neg$
$\leftrightarrow p \rightarrow q$	převod $\vee$ na $\rightarrow$

Slovně tedy: „Jestliže je obžalovaný lhář, tak je zloděj“.

12) Provedeme přepis výroku do symbolismu VL a poté provedeme ekvivalentní transformace takto získané formule:

$\neg p \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg p)$	
$\leftrightarrow [\ \neg\neg p \vee \neg(p \rightarrow \neg p)\ ]$	převod první $\rightarrow$ na $\vee$
$\leftrightarrow [\ p \vee \neg(p \rightarrow \neg p)\ ]$	z. $\neg\neg$
$\leftrightarrow [\ p \vee \neg(p \rightarrow \neg p)\ ]$	převod první $\rightarrow$ na $\vee$
$\leftrightarrow [\ p \vee (p \wedge \neg\neg p)\ ]$	převod $\rightarrow$ na $\wedge$
$\leftrightarrow [\ p \vee (p \wedge p)\ ]$	z. $\neg\neg$
$\leftrightarrow (p \vee p)$	idempotence $\wedge$
$\leftrightarrow p$	idempotence $\vee$

Je tedy řečeno: „Londýn je větší než Oxford“.

7.4 Cvičení – ekvivalence výroků (výběr z možností)

Z níže uvedených možností určete ten jediný výrok, který je ekvivalentní danému výroku:

1) Případ je komplikovaný nebo neznáme dostatek údajů.

i) Jestliže je případ komplikovaný, neznáme dostatek údajů.
ii) Jestliže případ není komplikovaný, neznáme dostatek údajů.
iii) Případ není komplikovaný a známe dostatek údajů.
iv) Případ je komplikovaný a neznáme dostatek údajů.
v) Případ není komplikovaný nebo neznáme dostatek údajů.

2) Jestliže se na to podíváme detailně, tak nám vysvitnou nové aspekty.

i) Nepodíváme se na to detailně nebo nám vysvitnou nové aspekty.
ii) Jestliže nám vysvitnou nové aspekty, tak se na to podíváme detailně.
iii) Podíváme se na to detailně a vysvitnou nám nové aspekty.
iv) Podíváme se na to detailně nebo nám vysvitnou nové aspekty.
v) Jestliže se na to nepodíváme detailně, nevysvitnou nám nové aspekty.

3) Není pravda, že přístroj není funkční nebo je vybitá baterie.

i) Není pravda, že přístroj je funkční a není vybitá baterie.
ii) Přístroj je funkční a není vybitá baterie.
iii) Je vybitá baterie, je-li přístroj funkční.
iv) Je-li přístroj funkční, je vybitá baterie.
v) Není-li vybitá baterie, přístroj není funkční.

4) Jestliže jsi dobře finančně zajištěn, tak nemáš strach z budoucnosti.

i) Jsi dobře finančně zajištěn a nemáš strach z budoucnosti.
ii) Jestliže nejsi dobře finančně zajištěn, tak máš strach z budoucnosti.
iii) Jsi dobře finančně zajištěn nebo nemáš strach z budoucnosti.
iv) Nejsi-li dobře finančně zajištěn, tak nemáš strach z budoucnosti.
v) Nejsi dobře finančně zajištěn nebo nemáš strach z budoucnosti.

5) Jsi nemocný nebo jsi ve škole.

i) Nejsi nemocný a nejsi ve škole.

ii) Nejsi nemocný nebo nejsi ve škole.
iii) Jestliže nejsi nemocný, tak jsi ve škole.
iv) Jestliže jsi nemocný, tak nejsi ve škole.
v) Jestliže jsi nemocný, tak jsi ve škole.

6) Jestliže se mi do práce opravdu nechce, tak do ní dnes nepůjdu.

i) Do práce se mi chce a dnes do ní půjdu.
ii) Nepůjdu dnes do práce nebo se mi do ní nechce.
iii) Do práce se mi chce a dnes do ní nepůjdu.
iv) Do práce se mi chce nebo dnes do ní půjdu.
v) Jestliže dnes půjdu do práce, tak se mi do ní chce.

7) Nejsi v prodejně nebo nejsi na pokladně.

i) Jestliže jsi v prodejně, tak nejsi na pokladně.
ii) Jestliže nejsi v prodejně, tak jsi na pokladně.
iii) Jestliže jsi v prodejně, tak jsi na pokladně.
iv) Nejsi v prodejně a nejsi na pokladně.
v) Jsi v prodejně nebo jsi na pokladně.

8) Nebudu-li mít mnoho povinností, budu mít dlouhé volno.

i) Nebudu mít mnoho povinností nebo budu mít dlouhé volno.
ii) Nebudu-li mít dlouhé volno, nebudu mít mnoho povinností.
iii) Budu-li mít dlouhé volno, nebudu mít mnoho povinností.
iv) Budu mít mnoho povinností nebo budu mít dlouhé volno.
v) Budu mít dlouhé volno a nebudu mít mnoho povinností.

9) Úkol budeš řešit dlouho nebo nenajdeš řešení.

i) Úkol nebudeš řešit dlouho nebo nenajdeš řešení.
ii) Jestliže budeš úkol řešit dlouho, nenajdeš řešení.
iii) Úkol nebudeš řešit dlouho a najdeš řešení.
iv) Jestliže najdeš řešení, budeš úkol řešit dlouho.
v) Úkol budeš řešit dlouho a nenajdeš řešení.

10) Jestliže mi to není úplně jasné, radši se na to ještě zeptám.

i) Není mi to úplně jasné nebo se na to radši ještě zeptám.
ii) Jestliže se na to radši ještě zeptám, je mi to úplně jasné.

iii) Je mi to úplně jasné a radši se na to ještě zeptám.
iv) Jestliže se na to radši ještě nezeptám, není mi to úplně jasné.
v) Je mi to úplně jasné nebo se na to radši ještě zeptám.

7.4 Řešení – ekvivalence výroků (výběr z možností)

1) ii), „Jestliže případ není komplikovaný, neznáme dostatek údajů".
2) i), „Nepodíváme se na to detailně nebo nám vysvitnou nové aspekty".
3) ii), „Přístroj je funkční a není vybitá baterie".
4) v), „Nejsi dobře finančně zajištěn nebo nemáš strach z budoucnosti".
5) iii), „Jestliže nejsi nemocný, tak jsi ve škole".
6) v), „Jestliže dnes půjdu do práce, tak se mi do ní chce".
7) i), „Jestliže jsi v prodejně, tak nejsi na pokladně".
8) iv), „Budu mít mnoho povinností nebo budu mít dlouhé volno".
9) iv), „Jestliže najdeš řešení, budeš úkol řešit dlouho".
10) v), „Je mi to úplně jasné nebo se na to radši ještě zeptám".

8. Negace výroků

V tomto dalším praktickém okruhu opět využijeme VL k explicitnímu a tedy kontrolovatelnému provedení úkolu. Ten nyní tkví v určení ekvivalentu přímé negace daného výroku. Obecný postup řešení je totiž takový, že výrok *V* přirozeného jazyka převedeme na odpovídající formuli *A*; tuto formuli *A* zcela mechanicky znegujeme tak, že před ní vložíme negátor $\neg$, získáme tedy $\neg A$; provedením ekvivalentních transformací převedeme $\neg A$ na jednodušší formuli *B*; formuli *B* pak vyjádříme odpovídajícím českým výrokem *W*. Všimněme si, že *V* a *W* k sobě nejsou ve vztahu přímé negace jako *V* a „Není pravda, že *V*", ale de facto ve vztahu ekvivalentu negace; stručně však hovoříme o *negaci* (ev. *opaku*) *výroku* daného.

8.1 Příklady – negace výroků

S pomocí VL určete negaci daného výroku:

1) Budu se procházet nebo si zazpívám.

Nejprve určíme příslušnou formuli: $p \vee q$.
Poté ji negujeme: $\neg(p \vee q)$.
Na tuto negaci uplatníme De Morganův zákon: $\neg p \wedge \neg q$.
Za proměnné dosadíme dílčí výroky a za spojky jejich jazykové ekvivalenty: „Nebudu se procházet a nezazpívám si".

2) Pokud ji miluješ, není co řešit.

Nejprve určíme příslušnou formuli: $p \rightarrow \neg q$.
Negujeme ji: $\neg(p \rightarrow \neg q)$.
Na tuto negaci uplatníme tautologii převádějící negovanou implikaci na konjunkci, jejíž druhý člen je negován: $p \wedge \neg\neg q$. Uplatníme ještě zákon dvojité negace: $p \wedge q$.
Za proměnné dosadíme dílčí výroky a za spojky jejich jazykové ekvivalenty: „Miluješ ji a je co řešit".

3) Je jaro a ptáci hnízdí.

Příslušná formule: $p \wedge q$; její negace: $\neg(p \wedge q)$. Uplatníme De Morganův zákon: $\neg p \vee \neg q$. Slovně pak: „Není jaro nebo ptáci nehnízdí".

4) Budeme se fotografovat nebo se nebudeme zastavovat.

Příslušná formule: $p\vee\neg q$; její negace: $\neg(p\vee\neg q)$. Uplatníme De Morganův zákon a hned poté zákon dvojité negace: $\neg p\wedge q$. Slovně pak: „Nebudeme se fotografovat a budeme se zastavovat".

Určete ten jediný výrok z níže uvedených možností, který je negací daného výroku:

5) Jestliže máš rád operu, chodíš do divadla.

i) Jestliže nemáš rád operu, nechodíš do divadla.
ii) Nemáš rád operu a nechodíš do divadla.
iii) Nemáš rád operu nebo nechodíš do divadla.
iv) Máš rád operu a nechodíš do divadla.
v) Chodíš do divadla a máš rád operu.

Danému výroku koresponduje formule: $p\rightarrow q$. Její negací je: $\neg(p\rightarrow q)$. Ekvivalentem je: $p\wedge\neg q$, neboť „negovaná implikace je konjunkce s negací". Slovně: „Máš rád operu a nechodíš do divadla", správnou z uvedených možností je tedy iv).

6) Program je chybný nebo nefunguje počítač.

i) Jestliže program není chybný, nefunguje počítač.
ii) Program je chybný a počítač funguje.
iii) Program není chybný nebo počítač funguje.
iv) Program není chybný a počítač funguje.
v) Jestliže je program chybný, počítač funguje.

Příslušná formule: $p\vee\neg q$; její negace: $\neg(p\vee\neg q)$. Aplikujeme De Morganův zákon: $\neg p\wedge\neg\neg q$ a pak zákon dvojité negace: $\neg p\wedge q$. Slovně: „Program není chybný a počítač funguje", správnou z uvedených možností je tedy možnost iv).

S pomocí VL určete negaci daného výroku:

7) Je-li logika užitečná, tak je snadná a pochopitelná.

Příslušná formule: $p\rightarrow(q\wedge r)$; její negace: $\neg(p\rightarrow(q\wedge r))$. Ta je ekvivalentní formuli $p\wedge(\neg q\vee\neg r)$ (neboť „negovaná implikace je konjunkce s negací" a „negovaná konjunkce je disjunkcí, jejímž prvním členem je negace"). Slovně tedy:

„Logika je užitečná a tak není snadná nebo není pochopitelná".

8) Je-li matematika solidní disciplína, pak je možno dokázat Fermatovu větu nebo jsou matematikové neschopní.

Příslušná formule: $p\rightarrow(q\vee\neg r)$; její negace: $\neg(p\rightarrow(q\vee\neg r))$. Ta je ekvivalentní formuli $p\wedge\neg(q\vee\neg r)$ (neboť „negovaná implikace je konjunkce s negací"), která je zas ekvivalentní formuli $p\wedge(\neg q\wedge\neg\neg r)$ (uplatněním De Morganova zákona), ta zas ekvivalentní formuli $p\wedge(\neg q\wedge r)$ (uplatněním zákona dvojité negace). Slovně pak: „Matematika je solidní disciplína a Fermatovu větu není možno dokázat a matematici jsou schopní".

8.2 Cvičení – negace výroků

Následující výrok převeďte nejprve na formuli VL, tu negujte a převeďte na ekvivalentní formuli takovou, abyste mohli formulovat její větné vyjádření, jež je negací daného výroku:

1) Nezastavíme se nebo budeme svačit.

2) Jestliže mám knihu, čtu si.

3) Píšu propiskou nebo nepoužívám fixu.

4) Jestliže prší, není suchá zahrada.

5) Moderní obrazy jsou sice umělecké, ale nejsou líbivé.

6) Zvítězí-li ve volbách obě pravicové strany, utvoří koalici a sestaví vládu.

7) Je-li pátek, tak není volno, ale je cvičení z logiky.

8) Bude-li pěkné počasí a nepokazí se nám auto, pojedeme na pláž a budeme se koupat.

9) Jestliže se budu pilně učit, tak uspěji u zkoušky nebo budu mít smůlu.

10) Zkoušku udělám, pokud se budu pilně učit nebo budu mít štěstí.

Určete negaci výroku, jak je uvedeno v zadání:

11) Mějme výrok: „Budou-li mít Petr a Jana vyznamenání, dostanou lyže a pojedou na hory“. Ukázalo se, že tento výrok neplatí. Co se vlastně stalo?

12) Mějme výrok: „Je-li vedro nebo mráz, nechodím po venku, ale jdu do knihovny nebo zůstávám doma“. Co se děje, jestliže tento výrok neplatí?

13) Dva závodníci nastoupili k závodu. Předpověď trenéra zněla: „Stane se to, že A zvítězí nebo B zvítězí, nebo se stane to, že A nedokončí závod nebo B nebude druhý“. Předpověď se nesplnila. Jak dopadl závod, kdo vyhrál?

14) Týž závod pro dva závodníky. Trenér tentokrát předpověděl: „A bude druhý a B zvítězí nebo A zvítězí a B nedokončí závod“. Předpověď se opět nesplnila. Jak dopadl závod?

8.2 Řešení – negace výroků

1) Příslušná formule: $\neg p \vee q$; její negace: $\neg(\neg p \vee q)$. Formule ekvivalentní negované formuli: $\neg\neg p \wedge \neg q$, pak $p \wedge \neg q$; ve slovním vyjádření: „Zastavíme se a nebudeme svačit“.

2) Příslušná formule: $p \rightarrow q$; její negace: $\neg(p \rightarrow q)$. Formule ekvivalentní negované formuli: $p \wedge \neg q$; ve slovním vyjádření: „Mám knihu a nečtu si“.

3) Příslušná formule: $p \vee \neg q$; její negace: $\neg(p \vee \neg q)$. Formule ekvivalentní negované formuli: $\neg p \wedge \neg\neg q$, pak $\neg p \wedge q$; ve slovním vyjádření: „Nepíšu propiskou a používám fixu“.

4) Příslušná formule: $p \rightarrow \neg q$; její negace: $\neg(p \rightarrow \neg q)$. Formule ekvivalentní negované formuli: $p \wedge \neg\neg q$, pak $p \wedge q$; ve slovním vyjádření: „Prší a je suchá zahrada“.

5) Příslušná formule: $p \wedge \neg q$; její negace: $\neg(p \wedge \neg q)$. Formule ekvivalentní negované formuli: $\neg p \vee \neg\neg q$, pak $\neg p \vee q$; ve slovním vyjádření: „Moderní obrazy nejsou umělecké nebo jsou líbivé“.

6) Příslušná formule: $p \rightarrow (q \wedge r)$; ekvivalence k její negaci: $\neg(p \rightarrow (q \wedge r)) \leftrightarrow (p \wedge \neg(q \wedge r)) \leftrightarrow (p \wedge (\neg q \vee \neg r))$. Slovně tedy „Obě pravicové strany zvítězily ve volbách, avšak neutvořily koalici nebo nesestavily vládu“.

7) Příslušná formule: $p \rightarrow (\neg q \wedge r)$; ekvivalence k její negaci: $\neg(p \rightarrow (\neg q \wedge r)) \leftrightarrow (p \wedge \neg(\neg q \wedge r)) \leftrightarrow (p \wedge (\neg\neg q \vee \neg r)) \leftrightarrow (p \wedge (q \vee \neg r))$. Slovně tedy „Je pátek, a tak je volno nebo není cvičení z logiky“.

8) Příslušná formule: $(p \wedge \neg q) \rightarrow (r \wedge s)$; ekvivalence k její negaci: $\neg((p \wedge \neg q) \rightarrow (r \wedge s)) \leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \wedge \neg(r \wedge s)) \leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \wedge (\neg r \vee \neg s))$. Slovně tedy „Bude pěkné počasí, nepokazí se nám auto a nepojedeme na pláž a nebudeme se koupat“. Pokud uděláme ještě jednu transformaci: $((p \wedge \neg q) \wedge (r \rightarrow \neg s))$, tak „Bude pěkné počasí, nepokazí se nám auto a jestliže pojedeme na pláž, tak se nebudeme koupat“.

9) Příslušná formule: $p \rightarrow (q \vee r)$; ekvivalence k její negaci: $\neg(p \rightarrow (q \vee r)) \leftrightarrow (p \wedge \neg(q \vee r)) \leftrightarrow (p \wedge (\neg q \wedge \neg r))$. Slovně tedy „Budu se pilně učit a neuspěji u zkoušky a nebudu mít smůlu“.

10) Příslušná formule: $p \leftarrow (q \vee r)$, tj. $(q \vee r) \rightarrow p$; ekvivalence k její negaci: $\neg((q \vee r) \rightarrow p) \leftrightarrow ((q \vee r) \wedge \neg p)$. Slovně tedy „Budu se pilně učit nebo budu mít štěstí a zkoušku neudělám“.

11) Daný výrok zapíšeme formulí $(p \wedge q) \rightarrow (r \wedge s)$. Poté provedeme její negaci a převedeme ji pomocí ekvivalentních transformací:

$\neg((p \wedge q) \rightarrow (r \wedge s))$

$\leftrightarrow [\ (p \wedge q) \wedge \neg(r \wedge s)\ ]$	převod $\rightarrow$ na $\wedge$
$\leftrightarrow [\ (p \wedge q) \wedge (\neg r \vee \neg s)\ ]$	DM

Stalo se toto: Petr a Jana dostali vyznamenání, avšak nedostali lyže nebo nejeli na hory.

12) Daný výrok zapíšeme formulí $(p \vee q) \rightarrow (\neg r \wedge (s \vee t))$. Poté provedeme její negaci a převedeme ji pomocí ekvivalentních transformací:

$\neg((p \vee q) \rightarrow (\neg r \wedge (s \vee t)))$

$\leftrightarrow [\ (p \vee q) \wedge \neg(\neg r \wedge (s \vee t))\ ]$	převod $\rightarrow$ na $\wedge$
$\leftrightarrow [\ (p \vee q) \wedge (\neg\neg r \vee \neg(s \vee t))\ ]$	DM
$\leftrightarrow [\ (p \vee q) \wedge (r \vee \neg(s \vee t))\ ]$	z. $\neg\neg$
$\leftrightarrow [\ (p \vee q) \wedge (r \vee (\neg s \wedge \neg t))\ ]$	DM

Děje se toto: je vedro nebo mráz a zároveň chodím po venku nebo nejdu do knihovny a nezůstávám doma.

13) Daný výrok zapíšeme formulí $((p\lor\neg q)\lor(\neg r\lor\neg s))$. Provedeme její negaci a převedeme ji pomocí ekvivalentních transformací:

$\neg((p\lor q)\lor(\neg r\lor\neg s))$
$\leftrightarrow [\ \neg(p\lor q)\land\neg(\neg r\lor\neg s)\ ]$ DM
$\leftrightarrow [\ (\neg p\land\neg q)\land\neg(\neg r\lor\neg s)\ ]$ DM
$\leftrightarrow [\ (\neg p\land\neg q)\land\neg(\neg r\lor\neg s)\ ]$ DM
$\leftrightarrow [\ (\neg p\land\neg q)\land(\neg\neg r\land\neg\neg s)\ ]$ DM
$\leftrightarrow [\ (\neg p\land\neg q)\land(r\land s)\ ]$ z. $\neg\neg$

Tedy: „A nezvítězil a B nebyl druhý a zároveň A dokončil závod a B zvítězil". Protože celý výrok má být pravdivý, tak všechny členy konjunkcí musí být pravdivé. Takže zvítězil B (nebyl totiž druhý), A sice závod dokončil, ale nezvítězil.

14) Daný výrok zapíšeme formulí $(p\land q)\lor(r\land\neg s)$. Poté provedeme její negaci a převedeme ji pomocí ekvivalentních transformací:

$\neg((p\land q)\lor(r\land\neg s))$
$\leftrightarrow [\ \neg(p\land q)\land\neg(r\land\neg s)\ ]$ DM
$\leftrightarrow [\ (\neg p\lor\neg q)\land\neg(r\land\neg s)\ ]$ DM
$\leftrightarrow [\ (\neg p\lor\neg q)\land(\neg r\lor\neg\neg s)\ ]$ DM
$\leftrightarrow [\ (\neg p\lor\neg q)\land(\neg r\lor s)\ ]$ z. $\neg\neg$

Tedy: „A nebyl druhý nebo B nezvítězil, a zároveň A nezvítězil nebo B dokončil závod". Konjunkce je pravdivá tehdy, když jsou oba její členy pravdivé. Nyní je třeba zjistit, který z členů disjunkcí je pravdivý; u první disjunkce předpokládejme, že je to levý člen. Tedy to, že A nebyl druhý je pravda (= A zvítězil); následně však nemůže být pravda, že nezvítězil (levý člen druhé disjunkce), takže musí být pravda (druhý člen druhé disjunkce), že B dokončil závod; to však není v rozporu s možnou pravdivostí druhého členu první disjunkce, totiž že B nezvítězil. Zvítězil tedy A.

8.3 Cvičení – negace výroků (výběr z možností)

Určete ten jediný výrok z níže uvedených možností, který je negací daného výroku:

1) Jsem veselý nebo jsem zasněný.

i) Nejsem veselý nebo jsem zasněný.
ii) Nejsem veselý a nejsem zasněný.
iii) Jsem veselý a jsem zasněný.

iv) Jestliže jsem veselý, jsem zasněný.
v) Jestliže nejsem veselý, nejsem zasněný.

2) Jestliže si hraješ, nezlobíš.

i) Nehraješ si nebo zlobíš.
ii) Nehraješ si a zlobíš.
iii) Jestliže si nehraješ, tak zlobíš.
iv) Hraješ si a zlobíš.
v) Hraješ si nebo nezlobíš.

3) Není zamračeno nebo neprší.

i) Je zamračeno a neprší.
ii) Je zamračeno a prší.
iii) Jestliže je zamračeno, pak prší.
iv) Jestliže je zamračeno, pak neprší.
v) Není zamračeno nebo prší.

4) Jestliže se netopí, je zima.

i) Jestliže se topí, není zima.
ii) Topí se a není zima.
iii) Topí se nebo není zima.
iv) Topí se, jestliže není zima.
v) Netopí se a není zima.

5) Nebude-li pršet, nezmokneme.

i) Bude-li pršet, zmokneme.
ii) Bude-li pršet, nezmokneme.
iii) Nebude pršet a zmokneme.
iv) Nebude pršet a nezmokneme.
v) Nebude pršet nebo zmokneme.

6) Automat vrací drobné nebo není funkční.

i) Jestliže automat nevrací drobné, není funkční.
ii) Automat vrací drobné a je funkční.
iii) Automat nevrací drobné nebo je funkční.
iv) Automat nevrací drobné a je funkční.

v) Jestliže automat vrací drobné, je funkční.

7) Jestliže máš dovolenou, tak odpočíváš.

i) Jestliže nemáš dovolenou, tak neodpočíváš.
ii) Nemáš dovolenou a neodpočíváš.
iii) Máš dovolenou a neodpočíváš.
iv) Nemáš dovolenou nebo neodpočíváš.
v) Odpočíváš a máš dovolenou.

8) Je sucho nebo nesbírám houby.

i) Je sucho a sbírám houby.
ii) Není sucho nebo sbírám houby.
iii) Jestliže není sucho, tak nesbírám houby.
iv) Není sucho a sbírám houby.
v) Jestliže není sucho, tak sbírám houby.

9) Není-li pěkné počasí, nepůjdeme na pláž.

i) Je-li pěkné počasí, půjdeme na pláž.
ii) Je-li pěkné počasí, nepůjdeme na pláž.
iii) Není pěkné počasí a půjdeme na pláž.
iv) Není pěkné počasí a nepůjdeme na pláž.
v) Není pěkné počasí nebo půjdeme na pláž.

10) Není škaredě a jsem na návštěvě.

i) Je škaredě a nejsem na návštěvě.
ii) Jestliže je škaredě, tak nejsem na návštěvě.
iii) Jestliže není škaredě, tak jsem na návštěvě.
iv) Není škaredě nebo jsem na návštěvě.
v) Je škaredě nebo nejsem na návštěvě.

Vyberte z níže uvedených možností všechny ty věty, které jsou ekvivalentní negaci věty dané:

11) Auto koupím, pokud nekoupím kolo.

i) Nekoupím kolo nebo nekoupím auto.
ii) Není pravda, že koupím kolo nebo auto.

iii) Nekoupím kolo a nekoupím auto.
iv) Nekoupím auto a nekoupím kolo.
v) Jestliže nekoupím pivo, tak koupím auto.

12) Neumím zpívat, ale umím hrát na klavír.

i) Neumím hrát na klavír, protože umím zpívat.
ii) Umím zpívat nebo neumím hrát na klavír.
iii) Není pravda, že neumím zpívat, avšak umím hrát na klavír.
iv) Umím-li hrát na klavír, tak umím zpívat.
v) Neumím-li zpívat, tak neumím hrát na klavír.

13) Pokud nebereš úplatky, jsi slušný člověk.

i) Jsi slušný člověk a bereš úplatky.
ii) Pokud jsi slušný člověk, tak nebereš úplatky.
iii) Nebereš úplatky a nejsi slušný člověk.
iv) Není pravda, že bereš úplatky nebo jsi slušný člověk.
v) Není pravda, že pokud nejsi slušný člověk, tak bereš úplatky.

14) Kočka leze dírou, pes oknem.

i) Kočka neleze dírou nebo pes neleze oknem.
ii) Kočka neleze dírou nebo pes leze oknem.
iii) Jestliže kočka leze dírou, pes neleze oknem.
iv) Jestliže kočka leze dírou, pes leze oknem.
v) Jestliže pes leze dírou, kočka neleze oknem.

15) Nebudeme-li pracovat, nevyděláme si.

i) Nebudeme pracovat a nevyděláme si.
ii) Budeme-li pracovat, vyděláme si.
iii) Budeme-li pracovat, nevyděláme si.
iv) Nebudeme pracovat a vyděláme si.
v) Není pravda, že budeme pracovat nebo si nevyděláme.

Určete tu jedinou větu z níže uvedených možností, která je negací věty dané:

16) Jestliže Albert není výpravčí, tak Bedřich je strojvůdce nebo Cyril není průvodčí.

i) Albert není výpravčí, Bedřich není strojvůdce a Cyril není průvodčí.
ii) Albert není výpravčí, Bedřich není strojvůdce a Cyril je průvodčí.
iii) Albert není výpravčí, Bedřich je strojvůdce a Cyril není průvodčí.
iv) Albert je výpravčí, Bedřich není strojvůdce a Cyril je průvodčí.
v) Albert je výpravčí, Bedřich je strojvůdce a Cyril není průvodčí.

17) Jestliže Julie není letuška, tak Karin je průvodkyně nebo Linda není hosteska.

i) Julie není letuška, Karin není průvodkyně a Linda není hosteska.
ii) Julie není letuška, Karin je průvodkyně a Linda není hosteska.
iii) Julie není letuška, Karin není průvodkyně a Linda je hosteska.
iv) Julie je letuška, Karin není průvodkyně a Linda je hosteska.
v) Julie je letuška, Karin je průvodkyně a Linda není hosteska.

18) Jestliže Prokop je traktorista, tak Radim není bagrista nebo Stanislav je jeřábník.

i) Prokop je traktorista, Radim není bagrista a Stanislav není jeřábník.
ii) Prokop není traktorista, Radim není bagrista a Stanislav je jeřábník.
iii) Prokop není traktorista, Radim je bagrista a Stanislav není jeřábník.
iv) Prokop je traktorista, Radim není bagrista a Stanislav je jeřábník.
v) Prokop je traktorista, Radim je bagrista a Stanislav není jeřábník.

19) Jestliže Matylda je kadeřnice, tak Natálie je pedikérka nebo Otýlie není manikérka.

i) Matylda je kadeřnice, Natálie není pedikérka a Otýlie není manikérka.
ii) Matylda není kadeřnice, Natálie není pedikérka a Otýlie je manikérka.
iii) Matylda není kadeřnice, Natálie je pedikérka a Otýlie není manikérka.
iv) Matylda je kadeřnice, Natálie není pedikérka a Otýlie je manikérka.
v) Matylda je kadeřnice, Natálie je pedikérka a Otýlie není manikérka.

Určete z nabízených možností správné tvrzení (negaci věty), jak je uvedeno v zadání:

20) Vědecký výzkum započali nezávisle dva renomovaní vědci téhož výzkumného ústavu. Předpověď ředitele ústavu zněla: „Buď A bude druhý a B první, nebo A bude první a B výzkum nedokončí“. Předpověď se nesplnila. Jak přesně dopadl výzkum, když víme, že A výzkum dokončil?

i) A i B dokončili výzkum společně.
ii) Zvítězil A a B výzkum nedokončil.
iii) A zvítězil a B byl druhý.
iv) Zvítězil B a A byl druhý.
v) Nelze jednoznačně rozhodnout.

21) Do konkurzu na návrhu designu firemního loga se přihlásili mezi jinými dva zkušení grafikové. Předpověď vedoucího konkurzu zněla: „A zvítězí nebo B nezvítězí, a nebo A nedokončí návrh nebo B nebude druhý“. Předpověď se nesplnila. Jak přesně dopadl konkurz?

i) Zvítězil A a B nedokončil návrh.
ii) A byl druhý a B byl první nebo nedokončil návrh.
iii) Zvítězil B, A byl druhý.
iv) A zvítězil a B byl druhý.
v) Nelze jednoznačně rozhodnout.

22) Dvě konkurenční firmy začaly nezávisle pracovat na vývoji nového výrobku, šlo o to, kdo ho dodá na trh dříve. Předpověď ekonoma zněla: „A bude první a B bude druhý, nebo A nedokončí vývoj a B bude první“. Předpověď se nesplnila. Jak přesně dopadl vývoj?

i) B byl první a A byl druhý.
ii) B byl první a A nedokončil vývoj.
iii) A byl první a B byl druhý.
iv) A byl první a B nedokončil vývoj.
v) Nelze jednoznačně rozhodnout.

23) V jezdecké stáji formule 1 manažer prohlásil: „Dojedou-li A a B do cíle, dostanou nové auto a pojedou na dovolenou“. Ukázalo se, že tento výrok neplatí. Co se vlastně stalo?

i) A a B dojeli do cíle, dostali nové auto a jeli na dovolenou.
ii) A a B dojeli do cíle, avšak nedostali nové auto nebo nejeli na dovolenou.
iii) A a B nedojeli do cíle, avšak nedostali nové auto nebo nejeli na dovolenou.
iv) A a B nedojeli do cíle, avšak dostali nové auto nebo jeli na dovolenou.
v) Nelze jednoznačně rozhodnout.

8.3 Řešení – negace výroků (výběr z možností)

1) Příslušná formule: $p \lor q$; její negace: $\neg(p \lor q)$. Formule ekvivalentní negované formuli: $\neg p \land \neg q$; slovně tedy ii), „Nejsem veselý a nejsem zasněný“.

2) Příslušná formule: $p \rightarrow \neg q$; její negace: $\neg(p \rightarrow \neg q)$. Formule ekvivalentní negované formuli: $p \land \neg\neg q$, pak $p \land q$; slovně tedy iv), „Hraješ si a zlobíš“.

3) Příslušná formule: $\neg p \lor \neg q$; její negace: $\neg(\neg p \lor \neg q)$. Formule ekvivalentní negované formuli: $\neg\neg p \land \neg\neg q$, pak $p \land q$; slovně tedy ii), „Je zamračeno a prší“.

4) Příslušná formule: $\neg p \rightarrow q$; její negace: $\neg(\neg p \rightarrow q)$. Formule ekvivalentní negované formuli: $\neg p \land \neg q$; slovně tedy v), „Netopí se a není zima“.

5) Příslušná formule: $\neg p \rightarrow \neg q$; její negace: $\neg(\neg p \rightarrow \neg q)$. Formule ekvivalentní negované formuli: $\neg p \land \neg\neg q$, pak $\neg p \land q$; slovně tedy iii), „Nebude pršet a zmokneme“.

6) Správnou odpovědí je iv), „Automat nevrací drobné a je funkční“.

7) Správnou odpovědí je iii), „Máš dovolenou a neodpočíváš“.

8) Správnou odpovědí je iv), „Není sucho a sbírám houby“.

9) Správnou odpovědí je iii), „Není pěkné počasí a půjdeme na pláž“.

10) Správnou odpovědí je v), „Je škaredě nebo nejsem na návštěvě“.

11) Příslušná formule: $p \leftarrow \neg q$, tj. $\neg q \rightarrow p$. Formule ekvivalentní negované formuli:
ii), protože $\neg(\neg q \rightarrow p) \leftrightarrow \neg(q \lor p)$;
iii), protože $\neg(\neg q \rightarrow p) \leftrightarrow (\neg q \land \neg p)$;
iv), protože $\neg(\neg q \rightarrow p) \leftrightarrow (\neg q \land \neg p) \leftrightarrow (\neg p \land \neg q)$.

12) Příslušná formule: $\neg p \land q$. Formule ekvivalentní negované formuli:
ii), protože $\neg(\neg p \land q) \leftrightarrow (\neg\neg p \lor \neg q) \leftrightarrow (p \lor \neg q)$;
iii), protože $\neg(\neg p \land q)$;
iv), protože $\neg(\neg p \land q) \leftrightarrow (\neg\neg p \lor \neg q) \leftrightarrow (p \lor \neg q) \leftrightarrow (\neg q \lor p) \leftrightarrow (q \rightarrow p)$;
v), protože $\neg(\neg p \land q) \leftrightarrow (\neg\neg p \lor \neg q) \leftrightarrow (p \lor \neg q) \leftrightarrow (\neg q \lor p) \leftrightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$.

13) Příslušná formule: $\neg p \rightarrow q$. Formule ekvivalentní negované formuli:
iii), protože: $\neg(\neg p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$;
iv), protože: $\neg(\neg p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \leftrightarrow \neg(p \vee q)$;
v), protože: $\neg(\neg p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg(\neg q \rightarrow \neg\neg p) \leftrightarrow \neg(\neg q \rightarrow p)$.

14) Příslušná formule: $p \wedge q$. Formule ekvivalentní negované formuli:
i), protože $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$;
iii), protože $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \leftrightarrow (\neg\neg p \rightarrow \neg q) \leftrightarrow (p \rightarrow \neg q)$;
v), protože $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \leftrightarrow (\neg\neg p \rightarrow \neg q) \leftrightarrow (p \rightarrow \neg q) \leftrightarrow (\neg\neg q \rightarrow \neg p) \leftrightarrow (q \rightarrow \neg p)$.

15) Příslušná formule: $\neg p \rightarrow \neg q$. Formule ekvivalentní negované formuli:
iv), protože $\neg(\neg p \rightarrow \neg q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg\neg q) \leftrightarrow (\neg p \wedge q)$;
v), protože $\neg(\neg p \rightarrow \neg q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg\neg q) \leftrightarrow (\neg p \wedge q) \leftrightarrow \neg(\neg\neg p \vee \neg q) \leftrightarrow \neg(p \vee \neg q)$.

16) Správně je ii): „Albert není výpravčí, Bedřich není strojvůdce a Cyril je průvodčí“.

17) Správně je iii): „Julie není letuška, Karin není průvodkyně a Linda je hosteska“.

18) Správně je v): „Prokop je traktorista, Radim je bagrista a Stanislav není jeřábník“.

19) Správně je iv): „Matylda je kadeřnice, Natálie není pedikérka a Otýlie je manikérka“.

20) Správně je iii): „A zvítězil a B byl druhý“.

21) Správně je ii): „A byl druhý a B byl první nebo nedokončil návrh“.

22) Správně je v): „Nelze jednoznačně rozhodnout“.

23) Správně je ii): „A a B dojeli do cíle, avšak nedostali nové auto nebo nejeli na dovolenou“.

9. Úplná disjunktivní / konjunktivní normální forma a její minimalizace

Výše jsme již zmínili, že adekvátně bohatý jazyk VL si vystačí jen s několika výrokovými spojkami. Bohatý je v tom smyslu, že dokáže vyjádřit všechny pravdivostní funkce, což také znamená, že je do něj přeložitelná formule libovolného jiného jazyka VL. Nyní budeme uvažovat jazyk VL, který bude využívat výlučně množinu spojek $\{\neg,\wedge,\vee\}$ (níže uvedeme jejich jinou symbolickou reprezentaci).

Jeden z důvodů pro přednostní práci s tímto jazykem můžeme najít v následující úvaze. Každý stav světa se dá popsat souborem elementárních výroků, například je tu stav (miniaturního) světa, jenž je popsatelný pomocí konjunkce výroků „Alík je pes“ a „Kvido má auto“; jiný stav téhož světa je zas popsatelný konjunkcí výroků „Alík je pes“ a „Kvido nemá auto“. Všechny stavy tohoto našeho světa jsou tedy vyjádřitelné disjunkcí, jejímiž čtyřmi členy jsou ony jednotlivé konjunkce.

Nyní uvažme jeden z mnoha výroků, s jakými se můžeme setkat, totiž „Jestliže Alík je pes, tak Kvido má auto“. V kterých stavech světa je tento výrok pravdivý? To vidíme z tabulky ukazující průběh jeho pravdivostních hodnot:

Jestliže Alík je pes, tak Kvido má auto.		
Alík je pes.		Kvido má auto.
1	*1*	1
1	*0*	0
0	*1*	1
0	*1*	0

Z tabulky však rovněž vidíme, že to, co daný výrok říká, se dá ekvivalentně vyjádřit výrokem „(Alík je pes a Kvido má auto) nebo (Alík není pes a Kvido má auto) nebo (Alík není pes a Kvido nemá auto)“, protože toto souvětí vyjadřuje soubor všech těch možných dílčích stavů světa, v nichž je pravdivý výrok „Jestliže Alík je pes, tak Kvido má auto“. Takovéto vyjádření má tedy výhodu v tom, že názorně vystihuje, jak vypadají příslušné stavy světa, a tedy je v principu snáze verifikovatelné, než třeba „Jestliže Alík je pes, tak Kvido má auto“. Všimněme si, že odpovídající konjunkce $(p\wedge q)$, $(\neg p\wedge q)$ a $(\neg p\wedge\neg q)$ (mezi tyto konjunkce pak vsuneme $\vee$) korespondují s těmi řádky, kdy je ve sloupci funkčních hodnot uvedena pravdivostní hodnota 1. Níže si ukážeme, že k výsledné formuli $((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q))$ se můžeme dobrat i jiným způsobem, totiž ekvivalentními transformacemi $(p \to q)$.

Mnohokrát byl užitečně využit další důvod pro zkoumání problematiky této kapitoly. Uvažme navrhovatele nějakého elektrotechnického zařízení, jež využívá logické obvody. Navrhovatel určil, že obvod tohoto zařízení má tři vstupy p, q, r, přičemž předepsal, jaké pravdivostní hodnoty se mají objevit na výstupu f, pakliže jsou na vstupech ty, či jiné hodnoty. Navrhovatel tedy ví, jak se má daný systém chovat, ví, které funkční hodnoty odpovídají kterým argumentům. Je to například:

p	q	r	$f(p,q,r)$
1	1	1	*1*
1	1	0	*1*
1	0	1	*0*
1	0	0	*0*
0	1	1	*1*
0	1	0	*1*
0	0	1	*1*
0	0	0	*0*

Zhotovitel příslušného logického obvodu musí k této tabulce funkce sestavit formuli, která má právě takovýto průběh pravdivostních hodnot. Teoreticky existuje nekonečně mnoho takových formulí, my potřebujeme alespoň jednu z nich. Výše jsme přitom už naznačili jednoduchý způsob zjištění takové formule: je to formule tvaru disjunkce, jejímiž členy jsou konjunkce odpovídající těm řádkům, v nichž daná funkce f vrací hodnotu 1. Tj. $(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$.

Při výrobě zařízení implementujících logické obvody pochopitelně chceme daná zařízení a tedy i obvody zjednodušit a zmenšit, ať už z důvodů nákladů na výrobu, objemnost či provozní rychlost. Níže si ukážeme určitý postup, jak například právě uváděnou formuli převést na jí ekvivalentní, avšak podstatně kratší formuli $q \vee (\neg p \wedge r)$.

9.1 Úplná disjunktivní (konjunktivní) normální forma

Následující *Věta o reprezentaci* jednoduše říká, že všechny formule VL mohou být převedeny na ekvivalentní formule obsahující pouze výrokové spojky $\neg$, $\wedge$, $\vee$. Analogon této věty platí pro libovolnou jinou funkčně úplnou množinu výrokových spojek. Znamená to, že množinu všech formulí zobrazujeme na její podmnožinu, jejíž prvky obsahují jen $\neg$, $\wedge$, $\vee$ a proměnné, což je výhodné, pokud chceme formule porovnávat, neboť takto jsme získali jejich standardizované tvary.

Věta o reprezentaci

Každou pravdivostní n-ární funkci f^n lze reprezentovat formulí, která obsahuje pouze spojky $\neg$, $\wedge$, $\vee$.

Ukážeme si, že formule lze reprezentovat i formulemi v jejich tzv. úplné disjunktivní nebo naopak konjunktivní normální formě. Disjunktivní a konjunktivní formy jsou k sobě duální. Disjunktivní formy syntakticky ‚popisují' model dané formule, jak jsme si vysvětlili na úvodním příkladu. Konjunktivní formy jsou zas výhodnější pro určité počítačové využití (například pro databázové dotazování). K jejich ukázání potřebujeme několik pomocných pojmů.

Literál

Literálem je libovolná atomická formule nebo negace atomické formule.

Příklady literálů jsou p, q, $\neg p$, $\neg q$; literály nejsou třeba $p \rightarrow q$ či $p \vee \neg p$ nebo $p \vee$.

Elementární konjunkce

Formule A je *elementární konjunkcí* nad $p_1, p_2, ..., p_n$ právě tehdy, když je libovolnou konjunkcí literálů z formulí $p_1, p_2, ..., p_n$, přičemž se v této elementární konjunkci vyskytují jakožto literál právě jednou.

Příkladem elementární konjunkce je $p_1 \wedge \neg p_2$, ovšem třeba $p_1 \wedge \neg p_1$ nikoli.

Zcela analogicky: Formule A je *elementární disjunkcí* nad $p_1, p_2, ..., p_n$ právě tehdy, když je libovolnou disjunkcí literálů z formulí $p_1, p_2, ..., p_n$, přičemž se v této elementární disjunkci vyskytují jakožto literál právě jednou.

Elementární konjunkce jsou někdy nazývány *mintermy*, elementární disjunkce pak *maxtermy*. V případě disjunkcí se také hovoří o *klauzulích* (tzv. *Hornova klauzule* je pak klauzule, jež obsahuje alespoň jeden nenegovaný literál).

Disjunktivní normální forma

Formule A je v *disjunktivní normální formě* nad formulemi $p_1, p_2, ..., p_n$ právě tehdy, když A je disjunkcí elementárních konjunkcí literálů z formulí $p_1, p_2, ..., p_n$.

Příklady formulí v disjunktivní normální formě jsou $(p_1 \wedge \neg p_2) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2)$ či $(p_1 \wedge \neg p_2) \vee \neg p_1$.

Zcela analogicky: Formule A je v *konjunktivní normální formě* nad atomickými formulemi $p_1, p_2, ..., p_n$ právě tehdy, když A je konjunkcí elementárních disjunkcí literálů z formulí $p_1, p_2, ..., p_n$.

V anglickém jazykovém prostředí, ale i u nás se pro disjunktivní i konjunktivní formu používají zkratky *DNF* a *CNF* (v tomto pořadí).

Úplná disjunktivní normální forma (ÚDNF)

Formule B je *úplnou disjunktivní normální formou* (ÚDNF) formule A právě tehdy, když B je ekvivalentní A, přičemž B je disjunkcí elementárních konjunkcí literálů z A, přičemž v každém jejím disjunktu se vyskytují všechny literály A právě jednou.

Pro příklad, $(p_1 \wedge \neg p_2) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2)$ je ÚDNF nějaké formule obsahující p_1 a p_2. Na druhou stranu, $(p_1 \wedge \neg p_2) \vee \neg p_1$ není ÚDNF, poněvadž $\neg p_1$ by měla být konjunkcí s p_2 či $\neg p_2$, ale tyto v ní chybí.

Formule B je úplnou konjunktivní normální formou (ÚKNF) formule A právě tehdy, když B je ekvivalentní A, přičemž B je konjunkcí elementárních disjunkcí literálů z A, přičemž v každém jejím disjunktu se vyskytují všechny literály A právě jednou.

Nyní jsme připraveni formulovat *Větu o reprezentaci formulí pomocí ÚDNF* (resp. ÚKNF) (mnoho autorů se omezuje na slabší větu využívající pouze DNF, resp. KNF).

Věta o reprezentaci pomocí ÚDNF (ÚKNF)

Ke každé formuli A, která není kontradikcí (tautologií), lze najít formuli B, která je ve tvaru ÚDNF (ÚKNF) a je ekvivalentní s A.

Uvědomme si, že ÚDNF nelze zkonstruovat pro kontradikce a ÚKNF zase nelze zkonstruovat pro tautologie.

9.2 Příklady – sestavení ÚDNF (ÚKNF)

Formule VL můžeme převádět na korespondující ÚDNF (či ÚKNF) pomocí ekvivalentních transformací, přičemž uplatňujeme zákony-tautologie VL. Pro ilustraci si ukážeme převod formule $p\rightarrow(q\rightarrow p)$ na ÚDNF:

	$p\rightarrow(q\rightarrow p)$	
$\leftrightarrow$	$[\ p\rightarrow(\neg q\vee p)\ ]$	převod $\rightarrow$ na $\vee$
$\leftrightarrow$	$[\ \neg p\vee(\neg q\vee p)\ ]$	převod $\rightarrow$ na $\vee$
$\leftrightarrow$	$[\neg p\vee\neg q\vee p\ ]$	vnitřní závorky možno vynechat (asociativita $\vee$)
$\leftrightarrow$	$[\ (\neg p\wedge(q\vee\neg q))\vee\neg q\vee p)\ ]$	
		neutrálnost tautologie ke $\wedge$: $\neg p\leftrightarrow(\neg p\wedge(q\vee\neg q))$
$\leftrightarrow$	$[\ (\neg p\wedge(q\vee\neg q))\vee(\neg q\wedge(p\vee\neg p))\vee p\ ]$	
		neutrálnost tautologie ke $\wedge$: $\neg q\leftrightarrow(\neg q\wedge(q\vee\neg q))$
$\leftrightarrow$	$[\ (\neg p\wedge(q\vee\neg q))\vee(\neg q\wedge(p\vee\neg p))\vee(p\wedge(q\vee\neg q))\ ]$	
		neutrálnost tautologie ke $\wedge$: $p\leftrightarrow(p\wedge(q\vee\neg q)$
$\leftrightarrow$	$[\ ((\neg p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q))\vee((\neg q\wedge p)\vee(\neg q\wedge\neg p))\vee((p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q))\ ]$	
		zákon distributivity pro $\wedge$: $(p\wedge(q\vee r))\leftrightarrow((p\wedge q)\vee(p\wedge r))$
$\leftrightarrow$	$[\ ((\neg p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q))\vee((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge\neg q))\vee((p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q))\ ]$	
		zákon komutativity $\vee$
$\leftrightarrow$	$[\ (\neg p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q)\vee(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge\neg q)\vee(p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)\ ]$	
		eliminace závorek (na základě asociativity $\vee$)
$\leftrightarrow$	$[\ (\neg p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q)\vee(p\wedge\neg q)\vee(p\wedge q)\ ]$	
		zákon idempotence $\wedge$: $(p\wedge p)\leftrightarrow p$
$\leftrightarrow$	$[\ (p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q)\ ]$	
		zákon komutativity $\vee$

Podstatně jednodušší metodou pro získání ÚDNF než pomocí ekvivalentních transformací je postup, při němž z tabulky průběhu pravdivostních hodnot dané formule vyčteme ty řádky, kdy je daná formule pravdivá, a těm přiřadíme elementární konjunkci všech výrokových proměnných; v případě, že má v tomto řádku některá z proměnných přisouzenu pravdivostní hodnotu 0, před danou výrokovou proměnnou dáme negátor; všechny získané elementární konjunkce pak seřadíme do formule, v níž je spojíme pomocí disjunkce. Obdobně postupujeme v případě sestavování ÚKNF, ovšem tehdy přiřazujeme elementární disjunkce jen těm řádkům, kdy má celá formule přiřazenu pravdivostní hodnotu nepravda.

Při zápisu ÚDNF (ÚKNF) se uplatňuje notační konvence, podle níž se znak konjunkce (disjunkce) mezi literály elementárních konjunkcí (disjunkcí) vynechává. Dále, negace se vyznačuje čarou nad symbolem výrokové promënné; což zde z důvodu typografického omezení realizujeme jako podtržení znaku výrokové proměnné.

1) Sestavte ÚDNF k formuli $p \rightarrow q$.

p	$\rightarrow$	q	elementární konjunkce	
1	*1*	1	$p \wedge q$	tedy pq
1	*0*	0	-	
0	*1*	1	$\neg p \wedge q$	tedy $\underline{p}q$
0	*1*	0	$\neg p \wedge \neg q$	tedy $\underline{p}\underline{q}$

ÚDNF k dané formuli je tedy $pq \vee \underline{p}q \vee \underline{p}\underline{q}$.

2) Sestavte ÚKNF k formuli $p \leftrightarrow q$.

p	$\leftrightarrow$	q	elementární disjunkce	
1	*1*	1	-	
1	*0*	0	$p \vee \neg q$	tedy $p\underline{q}$
0	*0*	1	$\neg p \vee q$	tedy $\underline{p}q$
0	*1*	0	-	

ÚKNF k dané formuli je tedy $p\underline{q} \wedge \underline{p}q$.

3) Sestavte ÚDNF k formuli $(p \rightarrow (q \wedge \neg q)) \rightarrow \neg p$.

$(p$	$\rightarrow$	$(q$	$\wedge$	$\neg$	$q))$	$\rightarrow$	$\neg$	p	elementární konjunkce	
1	0	1	0	0	1	*1*	0	1	$p \wedge q$	tedy pq
1	0	0	0	1	0	*1*	0	1	$p \wedge \neg q$	tedy $p\underline{q}$
0	1	1	0	0	1	*1*	1	0	$\neg p \wedge q$	tedy $\underline{p}q$
0	1	0	0	1	0	*1*	1	0	$\neg p \wedge \neg q$	tedy $\underline{p}\underline{q}$

ÚDNF k dané formuli je tedy $pq \vee p\underline{q} \vee \underline{p}q \vee \underline{p}\underline{q}$ (mj. k ní nelze sestavit ÚKNF).

9.3 Minimalizace ÚDNF (ÚKNF)

Při minimalizaci ÚDNF se uplatňuje následující tautologie. Nechť l je nějaký literál a A je nějaká formule (pokud literál je tvaru $\neg B$, tak pod $\neg l$ myslíme díky zákonu dvojité negace B, nikoli $\neg\neg B$):

$$((A \wedge l) \vee (A \wedge \neg l)) \leftrightarrow A$$

Pravou stranu této tautologie si můžeme odvodit z levé formule uplatněním zákona distributivity na $(A \vee (l \wedge \neg l))$ a pak uplatněním zákona neutrálnosti kontradikce k disjunkci.

Zde je ještě zkrácený zápis této tautologie uplatněním výše uváděné konvence o vypouštění konjunkce a alternativního označení negace:

$$(Al \vee A\underline{l}) \leftrightarrow A$$

Všimněme si, že redukci (směr implikace doprava), resp. expanzi (směr implikace doleva) lze uplatnit jen tehdy, pokud se podformule tvaru konjunkce liší pouze jedním literálem. Dále upozorňujeme, že uváděný zákon můžeme uplatnit i tehdy, když jsou členy elementárních konjunkcí na jiných stranách. To proto, že můžeme uplatnit komutativitu konjunkce, jakou ukazujme v prostřední formuli: $((A \wedge l) \vee (\underline{l} \wedge A)) \leftrightarrow ((A \wedge l) \vee (A \wedge \underline{l})) \leftrightarrow A$. Speciálním případem tohoto je výskyt literálu jakoby uprostřed podformule A, což je opět řešitelné komutativitou konjunkce, např. $((pqr) \vee (p\underline{q}r)) \leftrightarrow ((prq) \vee (pr\underline{q})) \leftrightarrow pr$. Konečně při minimalizaci ÚKNF se uplatňuje obměna této tautologie, totiž:

$$(Al \wedge A\underline{l}) \leftrightarrow A$$

Jak uvidíme v příkladech níže, naše ÚDNF (ÚKNF) můžeme dále upravovat pomocí zákona idempotence disjunkce (konjunkce), popř. pomocí zákonů o agresivnosti / neutrálnosti tautologie / kontradikce vzhledem k disjunkci / konjunkci.

Minimalizační algoritmus

ÚDNF (ÚKNF) lze značně zjednodušit *Quine-McCluskeyho minimalizačním* (optimalizačním) *algoritmem*. Alternativní metoda využívá tzv. *Karnaughovy mapy*, které zde probírat nebudeme. Quine-McCluskeyho minimalizační algoritmus je mechanizovatelný postup, pomocí něhož lze ÚDNF (ÚKNF) maximálně zjednodušit, aniž by došlo k změně průběhu pravdivostních hodnot, zachovává tedy ekvivalenci.

Níže budeme uplatňovat pouze hlavní část tohoto algoritmu. Pro ilustraci minimalizujeme $pqr \vee \underline{p}qr \vee \underline{p}q\underline{r} \vee \underline{pq}r \vee \underline{pqr}$.

a) Elementární konjunkce dané ÚDNF si očíslujeme:

$$\underset{1}{pqr} \vee \underset{2}{\underline{p}qr} \vee \underset{3}{\underline{p}q\underline{r}} \vee \underset{4}{\underline{pq}r} \vee \underset{5}{\underline{pqr}}$$

b) Poté porovnáme elementární konjunkci 1. s 2. a můžeme-li je zkrátit podle tautologie $(Al \vee A\underline{l}) \leftrightarrow A$, tak výsledek zkrácení přepíšeme do dalšího řádku a nadepíšeme zkrácením čeho vznikl a přidáme pak disjunkci (formule po stranách $\leftrightarrow$ považujme za uzávorkované):

$$\leftrightarrow \quad \overset{1\text{-}2}{qr} \vee$$

Také si zapamatujeme, že elementární konjunkce 1. a 2. byly zkráceny (to můžeme indikovat v řádku, který krátíme, např. přeškrtnutím obou elementárních konjunkcí, níže ovšem uvedeme jiný postup). Poté porovnáme 1. s 3. a pokud je lze zkrátit, zkrátíme je. Ať už 1. s 3. zkrátíme či nikoli, stejně pokračujeme dále a 1. porovnáváme s 4. a pokud je lze zkrátit, zkrátíme je. Poté porovnáváme 1. s 5. Analogicky se pokoušíme zkrátit 2. s každou ji následující elementární konjunkcí, pak 3. s každou ji následující elementární konjunkcí, nakonec 4. s každou ji následující elementární konjunkcí. Výsledek, kdy se nám podařilo všechny formule krátit – některé byly kráceny vícekrát, například 2. – je:

$$\leftrightarrow \quad \overset{1\text{-}2}{qr} \vee \overset{2\text{-}3}{\underline{p}q} \vee \overset{2\text{-}4}{\underline{p}r} \vee \overset{3\text{-}5}{\underline{pr}} \vee \overset{4\text{-}5}{\underline{pq}}$$

Nyní zkontrolujeme, zda řetězec $_{1\text{-}2\ \ 2\text{-}3\ \ 2\text{-}4\ \ 3\text{-}5\ \ 4\text{-}5}$ obsahuje čísla všech elementárních konjunkcí z předchozího řádku. Pokud některé číslo chybí, příslušnou nezkrácenou elementární konjunkci připojíme do našeho posledního řádku pomocí disjunkce (srov. ukázku níže).

c) Opět si elementární konjunkce očíslujeme:

$$\leftrightarrow \quad \underset{1}{qr} \vee \underset{2}{\underline{p}q} \vee \underset{3}{\underline{p}r} \vee \underset{4}{\underline{pr}} \vee \underset{5}{\underline{pq}}$$

a zkoušíme je krátit podobně jako v b). Formuli, kterou se zkrátit nepodařilo, připíšeme na konec řádku:

$$\leftrightarrow \quad \overset{2\text{-}5}{\underline{p}} \vee \overset{3\text{-}4}{\underline{p}} \vee \overset{1}{qr}$$

d) Nyní můžeme, ale to je již mimo onen algoritmus, nasadit zákon idempotence disjunkce a formuli zkrátit na:

$\leftrightarrow \quad \underline{p} \vee qr$

9.4 Příklady – sestavení a minimalizace ÚDNF

Sestavte ÚDNF k dané formuli a poté proveďte její minimalizaci:

1)

$(p \rightarrow (q \wedge \neg q)) \rightarrow p$ elementární konjunkce

1	0	1	0	0	1	*1*	1	$p \wedge q$	tedy pq
1	0	0	0	1	0	*1*	1	$p \wedge \neg q$	tedy $p\underline{q}$
0	1	1	0	0	1	*0*	0	-	
0	1	0	0	1	0	*0*	0	-	

ÚDNF je $pq \vee p\underline{q}$. Tu minimalizujeme: $pq \vee p\underline{q} \leftrightarrow p$, výsledkem je tedy p.

2)

$((p \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow q$ elementární konjunkce

1	1	1	1	1	*1*	1	$p \wedge q$	tedy pq
1	0	0	1	0	*0*	0	-	
0	1	1	1	1	*1*	1	$\neg p \wedge q$	tedy $\underline{p}q$
0	1	0	0	0	*1*	0	$\neg p \wedge \neg q$	tedy $\underline{p}\underline{q}$

ÚDNF je $pq \vee \underline{p}q \vee \underline{p}\underline{q}$. Tuto ÚDNF minimalizujeme: $pq \vee \underline{p}q \vee \underline{p}\underline{q} \leftrightarrow q \vee \underline{p}$.

3)

$(p \rightarrow (q \rightarrow p)) \rightarrow r$ elementární konjunkce

1	1	1	1	1	1	1	$p \wedge q \wedge r$	tedy pqr
1	1	1	1	1	0	0	-	
1	1	0	1	1	1	1	$p \wedge \neg q \wedge r$	tedy $p\underline{q}r$
1	1	0	1	1	0	0	-	
0	1	1	0	0	1	1	$\neg p \wedge q \wedge r$	tedy $\underline{p}qr$
0	1	1	0	0	0	0	-	
0	1	0	1	0	1	1	$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	tedy $\underline{p}\underline{q}r$
0	1	0	1	0	0	0	-	

ÚDNF je $pqr \vee p\underline{q}r \vee \underline{p}qr \vee \underline{p}\underline{q}r$, kterou minimalizujeme následovně (v zápisu vynecháváme číslování formulí):

$$pqr \vee p\underline{q}r \vee \underline{p}qr \vee \underline{p}\underline{q}r$$

$$\leftrightarrow \quad \overset{1\text{-}2}{pr} \vee \overset{1\text{-}3}{qr} \vee \overset{2\text{-}4}{\underline{q}r} \vee \overset{3\text{-}4}{\underline{p}r}$$

$$\leftrightarrow \quad \overset{1\text{-}4}{r} \vee \overset{2\text{-}3}{r}$$

Po uplatnění zákona idempotence pro disjunkci získáme jen r.

4)

$(p \rightarrow q) \wedge (\neg\ q \rightarrow r)$ elementární konjunkce

1	1	1	1	0	1	1	1	$p \wedge q \wedge r$	tedy pqr
1	1	1	1	0	1	1	0	$p \wedge q \wedge \neg r$	tedy $pq\underline{r}$
1	0	0	0	1	0	1	1	-	
1	0	0	0	1	0	0	0	-	
0	1	1	1	0	1	1	1	$\neg p \wedge q \wedge r$	tedy $\underline{p}qr$
0	1	1	1	0	1	1	0	$\neg p \wedge q \wedge \neg r$	tedy $\underline{p}q\underline{r}$
0	1	0	1	1	0	1	1	$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	tedy $\underline{p}\underline{q}r$
0	1	0	0	1	0	0	0	-	

ÚDNF je $pqr \vee pq\underline{r} \vee \underline{p}qr \vee \underline{p}q\underline{r} \vee \underline{p}\underline{q}r$, kterou minimalizujeme následovně:

$$pqr \vee pq\underline{r} \vee \underline{p}qr \vee \underline{p}q\underline{r} \vee \underline{p}\underline{q}r$$

$$\leftrightarrow \quad \overset{1\text{-}2}{pq} \vee \overset{1\text{-}3}{qr} \vee \overset{2\text{-}4}{q\underline{r}} \vee \overset{3\text{-}4}{\underline{p}q} \vee \overset{3\text{-}5}{\underline{p}r}$$

$\leftrightarrow \quad \overset{1\text{-}4}{q} \vee \overset{2\text{-}3}{q} \vee \overset{5}{\underline{p}r}$

Tedy, po uplatnění zákona idempotence: $q \vee \underline{p}r$.

5) Sestavte ÚDNF k systému, jehož vstupy a výstupy nabývají hodnoty uvedené v tabulce, a poté proveďte její minimalizaci:

p	q	r	výstup	elementární konjunkce
1	1	1	1	$p \wedge q \wedge r$, tedy pqr
1	1	0	1	$p \wedge q \wedge \neg r$, tedy $pq\underline{r}$
1	0	1	1	$p \wedge \neg q \wedge r$, tedy $p\underline{q}r$
1	0	0	1	$p \wedge \neg q \wedge \neg r$, tedy $p\underline{qr}$
0	1	1	1	$\neg p \wedge q \wedge r$, tedy $\underline{p}qr$
0	1	0	0	
0	0	1	1	$\neg p \wedge q \wedge \neg r$, tedy $\underline{pq}r$
0	0	0	0	

ÚDNF je $pqr \vee pq\underline{r} \vee p\underline{q}r \vee p\underline{qr} \vee \underline{p}qr \vee \underline{pq}r$, kterou minimalizujeme:

$\quad pqr \vee pq\underline{r} \vee p\underline{q}r \vee p\underline{qr} \vee \underline{p}qr \vee \underline{pq}r$

$\leftrightarrow \quad pq \vee pr \vee qr \vee p\underline{r} \vee p\underline{q} \vee \underline{q}r \vee \underline{p}r$

$\leftrightarrow \quad p \vee r \vee r \vee r$

po uplatnění zákona idempotence pak: $p \vee r$.

6) Sestavte ÚKNF k systému, jehož vstupy a výstupy nabývají hodnoty uvedené v tabulce, a poté proveďte její minimalizaci podle tautologie-zákona $(Al \wedge A\underline{l}) \leftrightarrow A$:

p	q	r	výstup	elementární disjunkce
1	1	1	1	
1	1	0	1	
1	0	1	1	
1	0	0	1	
0	1	1	0	$\neg p \vee q \vee r$, tedy $\underline{p}qr$
0	1	0	0	$\neg p \vee q \vee \neg r$, tedy $\underline{p}q\underline{r}$
0	0	1	1	
0	0	0	1	

ÚKNF je $\underline{p}qr \wedge \underline{p}q\underline{r}$, kterou minimalizujeme: $\underline{p}qr \wedge \underline{p}q\underline{r} \leftrightarrow \underline{p}q$.
7) Transformujte formuli $(p \rightarrow q)$ tak, abyste poté mohli sestavit její ÚDNF.
Nejprve provedeme ekvivalentní transformaci:

$$\begin{array}{lll} & (p \rightarrow q) & \\ \leftrightarrow & (\neg p \vee q) & \text{podle tautologie } (A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B) \end{array}$$

Opakovaně provádíme opak minimalizace podle tautologie $A \leftrightarrow (Al \vee A\underline{l})$. Uplatňujeme při tom také zákon komutativity, abychom získali co nejpodobnější disjunkty (viz užití $pq \vee \underline{p}q$ namísto $qp \vee q\underline{p}$):

$$\begin{array}{lccccccc} & \neg p & & \vee & & q & & \\ \leftrightarrow & \underline{p}q & \vee & \underline{p}\underline{q} & \vee & pq & \vee & \underline{p}q \end{array}$$

Podle zákona idempotence nyní vyškrtáme stejné elementární konjunkce:

$$\underline{p}q \quad \vee \quad \underline{p}\underline{q} \quad \vee \quad pq$$

Všimněme si, že celá tato ‚deminimalizace' není řádek po řádku přesným opakem minimalizace.

8) Transformujte formuli $(p \wedge \neg q) \rightarrow (r \vee q)$ tak, abyste poté mohli sestavit její ÚDNF. Nejprve provedeme ekvivalentní transformace:

$(p\wedge\neg q)\rightarrow(r\vee q)$

$\leftrightarrow\quad \neg(p\wedge\neg q)\vee(r\vee q)$ podle tautologie $(A\rightarrow B)\leftrightarrow(\neg A\vee B)$

$\leftrightarrow\quad (\neg p\vee\neg\neg q)\vee(r\vee q)$ podle tautologie $\neg(A\wedge B)\leftrightarrow(\neg A\vee\neg B)$ (De Morganův z.)

$\leftrightarrow\quad (\neg p\vee q)\vee(r\vee q)$ podle tautologie $\neg\neg A\leftrightarrow A$ (z. dvojité negace)

$\leftrightarrow\quad \neg p\vee q\vee r\vee q$ díky komutativitě $\vee$

$\leftrightarrow\quad \neg p\vee q\vee r$ podle tautologie $(A\vee A)\leftrightarrow A$ (z. idempotence).

Poté opakovaně provádíme opak minimalizace podle tautologie $A\leftrightarrow(Al\vee A\underline{l})$:

$$\neg p \quad\vee\quad q \quad\vee\quad r$$

$$\leftrightarrow\ \underline{p}q \vee \underline{p}\,\underline{q} \vee pq \vee \underline{p}q \vee pr \vee \underline{p}r$$

$$\leftrightarrow\ \underline{p}qr \vee \underline{p}q\underline{r} \vee \underline{p}\,\underline{q}r \vee \underline{p}\,\underline{q}\,\underline{r} \vee pqr \vee pq\underline{r} \vee \underline{p}qr \vee \underline{p}q\underline{r} \vee p\underline{q}r \vee pqr \vee \underline{p}qr \vee \underline{p}\,\underline{q}r$$

Podle zákona idempotence vyškrtáme stejné elementární konjunkce:

$$\leftrightarrow\quad \underline{p}qr \vee \underline{p}q\underline{r} \vee \underline{p}\,\underline{q}r \vee \underline{p}\,\underline{q}\,\underline{r} \vee pqr \vee pq\underline{r} \vee p\underline{q}r$$

Jak si lze ověřit sestavením ÚDNF z tabulky, daná formule není tautologií, protože má méně než osm elementárních konjunkcí. Jedinou elementární konjunkcí, která nemá být součástí ÚDNF této formule, je $p\underline{q}\,\underline{r}$, kterou jsme zcela správně neodvodili.

9) Metoda ekvivalentních úprav formule na ÚDNF:

$\neg(p\rightarrow q)$

$\leftrightarrow\quad \neg(\neg p\vee q)$ převod $\rightarrow$ na $\vee$

$\leftrightarrow\quad p\wedge\neg q$ DM, z. $\neg\neg$

$\leftrightarrow\quad (p\wedge(q\vee\neg q))\wedge\neg q$ neutrálnost tautologie ke $\wedge$ nalevo

$\leftrightarrow\quad (p\wedge(q\vee\neg q))\wedge(\neg q\wedge(p\vee\neg p))$ neutrálnost tautologie ke $\wedge$ napravo

$\leftrightarrow\quad (p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)\vee(\neg q\wedge(p\vee\neg p))$ distributivita $\wedge$ nalevo

$\leftrightarrow\quad ((p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q))\vee((\neg q\wedge p)\vee(\neg q\wedge\neg p))$ distributivita $\wedge$ napravo

$\leftrightarrow\quad ((p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q))\vee((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge\neg q))$ komutativita $\wedge$

$\leftrightarrow\quad ((p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q))\vee(\neg p\wedge\neg q))$ idempotence $\vee$

Hledanou ÚDNF je tedy $pq\vee p\underline{q}\vee\underline{p}\,\underline{q}$.

9.5 Cvičení – sestavení a minimalizace ÚDNF

Sestavte ÚDNF k níže uvedeným formulím a poté proveďte jejich minimalizaci:

1) $(p \rightarrow (q \rightarrow p)) \wedge (p \vee r)$

2) $((p \wedge q) \vee r) \rightarrow (\neg p \leftrightarrow \neg q)$

3) $(\neg p \rightarrow q) \rightarrow ((p \wedge r) \rightarrow (q \wedge r))$

Sestavte ÚDNF k systému, který pro vstupy a výstupy nabývá hodnoty uvedené v tabulce, a poté proveďte její minimalizaci:

4)

p	q	r	výstup
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	0

5)

p	q	r	výstup
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	1

6)

p	q	r	výstup
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	1

7)

p	q	r	výstup
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	1

8)

p	q	r	výstup
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	1

Minimalizujte následující ÚDNF:

9) $pqr \vee pq\underline{r} \vee \underline{p}qr \vee \underline{p}q\underline{r} \vee \underline{pq}r \vee \underline{pqr}$

10) $pqr \vee pq\underline{r} \vee p\underline{q}r \vee p\underline{qr} \vee \underline{p}qr \vee \underline{p}q\underline{r} \vee \underline{pqr}$

11) $pqr \vee pq\underline{r} \vee p\underline{q}r \vee p\underline{qr} \vee \underline{p}qr \vee \underline{p}q\underline{r}$

12) Alchymista je zavřen ve vězení, protože se mu stále nedaří přeměna olova ve zlato. Dostane pět motáků, z nichž první čtyři obsahují následující výroky:
p – Podaří se ti přeměna olova ve zlato
q – Prvního dubna bude tvůj švagr jmenován prokurátorem
r – Po prvním dubnu bude soud.
První moták zní: $p \wedge q \wedge r$
Druhý moták zní: $p \wedge q \wedge \neg r$
Třetí moták zní: $\neg p \wedge \neg q \wedge r$
Čtvrtý moták zní: $\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$
Pátý moták zní: Platí prvý, druhý, třetí nebo čtvrtý moták.
Co se z těchto motáků vlastně alchymista dověděl?

K formuli dané najděte ÚDNF, která bude obsahovat proměnné p, q a r:

13) $p \vee r$

14) $p \vee q$

9.5 Řešení – sestavení a minimalizace ÚDNF

1) ÚDNF je $pqr \vee pq\underline{r} \vee p\underline{q}r \vee p\underline{qr} \vee \underline{p}qr \vee \underline{pq}r$, kterou minimalizujeme následovně: $pqr \vee pq\underline{r} \vee p\underline{q}r \vee p\underline{qr} \vee \underline{p}qr \vee \underline{pq}r \leftrightarrow pq \vee pr \vee qr \vee p\underline{r} \vee p\underline{q} \vee \underline{q}r \vee \underline{p}r \leftrightarrow p \vee p \vee r \vee r \leftrightarrow p \vee r$, tedy: $p \vee r$.

2) ÚDNF je $pqr \vee pq\underline{r} \vee p\underline{qr} \vee \underline{p}q\underline{r} \vee \underline{pq}r \vee \underline{pqr}$, kterou minimalizujeme následovně: $pqr \vee pq\underline{r} \vee p\underline{qr} \vee \underline{p}q\underline{r} \vee \underline{pq}r \vee \underline{pqr} \leftrightarrow pq \vee p\underline{r} \vee q\underline{r} \vee \underline{qr} \vee \underline{pr} \vee \underline{pq} \leftrightarrow pq \vee \underline{r} \vee \underline{r} \vee \underline{pq} \leftrightarrow pq \vee \underline{r} \vee \underline{pq}$, tedy: $pq \vee \underline{r} \vee \underline{pq}$.

3) ÚDNF je $pqr\vee pq\underline{r}\vee p\underline{qr}\vee\underline{p}qr\vee\underline{p}q\underline{r}\vee\underline{pq}r\vee\underline{pqr}$, kterou minimalizujeme následovně: $pqr\vee pq\underline{r}\vee p\underline{qr}\vee\underline{p}qr\vee\underline{p}q\underline{r}\vee\underline{pq}r\vee\underline{pqr} \leftrightarrow pq\vee qr\vee p\underline{r}\vee q\underline{r}\vee\underline{qr}\vee\underline{p}q\vee\underline{p}r\vee\underline{pr}\vee\underline{pq} \leftrightarrow q\vee q\vee\underline{r}\vee\underline{r}\vee\underline{p}\vee\underline{p} \leftrightarrow q\vee\underline{r}\vee\underline{p}$, tedy: $q\vee\underline{r}\vee\underline{p}$.

4) ÚDNF je $pqr\vee pq\underline{r}\vee p\underline{q}r\vee\underline{pq}r$, kterou minimalizujeme na $pq\vee pr\vee\underline{q}r$.

5) Elementární konjunkce přiléhají všem řádkům mimo druhý a čtvrtý, ÚDNF je proto $pqr\vee p\underline{q}r\vee\underline{p}qr\vee\underline{p}q\underline{r}\vee\underline{pq}r\vee\underline{pqr}$. Tu minimalizujeme následovně: $pqr\vee p\underline{q}r\vee\underline{p}qr\vee\underline{p}q\underline{r}\vee\underline{pq}r\vee\underline{pqr} \leftrightarrow pr\vee qr\vee\underline{q}r\vee\underline{p}q\vee\underline{p}r\vee\underline{pr}\vee\underline{pq} \leftrightarrow r\vee r\vee\underline{p}\vee\underline{p} \leftrightarrow r\vee\underline{p}$, tedy: $r\vee\underline{p}$.

6) Minimalizujeme: $pqr\vee p\underline{q}r\vee p\underline{qr}\vee\underline{p}qr\vee\underline{pq}r\vee\underline{pqr} \leftrightarrow pr\vee qr\vee p\underline{q}\vee\underline{q}r\vee\underline{qr}\vee\underline{p}r\vee pq \leftrightarrow r\vee r\vee\underline{q}\vee\underline{q}$; tedy $r\vee\underline{q}$.

7) Minimalizujeme: $pqr\vee pq\underline{r}\vee p\underline{q}r\vee\underline{pq}r\vee\underline{pqr} \leftrightarrow pq\vee pr\vee\underline{q}r\vee\underline{pq} \leftrightarrow pr\vee\underline{q}r\vee pq\vee\underline{pq}$; odkud $pr\vee\underline{q}r\vee(p\leftrightarrow q)$ (převod formule $pq\vee\underline{pq}$ na onu ekvivalenci), distributivitou pak $r\vee(p\underline{q})\vee(p\leftrightarrow q)$.

8) Minimalizujeme: $pqr\vee pq\underline{r}\vee p\underline{q}r\vee\underline{p}qr\vee\underline{pq}r\vee\underline{pqr} \leftrightarrow pq\vee pr\vee qr\vee\underline{q}r\vee\underline{p}r\vee\underline{pq} \leftrightarrow pq\vee r\vee r\vee\underline{pq} \leftrightarrow pq\vee\underline{pq}\vee r$; odkud $(p\leftrightarrow q)\vee r$.

9) Minimalizujeme: $pqr\vee pq\underline{r}\vee p\underline{q}r\vee p\underline{qr}\vee\underline{p}qr\vee\underline{p}q\underline{r} \leftrightarrow pq\vee pr\vee qr\vee p\underline{r}\vee q\underline{r}\vee p\underline{q}\vee\underline{p}q \leftrightarrow p\vee q\vee p\vee q \leftrightarrow p\vee q$.

10) Minimalizujeme: $pqr\vee pq\underline{r}\vee\underline{p}qr\vee\underline{p}q\underline{r}\vee\underline{pq}r\vee\underline{pqr} \leftrightarrow pq\vee qr\vee q\underline{r}\vee\underline{p}q\vee\underline{p}r\vee\underline{pr}\vee\underline{pq} \leftrightarrow q\vee q\vee\underline{p}\vee\underline{p} \leftrightarrow q\vee\underline{p}$ (přičemž pak $(q\vee\neg p) \leftrightarrow (\neg p\vee q) \leftrightarrow (p\rightarrow q)$).

11) Minimalizujeme: $pqr\vee pq\underline{r}\vee p\underline{q}r\vee p\underline{qr}\vee\underline{p}qr\vee\underline{p}q\underline{r}\vee\underline{pqr} \leftrightarrow pq\vee pr\vee qr\vee pr\vee qr\vee pq\vee\underline{qr}\vee\underline{pq}\vee\underline{pr} \leftrightarrow p\vee q\vee p\vee q\vee\underline{r}\vee\underline{r} \leftrightarrow p\vee q\vee\underline{r}$.

12) Motáky alchymistovi poskytly ÚDNF, jež je $(p\wedge q\wedge r) \vee (p\wedge q\wedge\neg r) \vee (\neg p\wedge\neg q\wedge r) \vee (\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)$. Máme nalézt formuli, k níž je tato ÚDNF ekvivalentní. Dostaneme:
$(p\wedge q\wedge r) \vee (p\wedge q\wedge\neg r) \vee (\neg p\wedge\neg q\wedge r) \vee (\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)$
$\leftrightarrow (p\wedge q) \vee (\neg p\wedge\neg q)$
Formule $((p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q))$ je ekvivalentní $(p\leftrightarrow q)$, slovně tedy: „Podaří se ti přeměna olova ve zlato tehdy a jen tehdy, když bude tvůj švagr jmenován prokurátorem".

13) Postupně formuli ‚deminimalizujeme‘: $p \vee r \leftrightarrow pq \vee p\underline{q} \vee qr \vee \underline{q}r \leftrightarrow pqr \vee pq\underline{r} \vee p\underline{q}r \vee p\underline{qr} \vee pqr \vee \underline{p}qr \vee p\underline{q}r \vee \underline{pq}r \leftrightarrow pqr \vee pq\underline{r} \vee p\underline{q}r \vee p\underline{qr} \vee \underline{p}qr \vee \underline{pq}r$.

14) Postupně formuli ‚deminimalizujeme‘: $p \vee q \leftrightarrow pq \vee p\underline{q} \vee qr \vee q\underline{r} \leftrightarrow pqr \vee pq\underline{r} \vee p\underline{q}r \vee p\underline{qr} \vee pqr \vee \underline{p}qr \vee pq\underline{r} \vee \underline{p}q\underline{r} \leftrightarrow pqr \vee pq\underline{r} \vee p\underline{q}r \vee p\underline{qr} \vee \underline{p}qr \vee \underline{p}q\underline{r}$.

10. Výrokově-logické vyplývání

Už výše jsme si představili intuitivní pojem vyplývání. Povšimli jsme si, že odkazuje na intuitivní pojem všech okolností, tedy intuitivní pojem nutnosti. Řekli jsme, že tento pojem je třeba nahradit nějakým rigorózním pojmem, aby se tak stal rigorózním i pojem vyplývání. VL nabízí určitý rigorózní pojem vyplývání, poněvadž nabízí rigorózní náhradu intuitivního pojmu okolností, totiž pojem valuace (ohodnocení výrokových proměnných); tento pojem byl definován již výše v kapitole 2.

Výrokově-logické vyplývání

Formule Z *výrokově-logicky vyplývá* z formulí $P_1, P_2, ..., P_n$ právě tehdy, když Z nabývá pravdivostní hodnotu pravda při všech valuacích, při nichž nabývají pravdivostní hodnotu pravda všechny formule $P_1, P_2, ..., P_n$.

Zde je věcně shodná definice, jež má však přehlednější logickou strukturu definienda: Formule Z výrokově-logicky vyplývá z formulí $P_1, P_2, ..., P_n$ právě tehdy, když při všech valuacích platí, že jsou-li všechny formule $P_1, P_2, ..., P_n$, pravdivé, je pravdivá rovněž formule Z. Vyplývání Z z P_1, P_2 až P_n zapisujeme:

$$P_1, P_2, ..., P_n \models Z.$$

V klasické logice platí, že Z vyplývá z P_1, P_2 až P_n tehdy, když konjunkce všech formulí P_1, P_2 až P_n implikuje Z s logickou nutností, tedy když je formule $(P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n) \rightarrow Z$ tautologií, což značíme:

$$\models (P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n) \rightarrow Z.$$

Neexistuje tedy případ, kdy by se pravdivost formulí $P_1, P_2, ..., P_n$ nepřenesla na Z, neboli všechny premisy byly pravdivé a závěr nepravdivý. (Mj. při reprezentaci pravdivosti a nepravdivosti pomocí 1 a 0 to znamená, že při všech valuacích v platí, že $(\Im(v,P_1) \wedge \Im(v,P_2) \wedge ... \wedge \Im(v,P_n)) \leq \Im(v,Z)$.)

Připomeňme si ještě shodu pojmu vyplývání s výše uváděným pojmem tautologického důsledku systému formulí T: A je tautologickým důsledkem systému formulí T, tj. $T \models A$, právě tehdy, když $\Im(v,A)=1$ při každé interpretaci, při níž $\Im(v,B)=1$ pro každou formuli B, jež je prvkem T. Jinými slovy, A výrokově-logicky vyplývá z T právě tehdy, když A je splňována přinejmenším těmi všemi interpretacemi, jež splňují T.

Vyplývání v klasické logice a tedy i VL-vyplývání má následující tři vlastnosti. Nechť Cn(X) je množina sémantických důsledků množiny formulí X, tj. Cn(X) je množina všech formulí, jež vyplývají z X:

i. *monotónnost* vyplývání: jestliže $X \subseteq Y$, tak $\mathrm{Cn}(X) \subseteq \mathrm{Cn}(Y)$, čili vyplývá-li Z z $P_1, P_2, ..., P_n$, tak Z vyplývá i z množiny obsahující $P_1, P_2, ..., P_n$ a nějakou další formuli Q
ii. *reflexívnost* vyplývání: $X \subseteq \mathrm{Cn}(X)$, čili jestliže Z je jednou z $P_1, P_2, ..., P_n$, tak Z vyplývá z $P_1, P_2, ..., P_n$
iii. *tranzitivita* vyplývání: $\mathrm{Cn}(\mathrm{Cn}(X)) \subseteq \mathrm{Cn}(X)$, čili důsledky důsledků X jsou také důsledky X (tj. jestliže $P_1, P_2, ..., P_n \models Z$ a $Q_1, Q_2, ..., Q_n, Z \models Z'$, tak $P_1, P_2, ..., P_n, Q_1, Q_2, ..., Q_n, Z \models Z'$).

Připomeňme si též, že úsudek U je platný právě tehdy, když jeho závěr Z vyplývá z jeho premis $P_1, P_2, ..., P_n$. Znamená to, že jeho závěr nemůže být nepravdivý, jestliže jsou všechny jeho premisy pravdivé. Logika se ovšem nestará o konkrétní obsahy úsudků, jejich platnost ověřuje výlučně na základě jejich *logické formy*. V případě VL například slovně vyjádřený úsudek:

Jestliže prší, je mokro.
Prší.
___
Je mokro.

prohlásíme za platný, protože je platnou jeho logická forma:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \underline{p} \\ q \end{array}$$

Dle VL závěr q dané úsudkové formy výrokově-logicky vyplývá z premis $p \rightarrow q$ a p. Logická forma daného úsudku tedy garantuje, že se pravdivost premis přenese na závěr.

Pro názornost se podívejme na tři z možných distribucí pravdivostních hodnot skrze danou úsudkovou formu, tj. tři valuace v_1–v_3:

v_1)

$$\begin{array}{ll} p_1 \rightarrow q_1 & 1 \\ p_1 & 1 \\ \hline q_1 & 1 \end{array}$$

v_2)

$$\begin{array}{ll} p_1 \rightarrow q_0 & 0 \\ p_1 & 1 \\ \hline q_0 & 0 \end{array}$$

v_3)

$$\begin{array}{ll} p_0 \rightarrow q_1 & 1 \\ p_0 & 0 \\ \hline q_1 & 1 \end{array}$$

Daná úsudková forma je platná bez ohledu na tu, či onu valuaci. Platnost je založena na tom, že při valuaci jako v_1, při níž jsou pravdivé všechny premisy, je pravdivý také závěr. Když premisy pravdivé nejsou, závěr pravdivý být může, ale nemusí, srov. v_2) a v_3); to nic nemění na platnosti této úsudkové formy.

Uzavřeme to tím, že platnost úsudků můžeme explicitně opřít o výrokově-logické vyplývání: (jazykově formulovaný) úsudek U je *výrokově-logicky platný* právě tehdy, když závěr Z jeho logické formy výrokově-logicky vyplývá z jeho premis P_1, P_2, ..., P_n jeho úsudkové formy.

* * *

Doplňující informace. Naneštěstí je pojem výrokově-logického vyplývání slabší než intuitivní pojem vyplývání (a též pojem vyplývání, který nadefinujeme v pokračování této knihy). K protipříkladům se využívá slabina VL, jíž je přílišná hrubost analýz, jichž je VL schopna. VL tedy nedokáže dostatečně charakterizovat logickou formu úsudků. Ukažme si tyto dva jazykové příklady:

Každý člověk je smrtelný.
Aristotelés je člověk.

Aristotelés je smrtelný.

Hlavní město České republiky má přes milión obyvatel.
Praha je hlavní město České republiky.

Praha má přes milión obyvatel.

V obou případech se jedná o intuitivně platné úsudky. Logickou formou těchto úsudků je ale podle VL:

$$\begin{array}{l} p \\ q \\ \hline r \end{array}$$

Pro tuto úsudkovou formu existuje valuace, jmenovitě $v(p)=v(q)=1$, $v(r)=0$, při níž jsou všechny premisy pravdivé, ale závěr pravdivý není – pravdivost premis se tedy nepřenesla na závěr. Z hlediska VL se jedná o neplatnou úsudkovou formu a oba jazykové úsudky jsou proto vyhodnoceny jako neplatné. VL tedy nesprávně vyhodnotila platnost těchto jazykových úsudků. Nedokázala totiž správně zachytit jejich logickou formu. Konkrétně to, že v prvém případě se vyplývání zakládá na překrývajících se extenzích predikátů v daných jednoduchých výrocích, v druhém zase na vzájemné substitutivitě identických termínů z druhé premisy.

V důsledku těchto zkoumání můžeme proto formulovat následující tvrzení: Jestliže výrok Z výrokově-logicky vyplývá z výroků P_1, P_2, ..., P_n, pak z nich také vyplývá. Neplatí ovšem obrácené tvrzení: Jestliže výrok Z vyplývá z výroků P_1, P_2, ..., P_n, pak z nich také výrokově-logicky vyplývá. Z hlediska praktického je výhodou VL to, že díky vysoké abstrakci od detailů umožňuje rychle ověřit platnost mnoha jazykových úsudků. Nevýhodou je, že tyto výsledky nemůžeme absolutizovat, v některých případech není VL s to platnost správně určit.

10.1 Cvičení – výrokově-logické vyplývání

1) Uveďte definici výrokově-logického vyplývání.

2) Zdůvodněte, proč je chybná definice výrokově-logického vyplývání, která nevyužívá pojem valuace (pravdivostní ohodnocení) výrokových proměnných.

3) Zdůvodněte, proč je chybná definice výrokově-logického vyplývání, podle níž formule Z je pravdivá právě a pouze při těch všech valuacích výrokových proměnných, při níž jsou pravdivé formule P_1, P_2, ..., P_n.

11. Ověřování, zda je formule tautologií metodou protipříkladu

V této kapitole si osvojíme metodu, jež se v rozvinutější podobě s oblibou užívá při zjišťování platnosti úsudků.

Výše jsme viděli, že pomocí sémantické tabulky lze určit průběh pravdivostních hodnot formule a tudíž i to, zda daná formule je, či není tautologií. Zde jsou dva konkrétní příklady uplatnění tabulkové metody, na nichž je ovšem vidět její relativní pracnost, která exponenciálně roste s vyšším počtem proměnných:

$\neg$	p	$\rightarrow$	$(q$	$\vee$	$p)$
0	1	*1*	1	1	1
0	1	*1*	0	1	1
1	0	*1*	1	1	0
1	0	*0*	0	0	0

Jak si lze všimnout, k určení toho, že daná formule není tautologií, by stačilo najít jen jeden řádek této tabulky. Přesněji, stačilo by zjistit, že daná formule nabývá pravdivostní hodnoty 0 při $v(p)$=$v(q)$=0.

V následujícím příkladu je k ověření, že daná formule je tautologií, potřeba prověřit všechny řádky. Bylo by ale žádoucí najít metodu, jak rychle zjistit, že v žádném řádku není výslednou hodnotou 0, tedy že neexistuje valuace, při níž je formule nepravdivá – a tedy je tautologií.

$\neg$	p	$\rightarrow$	$(q$	$\vee$	$\neg$	$p)$
0	1	*1*	1	1	0	1
0	1	*1*	0	0	0	1
1	0	*1*	1	1	1	0
1	0	*1*	0	1	1	0

Skutečnost, že formule *A* není tautologií, pokud alespoň při jedné valuaci nabývá pravdivostní hodnotu 0, a že *A* je tautologií, pokud tomu tak není, využívá *metoda protipříkladu*. Ta se snaží prokázat netautologičnost *A* tím, že hledá valuaci, při níž *A* nabývá hodnotu 0. (Jedná se tedy o důkaz sporem, viz níž kap. 13.)

Metodu protipříkladu si nejprve přiblížíme na příkladech našich dvou formulí. Formuli $\neg p \rightarrow (q \vee p)$ stručně označujme A. Připomeňme si, že hledáme alespoň jednu valuaci – existuje-li nějaká –, při níž naše formule A nabývá pravdivostní hodnoty 0, tehdy by totiž A tautologií nebyla. Toto celé je naší hypotézou H:

$$\begin{array}{cccccccc} \neg & p & \rightarrow & (& q & \vee & p &) \\ & & 0 & & & & & \end{array}$$

Naše formule je tvaru $B \rightarrow C$ a implikace je nepravdivá, pakliže antecedent je 1 a konsekvent 0:

$$\begin{array}{cccccccc} \neg & p & \rightarrow & (& q & \vee & p &) \\ & & 0 & & & & & \\ 1 & & & & & 0 & & \end{array}$$

Toto (předběžné) ohodnocení podle hypotézy H se budeme snažit prosadit směrem k nejmenším podformulím A, totiž k p a q. Pokud se nám H podaří prosadit, najdeme tím alespoň jednu valuaci (v našem konkrétním případě to bude $v(p)=v(q)=0$), při níž je formule A nepravdivá a tedy není tautologií. Prosadit se nám to ale nepodaří v případě, že bychom k prosazení potřebovali, aby nějaká proměnná při takové valuaci nabývala hned dvě pravdivostní hodnoty 1 a 0, což je logicky vyloučeno.

Vraťme se k naší formuli. Aby byla H prosazena v antecedentu, p musí být 0, což není problém prosadit:

$$\begin{array}{cccccccc} \neg & p & \rightarrow & (& q & \vee & p &) \\ & & 0 & & & & & \\ 1 & & & & & 0 & & \\ & 0 & & & & & & \end{array}$$

(Získanou hodnotu pro proměnnou p si můžeme pro lepší orientaci vyznačovat třeba podtržením.) Nyní se hypotézu H snažíme prosadit také v konsekventu. Aby $q \vee p$ měla hodnotu 0, tak obě její dílčí podformule musí být 0:

$$\begin{array}{cccccccc} \neg & p & \rightarrow & (& q & \vee & p &) \\ & & 0 & & & & & \\ 1 & & & & & 0 & & \\ & 0 & & & & & & \\ & & & & 0 & & 0 & \end{array}$$

Vidíme, že nás nic nenutilo k tomu, aby nějaká proměnná měla v zájmu H rozporné odhodnocení, hypotézu H se nám tedy podařilo prosadit. To znamená, že jsme našli alespoň jednu valuaci, při níž *A* není pravdivá, a tudíž *A* není tautologií.

Ukažme si ještě, že v případě druhé formule, $\neg p \rightarrow (q \vee \neg p)$, bychom v zájmu H museli mít rozpornou valuaci pro *p*. Tuto skutečnost zde označujeme tučným řezem.

$\neg p \rightarrow (q \vee \neg p)$
    0
 1   0
  0
       0 0
          1

Znamená to vlastně, že pro danou formuli neexistuje valuace, která by ji činila nepravdivou, a tudíž je daná formule tautologií.

Poznamenejme, že někdy může být při řešení příkladu výhodný trochu jiný postup, kdy valuaci získanou na jedné straně formule přeneseme na druhou stranu, poté dopočítáme pravdivostní hodnotu dané podformule a zjistíme, že tato hodnota je odlišná od té původně zamýšlené. Rozpor mezi plánem a dosaženou hodnotou si můžeme vyznačit třeba tučným řezem:

$\neg p \rightarrow (q \vee \neg p)$
    0
 1   **0**
  0
          0 (valuace získaná na levé straně)
       0   1
        1

Doplňující poznámka. Už výše bylo zmíněno, že jde vlastně o důkaz sporem. Právě ukázaná metoda se dá přepsat do podoby, z níž je zjevné, že jde o důkaz, protože jde o posloupnost formulí, které jsou vyvozovány pomocí nějakých odvozovacích pravidel (k pojmu důkazu a odvozovacího pravidla viz kapitolu 13.). V daném případě by formule byly spjaty rovnou se získanými pravdivostními hodnotami *h*, tj. pracovali bychom s útvary jako *h*:*A*. (Níže v kapitole 14. budeme uplatňovat současnou podobu metody sémantických tabel, jimž se naše následující ukázka podobá.) Zde je přepis výše uváděného příkladu.

1.	0: $\neg p \to (q \lor \neg p)$	
2.	1: $\neg p$	důsledek kroku 1. na základě definice $\to$
3.	0: $(q \lor \neg p)$	důsledek kroku 1. na základě definice $\to$
4.	0: p	důsledek kroku 2. na základě definice $\neg$
5.	0: q	důsledek kroku 3. na základě definice $\lor$
6.	0: $\neg p$	důsledek kroku 3. na základě definice $\lor$
7.	1: p	důsledek kroku 6. na základě definice $\neg$

Nyní vidíme spor mezi kroky 4. a 7., proto neplatí předpoklad důkazu sporem, totiž krok 1. Protože daná formule nemůže být nepravdivá (jak předpokládal důkaz sporem), je tautologií.

11.1 Příklady – ověřování, zda je formule tautologií metodou protipříkladu

Metodou protipříkladu ověřte, zda je daná formule tautologií:

1)

	p	$\to$	$(q$	$\to$	$p)$
1. Hypotéza H:		0			
2. aby H, musí být:	**1**			0	
3. aby H, pak musí být:			1		**0**

4. rozpor valuace pro p v 2. a 3. (vyznačeno tučně)
5. protože se nepodařilo prosadit hypotézu H, formule je tautologií.

2)

	$(p$	$\to$	$q)$	$\to$	p
1. Hypotéza H:				0	
2. aby H, musí být:		1			0
3. přenos valuace pro p nalevo:	0				
4. je-li antecedent 0, $(p \to q)$ je 1,		1			

což je v souladu s hypotézou H (viz 2.):
5. protože se podařilo prosadit H, daná formule není tautologií.
Všimněme si, že daná formule je 0 při $v(p)=v(q)=0$ a také při $v'(p)=0$, $v'(q)=1$, ale my se nemusíme starat o to, při které z těchto valuací to je.

3)

	$(p$	$\wedge$	$q)$	$\rightarrow$	$(p$	$\rightarrow$	$q)$
1. Hypotéza H:				0			
2. aby H, musí být:		1				0	
3. aby H, pak v konsekventu musí být:					1		**0**
4. aby H, pak v antecedentu:	1		**1**				

5. rozpor valuace pro q v 3. a 4.
6. protože se nepodařilo prosadit hypotézu H, formule je tautologií.

4)

	$(p$	$\rightarrow$	$q)$	$\rightarrow$	$(\neg$	p	$\rightarrow$	$\neg$	$q)$
1. Hypotéza H:				0					
2. aby H, musí být:		1					0		
3. aby H, pak v konsekventu musí být:					1			0	
4. vyhodnocení negací p a q:						0			1
5. přenos valuace p a q:	0		1						

6. načež $(p \rightarrow q)$ je 1, což je v souladu s hypotézou H (viz 2.);
7. protože se podařilo prosadit hypotézu H, formule není tautologií.

5)

	$(\neg$	q	$\rightarrow$	$\neg$	$p)$	$\rightarrow$	$(p$	$\rightarrow$	$q)$
1. Hypotéza H:						0			
2. aby H, musí být:			**1**					0	
3. aby H, pak v konsekventu musí být:							1		0
4. přenos valuace pro p, q:		0			1				
5. vyhodnocení negací:	1			0					
6. takže implikace je nepravdivá:			**0**						

7. což je rozpor s H (viz 2.);
8. protože hypotézu H se nepodařilo prosadit, formule je tautologií.

6)

$(p\rightarrow q)\rightarrow((p\land r)\rightarrow(q\land\neg r))$

1. Hypotéza H: 0
2. aby H, musí být: 1 0
3. aby H, pak v konsekventu musí být: 1 0
4. takže první konjunkce musí být: 1 1
5. přenos valuace pro *r*: 1
6. negace *r* je tedy: 0
7. přenos valuace pro *p*: 1
8. aby antecedent byl pravdivý, tak *q* musí být: 1
9. přenos valuace pro *q*: 1
10. vyhodnocení druhé konjunkce: 0
11. protože se podařilo prosadit H, formule není tautologií.

7)

$((p\lor q)\land r)\rightarrow(\neg p\rightarrow r)$

1. Hypotéza H: 0
2. aby H, musí být: **1** 0
3. aby H, pak v konsekventu musí být: 1 0
4. takže valuace pro *p* je: 0
5. přenos valuace pro *p*, *r*: 0 0
6. aby disjunkce byla pravdivá: 1
7. takže disjunkce je pravdivá: 1
8. avšak konjunkce vychází jako: **0**
9. jenže to je rozpor s H (viz 2.)
10. protože se nepodařilo prosadit hypotézu H, formule je tautologií (T).

Všimněme si však, že v 5. jsme už mohli skončit. Neboť jsme zjistili, že pravý konjunkt (totiž *r*) má být nepravdivý, ačkoli celá konjunkce má být pravdivá.

8)

$(p\rightarrow(q\rightarrow r)) \rightarrow ((p\rightarrow q)\rightarrow(p\rightarrow r))$

1. Hypotéza H: 0
2. aby H, musí být: **1** 0
3. aby H, pak v konsekventu musí být: 1 0
4. aby H, tak musí být: 1 0
5. přenos valuace pro *p*: 1
6. aby H platila pro konsekvent, tak *q* musí být: 1
7. přenos valuace pro *p*, *q*, *r*: 1 1 0
8. vyhodnocení implikace: 0
9. vyhodnocení celého antecedentu: **0**
10. avšak výsledek v 9. je v rozporu s H (viz 2.)
11. protože se nepodařilo prosadit hypotézu H, formule je tautologií.

9)

$((((p\vee q)\rightarrow r)\wedge\neg r)\wedge\neg p)\rightarrow\neg q$

1. Hypotéza H: 0
2. aby H, musí být: 1 0
3. aby H, musí být dále: **1** 1
4. zjištění valuace pro *q*: 1
5. aby H, musí být: 1
6. aby H, tak negace *p*: 1
7. zjištění valuace pro *p*: 0
8. zjištění valuace pro *r*: 0
9. přenos valuace pro *p*: 0
10. přenos valuace pro *q*: 1
11. přenos valuace pro *r*: 0
12. vyhodnocení disjunkce: 1
13. vyhodnocení implikace: **0**
14. avšak aby platila H, tak měla být implikace pravdivá (viz 3.), aby byly obě konjunkce antecedentu (srov. 2. a 3.) v souladu s H pravdivé; je tu tedy spor;
15. protože hypotézu H se nepodařilo prosadit, formule je tautologií.

10)

$(p\rightarrow(q\rightarrow r)) \rightarrow ((p\rightarrow q)\rightarrow r)$

1. Hypotéza H: 0
2. aby H, musí být: 1 0
3. aby H, pak v konsekventu musí být: 1 0
4. přenos valuace pro *r*: 0
5. aby H, tak platí například tato možnost: 0
6. vyhodnocení implikace: 1
7. přenos valuace pro *q*: 0
8. při zvolené valuaci pro *q* musí být *p*: 0
9. aby tak byla pravdivá vnitřní implikace konsekventu: 1
10. přenos valuace pro *p*: 0
11. vyhodnocení antecedentu: 1
12. protože se podařilo prosadit H, formule není tautologií.

Uvědomme si, že po dokončení kroku 3. jsme v situaci, kdy se nám prosazování větví na tři možnosti, tři větve. Víme sice, že v zájmu H má být r=0, ale to k volbě jedné ze tří větví nestačí. V danou chvíli tedy můžeme volit náhodně jednu z nich, jak je to vyvedeno výše. Lze však vybrat efektivnější větev: p=0; to totiž znamená, že celý antecedent $(p\rightarrow(q\rightarrow r))$=1 a hypotéza H je tedy prosazena.

11.2 Cvičení – ověřování, zda je formule tautologií metodou protipříkladu

Metodou protipříkladu ověřte, zda je daná formule tautologií:

1) $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

2) $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$

3) $(\neg p \rightarrow (q \wedge \neg q)) \rightarrow p$

4) $\neg(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$

5) $(p \vee q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$

6) $(p \wedge \neg q) \rightarrow (r \vee q)$

7) $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) \rightarrow p$

8) $(q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$

9) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow r))$

10) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$ (ověřte implikaci oběma směry)

11) $(((p \vee q) \leftrightarrow r) \wedge r \wedge \neg p) \rightarrow q$

12) $((p \wedge \neg q) \rightarrow (q \vee r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$

13) $((p \vee q) \rightarrow (r \wedge \neg q)) \rightarrow (r \wedge \neg q)$

14) $((p \vee \neg q) \vee (\neg r \rightarrow q)) \rightarrow (p \vee q)$

15) $(\neg q \vee p) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (q \vee r))$

16) $((\neg p \rightarrow q) \vee \neg q) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$

17) $((p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \vee r)) \rightarrow (\neg p \vee r)$

18) $((\neg p \rightarrow q) \vee (q \wedge \neg r)) \rightarrow (r \rightarrow \neg p)$

19) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((\neg p \vee q) \wedge (p \rightarrow r))$

20) $\neg((p \rightarrow q) \vee r) \leftrightarrow \neg((p \rightarrow q) \wedge \neg r)$

11.2 Řešení – ověřování, zda je formule tautologií metodou protipříkladu

Tautologiemi jsou formule z 2)–3), 8), 10)–11).
Tautologiemi nejsou formule z 1), 4)–7), 9), 12), 13)–20).

11.3 Cvičení – ověřování, zda je formule kontradikcí metodou protipříkladu

Metodou protipříkladu ověřte, zda je daná formule kontradikcí. (Postupujeme analogicky úkolu zjišťujícímu, zda je daná formule tautologií; nyní však zkoušíme najít takovou valuaci, při níž je daná formule pravdivá; pokud se to podaří, daná formule není kontradikcí.)

1) $p \wedge \neg p$

2) $(p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p$

3) $(p \rightarrow (p \rightarrow q)) \wedge \neg q$

4) $p \wedge (((p \rightarrow \neg q) \rightarrow q) \wedge \neg q)$

5) $((p \rightarrow q) \vee q) \rightarrow p$

11.3 Řešení – ověřování, zda je formule kontradikcí metodou protipříkladu

Kontradikcemi jsou formule z 1) a 4).
Kontradikcemi nejsou formule z 2), 3) a 5).

12. Ověřování platnosti úsudků metodou protipříkladu

Pro ověření, zda je úsudek výrokově-logicky platný, čili zda jeho závěr výrokově-logicky vyplývá z jeho premis, využijeme metodu protipříkladu. Tato metoda je tedy sémantická a vychází z definice vyplývání. Naším cílem bude najít takovou valuaci (pravdivostní ohodnocení), při níž jsou všechny premisy pravdivé, závěr je však nepravdivý. Jinými slovy, ohodnotíme závěr tak, aby byl nepravdivý, avšak premisy přitom pravdivé. (Jde vlastně o důkaz sporem.)

Pokud se takovouto valuaci nepodaří nalézt, úsudek je platný. V racionální diskusi to odpovídá situaci, kdy protivník sice nemusí přijímat premisy nebo závěr úsudku jako pravdivé, nicméně o logice toho úsudku nepochybuje – nenašel totiž protipříklad. Pokud se ale takovouto valuaci podaří nalézt, úsudek platný není. To odpovídá situaci, kdy protivník v diskuzi namítá: vaše argumentace je neplatná už svou formou, protože je možné, že všechny vaše premisy jsou pravdivé, avšak závěr nikoli.

Ověřování platnosti úsudků metodou protipříkladu se dá připodobnit k metodě protipříkladu, kterou jsme používali při ověřování, zda je daná formule tautologií. Díky možnosti převodu implikace:

$$(\text{premisa}_1 \wedge \text{premisa}_2 \wedge \ldots \wedge \text{premisa}_n) \rightarrow \text{závěr}$$

na úsudek:

$$\begin{array}{l} \text{premisa}_1 \\ \text{premisa}_2 \\ \ldots \\ \text{premisa}_n \\ \hline \text{závěr} \end{array}$$

vlastně ověřujeme formuli, jejímž antecedentem je konjunkce všech premis a konsekventem implikace je závěr. Úsudek je platný tehdy, pokud je vyloučena valuace, při níž je konjunkce všech premis 1 a konsekvent přitom 0.

Pro ilustraci této metody ověřme úsudkovou formu:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow (q \wedge r) \\ q \\ \hline r \rightarrow p \end{array}$$

Aby závěr byl nepravdivý, navrhneme valuaci 1 pro *r* a 0 pro *p*:

$r_1 \to p_0$ 0

Tyto valuace pro *p* a *r* přeneseme do premis:

$p_0 \to (q \wedge r_1)$
q
———
$r_1 \to p_0$ 0

První premisu už můžeme vyhodnotit jako pravdivou (bez ohledu na to, jakou hodnotu bude mít *q*), což bylo naším záměrem:

$p_0 \to (q \wedge r_1)$ 1
q
———
$r_1 \to p_0$ 0

Pokud *q* udělíme hodnotu 1, tak bude druhá premisa také pravdivá, což je naším záměrem:

$p_0 \to (q_1 \wedge r_1)$ 1
q_1 1
———
$r_1 \to p_0$ 0

Našli jsme tedy takovou valuaci (jmenovitě $v(p)=0$, $v(q)=v(r)=1$), při níž jsou všechny premisy pravdivé a závěr nepravdivý. Závěr proto z premis nevyplývá, úsudek není platný.

Pro další ilustrativní příklad ověřme úsudkovou formu:

$p \to q$
p
———
q

Aby závěr byl nepravdivý, navrhneme pro *q* valuaci 0:

q_0 0

Tuto valuaci přeneseme do první premisy:

$p \rightarrow q_0$	
p	
q_0	0

Aby byla pravdivá druhá premisa, což je naším záměrem, jako valuaci pro *p* dáme hodnotu 1:

$p \rightarrow q_0$	
p_1	1
q_0	0

Když *p* nabývá pravdivostní hodnotu 1, první premisa je ale nepravdivá:

$p_1 \rightarrow q_0$	0
p_1	1
q_0	0

Nenašli jsme tedy takovou valuaci, při níž by všechny premisy byly pravdivé a závěr nepravdivý. Závěr proto z premis vyplývá, úsudek je platný. Dodejme, že takovéto zhodnocení nezachrání ani změna valuace pro *p*:

$p_0 \rightarrow q_0$	1
p_0	0
q_0	0

Vidíme tedy, že tato úsudková forma je svou formou sestavena tak, že neumožňuje, aby všechny premisy byly pravdivé a závěr přitom nepravdivý.

Jiným způsobem ověřování platností úsudků je zjišťování, zda je daný úsudek případem instanciace některého platného úsudkového schématu jako např. Modus ponens. Dalším způsobem ověření je provedení důkazu závěru z daných premis. K obojímu srov. níže kapitolu 14.

Jinou metodou zas může být užití tabulkové metody, kdy testujeme, zda konjunkce všech premis implikuje závěr. Nalezneme-li pak v nějakém řádku valuaci takovou, že antecedent (tj. konjunkce premis) nabývá hodnotu pravda a implikovaný závěr hodnotu nepravda, tak závěr nevyplývá z premis, úsudek není platný. Zde je příklad ověření platného úsudku:

proměnné	premisa	závěr	premisa → závěr
p q	$p \rightarrow \neg q$	$q \rightarrow \neg p$	
1 1	0	0	*1*
1 0	1	1	*1*
0 1	1	1	*1*
0 0	1	1	*1*

12.1 Příklady – ověřování platnosti úsudků s jednou premisou sémantickou metodou

Metodou protipříkladu ověřte platnost následujících úsudků:

1) Prší.

Neprší.

Formálně a s ohodnocením na základě metody protipříkladu:

p_1 1

$\neg_0 p_1$ 0

Úsudek není platný (závěr nevyplývá z premis), protože existuje taková valuace, při níž jsou všechny premisy pravdivé a závěr nepravdivý.

2) Je mokro.

Jestliže prší, tak je mokro.

Formálně a s ohodnocením na základě metody protipříkladu:

p_0 0

$q_1 \rightarrow p_0$ 0

Úsudek je platný (závěr vyplývá z premis), protože není možná taková valuace, při níž by všechny premisy byly pravdivé a závěr přitom nepravdivý.

3) Jestliže prší, tak je mokro.
Není mokro.

Neprší.

Formálně a s ohodnocením na základě metody protipříkladu:

$p_1 \rightarrow q_0$	0
$\neg_1 q_0$	1
$\neg_0 p_1$	0

Úsudek je platný (závěr vyplývá z premis), neboť neexistuje taková valuace, při níž by všechny premisy byly pravdivé a závěr přitom nepravdivý.

4) Jestliže jsem dostal sto korun, byl jsem v kině.

Jestliže jsem nedostal sto korun, nebyl jsem v kině.

Formálně a s ohodnocením na základě metody protipříkladu:

$p_0 \rightarrow q_1$	1
$\neg_1 p_0 \rightarrow \neg_0 q_1$	0

Úsudek není platný (závěr nevyplývá z premis), protože existuje taková valuace, při níž by všechny premisy byly pravdivé a závěr přitom nepravdivý.

5) Jde-li život lehce, tak má Anna povznesenou náladu.

Jde-li život lehce, tak život jde lehce a Anna má povznesenou náladu.

Formálně a s ohodnocením na základě metody protipříkladu:

$p_1 \rightarrow q_0$	0
$p_1 \rightarrow (p_1 \wedge q_0)$	0

Úsudek je platný (závěr vyplývá z premis), protože není možná taková valuace, při níž jsou všechny premisy pravdivé a závěr přitom nepravdivý.

12.2 Cvičení – ověřování platnosti úsudků s jednou premisou metodou protipříkladu

Metodou protipříkladu ověřte platnost následujících úsudků:

1) Prší nebo neprší.
   ___
   Prší.

2) Dnes je pondělí.
   ___
   Není-li dnes pondělí, je úterý.

3) Na Marsu je život.
   ___
   Prší a zároveň neprší.

4) Je-li procházka příliš dlouhá, tak není příjemná.
   ___
   Je-li procházka příjemná, tak není příliš dlouhá.

5) Není-li Adam doma, tak se nepřipravuje na zkoušku.
   ___
   Nepřipravuje-li se Adam na zkoušku, tak není doma.

12.2 Řešení – ověřování platnosti úsudků s jednou premisou metodou protipříkladu

1) $(p \vee \neg p) \therefore p$; úsudek není platný.

2) $p \therefore (\neg p \rightarrow q)$; úsudek je platný.

3) $p \therefore (q\wedge\neg q)$; úsudek není platný.

4) $(p\rightarrow\neg q) \therefore (q\rightarrow\neg p)$; úsudek je platný.

5) $(\neg p\rightarrow\neg q) \therefore (\neg q\rightarrow\neg p)$; úsudek není platný.

12.3 Cvičení – ověřování platnosti úsudkových forem s jednou premisou metodou protipříkladu

Metodou protipříkladu ověřte, zda jsou platné následující úsudkové formy:

1) $$\frac{\neg(p\wedge q)\wedge(r\rightarrow\neg s)}{\neg(p\wedge q)}$$

2) $$\frac{(p\rightarrow q)\vee p}{p\rightarrow(p\wedge q)}$$

3) $$\frac{(p\rightarrow q)\wedge(r\wedge s)}{p\rightarrow q}$$

4) $$\frac{(p\rightarrow q)\vee p}{(p\rightarrow q)\vee(p\rightarrow\neg q)}$$

5) $$\frac{(p\wedge q)\rightarrow(r\wedge s)}{(p\wedge q)\rightarrow((p\wedge q)\wedge(r\wedge s))}$$

6) $$\frac{(p\vee q)\vee(r\wedge s)}{p\vee q}$$

7) $$\frac{(p\wedge q)\rightarrow r}{(p\rightarrow q)\rightarrow((p\wedge q)\rightarrow r)}$$

8) $$\frac{(p\rightarrow q)\rightarrow r}{(p\rightarrow q)\rightarrow((p\rightarrow q)\wedge(r\rightarrow s))}$$

9) $$\frac{(p\vee q)\rightarrow(p\wedge q)}{(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)}$$

10) $$\frac{\neg q\vee(p\rightarrow\neg r)}{r\rightarrow(p\wedge q)}$$

12.3 Řešení – ověřování platnosti úsudkových forem s jednou premisou metodou protipříkladu

Platné jsou úsudkové formy z 1), 3)–5), 7), 9). Ostatní jsou neplatné.

12.4 Příklady – ověřování platnosti úsudků metodou protipříkladu

Metodou protipříkladu ověřte platnost daného úsudku:

1) Jestliže Pavel mluvil pravdu, byl na místě činu Kvido a Rudolf.
Na místě činu byl Kvido.

Jestliže Rudolf byl na místě činu, Pavel mluvil pravdu.

Formálně a s ohodnocením na základě metody protipříkladu:

$p_0 \to (q_1 \wedge r_1)$ 1
q_1 1

$r_1 \to p_0$ 0

Úsudek není platný, neboť existuje taková valuace, při níž jsou všechny premisy pravdivé a závěr přitom nepravdivý.

2) Jestliže včera bylo pondělí, dnes je úterý.
Jestliže je dnes úterý, zítra je středa.

Jestliže zítra není středa, tak včera nebylo pondělí.

Formálně a s ohodnocením na základě metody protipříkladu:

$p_1 \to q_0$ 0
$q_0 \to r_0$ 1

$\neg_1 r_0 \to \neg_0 p_1$ 0

Úsudek je platný, neboť neexistuje taková valuace, při níž by všechny premisy byly pravdivé a závěr přitom nepravdivý.

3) Jestliže prší, pak jsou na obloze černé mraky.
Na obloze jsou černé mraky.

Prší.

Formálně a s ohodnocením na základě metody protipříkladu:

$p_0 \rightarrow q_1$	1
q_1	1
p_0	0

Úsudek není platný, neboť existuje takováto valuace, při níž jsou všechny premisy pravdivé a závěr přitom nepravdivý.

4) Jestliže jabloň příliš ostříháme, pak má větší přírůstky.
Jestliže má jabloň větší přírůstky, pak má menší úrodu.

Jestliže jabloň příliš ostříháme, pak má menší úrodu.

Formálně a s ohodnocením na základě metody protipříkladu:

$p_1 \rightarrow q_1$	1
$q_1 \rightarrow r_0$	0
$p_1 \rightarrow r_0$	0

Úsudek je platný, neboť neexistuje taková valuace, při níž by všechny premisy byly pravdivé a závěr přitom nepravdivý.

5) Jestliže jsou hvězdy vidět, tak je jasná obloha.
Jestliže jsou hvězdy vidět, tak není jasná obloha.

Hvězdy nejsou vidět.

Formálně a s ohodnocením na základě metody protipříkladu:

$p_1 \rightarrow q_1$ 1
$p_1 \rightarrow \neg_0 q_1$ 0

$\neg_0 p_1$ 0

Úsudek je platný, neboť neexistuje taková valuace, při níž by všechny premisy byly pravdivé a závěr přitom nepravdivý.

6) Není pravda, že máš ráda psy a kočky.
Máš ráda psy.

Nemáš ráda kočky.

Formálně a s ohodnocením na základě metody protipříkladu:

$\neg_0(p_1 \wedge q_1)$ 0
p_1 1

$\neg_0 q_1$ 0

Úsudek je platný, neboť neexistuje taková valuace, při níž by všechny premisy byly pravdivé a závěr přitom nepravdivý.

7) Pavel ví, že Regina je vdaná.
Není-li Kvido ženatý, není Regina vdaná.

Kvido je ženatý.

Tento úsudek bychom mohli formalizovat a pak ohodnotit takto:

p_1 1
$\neg_1 q_0 \rightarrow \neg_1 r_0$ 1

---

q_0 0

Načež bychom konstatovali, že úsudek není platný. V daném případě bychom ovšem mohli využít skutečnosti, že vědění (to, že Pavel ví, že *r*) je faktivum, takže protože Pavel ví, že *r*, proto platí *r*; toto *r* bychom pak zahrnuli mezi premisy:

p_1	1
$\neg_1 q_0 \rightarrow \neg_1 r_0$	1
r_0	0
q_0	0

Úsudek je pak platný, protože není možná taková valuace, při níž by všechny premisy byly pravdivé a závěr přitom nepravdivý.

8) Jestliže bydlím v Praze, bydlím v Čechách.
Jestliže bydlím v Brně, bydlím na Moravě.

Jestliže bydlím v Praze, bydlím na Moravě
nebo jestliže bydlím v Brně, bydlím v Čechách.

Formálně a s ohodnocením na základě metody protipříkladu:

$p_1 \rightarrow q_0$	0
$r_1 \rightarrow s_0$	0
$(p_1 \rightarrow s_0) \vee (r_1 \rightarrow q_0)$	0

Ač je to poněkud překvapivé, úsudek je platný, protože není možná taková valuace, při níž by všechny premisy byly pravdivé a závěr přitom nepravdivý.

12.5 Cvičení – ověřování platnosti úsudků metodou protipříkladu

Metodou protipříkladu ověřte platnost následujících úsudků:

1) Jestliže jste si koupili ledničku, pak nebudete jíst zkažené potraviny.
Nekoupili jste si ledničku.

Budete jíst zkažené potraviny.

2) Není pravda, že uchazeč umí anglicky i německy.
Uchazeč neumí anglicky.

Uchazeč neumí německy.

3) Jestliže Pavel má auto, pak má auto Kvido.
Pavel nemá auto.

Jestliže Pavel nemá auto, pak Kvido nemá auto.

4) Nepojedu autem nebo přijdu pozdě.
Nepojedu-li autem, nedostanu peníze.

Jestliže dostanu peníze, tak přijdu pozdě.

5) Sledujeme televizi nebo hrajeme šachy.
Jestliže sledujeme televizi, bavíme se pasivně.

Jestliže se nebavíme pasivně, hrajeme šachy.

6) Končí-li celé číslo 0 nebo 5, je dělitelné 5.
Dané číslo je dělitelné 5.
Dané číslo nekončí 0.

Dané číslo nekončí 5.

7) Viníkem je Petr nebo Kvido.
Je-li viníkem Petr, pak Robert nebyl v Praze.
Je-li viníkem Kvido, pak je jasný motiv činu.

Byl-li Robert v Praze, pak je jasný motiv činu.

8) Jestliže odešel a nezanechal vzkaz, tak se nevrátí.
Jestliže nemá peníze, tak se vrátí.

Jestliže nemá peníze a odešel, tak zanechal vzkaz.

9) Je-li dnes středa, je schůze.
Je úterý nebo středa.
Je-li svátek, není úterý.

Je schůze.

10) Jestliže studuji, dosáhnu dobrého postavení.
Jestliže nestuduji, tak si užívám.

Užívám si nebo dosáhnu dobrého postavení.

11) Jestliže pracuji, pak vydělávám, ale jsem-li líný, pak si užívám.
Buď pracuji, nebo jsem líný.
Jestliže však pracuji, tak si neužívám, zatímco jestliže jsem líný, tak nevydělávám.

Proto si užívám.

12) Jestliže Adam mluvil pravdu, je Beata v Plzni.
Je-li úterý, Beata není v Plzni.
Je úterý nebo středa.

Jestliže Adam mluvil pravdu, je středa.

13) Neběží-li motor, je vada v motoru nebo nejde proud.
Je-li vada v motoru, je třeba volat opraváře.
Proud jde.

Neběží-li motor, je třeba volat opraváře.

14) Je-li Alois v Brně, Brigita je v Praze.
Je-li úterý, Brigita není v Praze.
Je-li 15. 3., je úterý.

Není-li Alois v Brně, není 15. 3.

15) Nepřijde-li Petr, Kvido nepřijde.
Přijde-li Petr, pak přijde Kvido i Robert.

Robert přijde, jestliže přijde Kvido.

16) Je-li dnes čtvrtek, je schůze.
Není-li ředitel přítomen, není schůze.
Ředitel není přítomen nebo je pátek.
Je-li pátek, není schůze.

Není schůze.

17) Petr pojede autobusem nebo vlakem.
Jede-li Petr autobusem nebo svým vozem, pak přijde pozdě a zmešká schůzku.
Petr nepřijde pozdě.

Petr pojede vlakem.

12.5 Řešení – ověřování platnosti úsudků metodou protipříkladu

1) $(p \rightarrow \neg q), \neg p \therefore q$; úsudek není platný.

2) $\neg(p \wedge q), \neg p \therefore \neg q$; úsudek není platný.

3) $(p \rightarrow q), \neg p \therefore (\neg p \rightarrow \neg q)$; úsudek není platný.

4) $(\neg p \vee q), (\neg p \rightarrow \neg r) \therefore (r \rightarrow q)$; úsudek je platný.

5) $(p \vee q), (p \rightarrow r) \therefore (\neg r \rightarrow q)$; úsudek je platný.

6) $((p \vee q) \rightarrow r), r, \neg p \therefore \neg q$; úsudek není platný.

7) $(p \vee q), (p \rightarrow \neg r), (q \rightarrow s) \therefore (r \rightarrow s)$; úsudek je platný.

8) $((p \wedge \neg q) \rightarrow \neg r), (\neg s \rightarrow r) \therefore ((\neg s \wedge p) \rightarrow q)$; úsudek je platný.

9) $(p \rightarrow q), (r \vee p), (s \rightarrow \neg r) \therefore q$; úsudek není platný.

10) $(p \rightarrow q), (\neg p \rightarrow r) \therefore (r \vee q)$; úsudek je platný (při vylučovací disjunkci ale platný není).

11) $(p \rightarrow v) \wedge (l \rightarrow u), (p \vee l), (p \rightarrow \neg u) \wedge (l \rightarrow \neg v) \therefore u$; úsudek není platný.

12) $(p \rightarrow q), (u \rightarrow \neg q), (u \vee s) \therefore (p \rightarrow s)$; úsudek je platný.

13) $(\neg m \rightarrow (v \vee \neg p)), (v \rightarrow o), p \therefore (\neg m \rightarrow o)$; úsudek je platný.

14) $(p \rightarrow q), (r \rightarrow \neg q), (s \rightarrow r) \therefore (\neg p \rightarrow \neg s)$; úsudek není platný.

15) $(\neg p \rightarrow \neg q), (p \rightarrow (q \wedge r)) \therefore (r \leftarrow q)$; úsudek je platný.

16) $(p \rightarrow q), (\neg r \rightarrow \neg q), (\neg r \vee s), (s \rightarrow \neg q) \therefore \neg q$; úsudek je platný.

17) $(p \vee q), (p \vee r) \rightarrow (s \wedge t), \neg s \therefore q$; úsudek je platný.

12.6 Cvičení – ověření platnosti z dvojice úsudků metodou protipříkladu

Zjistěte, které úsudky z následujících dvojic úsudků, jsou platné:

1)

a) Je-li hezky, jdeme na procházku.
Je hezky.
———
Jdeme na procházku.

b) Je-li hezky, jdeme na procházku.
Není hezky.
———
Nejdeme na procházku.

2)

a) Je-li hezky, jdeme na procházku.
Jdeme na procházku.
———
Je hezky.

b) Je-li hezky, jdeme na procházku.
Nejdeme na procházku.
———
Není hezky.

3)

a) Karel je doma nebo v kině.
Je-li Karel doma, Jana doma není.
Jana je doma.
———
Karel je v kině.

b) Karel je doma nebo v kině.
Je-li Karel doma, Jana doma není.
Jana není doma.
———
Karel je v kině.

4)

a) Žárovka B nesvítí, nebo svítí-li žárovka A, nesvítí žárovka C.
———
Svítí-li žárovka A nebo B, nesvítí žárovka C.

b) Žárovka B nesvítí, nebo svítí-li žárovka A, nesvítí žárovka C.
———
Svítí-li žárovka A i B, nesvítí žárovka C.

5)

a)

Jsou-li splněny podmínky A a B, nastává jev C.
Nenastává jev C.
Není splněna podmínka A.

Není splněna podmínka B.

b)

Nejsou-li splněny podmínky A a B, nastává jev C.
Nastává jev C.
Podmínka A je splněna.

Podmínka B je splněna.

12.6 Řešení – ověření platnosti z dvojice úsudků metodou protipříkladu

1) Platným úsudkem je pouze úsudek a); $(h \rightarrow p)$, $h \therefore p$.

2) Platným úsudkem je pouze úsudek b); $(h \rightarrow p)$, $\neg p \therefore \neg h$.

3) Platným úsudkem je pouze úsudek a); $(d \vee k)$, $(d \rightarrow \neg j)$, $j \therefore k$.

4) Platným úsudkem je pouze úsudek b); $(\neg b \vee (a \rightarrow \neg c)) \therefore ((a \wedge b) \rightarrow \neg c)$.

5) Z dané dvojice úsudků není žádný platný.

12.7 Cvičení – ověřování platnosti úsudkových forem metodou protipříkladu

Metodou protipříkladu ověřte, zda jsou platné následující úsudkové formy:

1)

$$\frac{\begin{array}{l} p \leftrightarrow q \\ p \end{array}}{q}$$

2)

$$\frac{\begin{array}{l} p \\ \neg\neg p \end{array}}{\neg\neg p}$$

3)
$$\frac{\begin{array}{l} p\wedge q \\ \neg p\rightarrow q \end{array}}{\neg q}$$

4)
$$\frac{\begin{array}{l} p \\ q\rightarrow\neg p \end{array}}{\neg q}$$

5)
$$\frac{\begin{array}{l} p\vee\neg q \\ q\rightarrow p \end{array}}{q\rightarrow r}$$

6)
$$\frac{\begin{array}{l} (p\vee q)\rightarrow(p\wedge q) \\ p\wedge q \end{array}}{p\vee q}$$

7)
$$\frac{\begin{array}{l} p\rightarrow q \\ p\rightarrow r \end{array}}{q\vee r}$$

8)
$$\frac{\begin{array}{l} p\rightarrow q \\ q\rightarrow r \end{array}}{r\rightarrow p}$$

9)
$$\frac{\begin{array}{l} q\rightarrow r \\ r\rightarrow p \end{array}}{q\rightarrow p}$$

10)
$$\frac{\begin{array}{l} p\rightarrow q \\ \neg q\rightarrow\neg r \end{array}}{r\rightarrow p}$$

11)
$$\frac{\begin{array}{l} (p\wedge q)\rightarrow r \\ \neg p\wedge\neg r \end{array}}{\neg q}$$

12)
$$\frac{\begin{array}{l} p\rightarrow(q\vee r) \\ (q\vee r)\rightarrow\neg p \end{array}}{\neg p}$$

13)
$$\frac{\begin{array}{l} p\rightarrow q \\ \neg r\rightarrow\neg q \end{array}}{\neg r\rightarrow\neg p}$$

14)
$$\frac{\begin{array}{l} \neg p\wedge\neg q \\ r \end{array}}{p\wedge q}$$

15)
$$\frac{\begin{array}{l} \neg p\vee q \\ \neg r\vee s \end{array}}{(\neg p\vee s)\vee(r\vee q)}$$

16)
$$\frac{\begin{array}{l} (p\vee q)\leftrightarrow r \\ r \\ \neg p \end{array}}{q}$$

17) $p \to (q \to r)$
$q \to (\neg r \to s)$
$(r \lor s) \to t$
―――――――
$p \to t$

18) $(p \lor q) \to \neg(r \land \neg s)$
$r \land \neg s$
―――――――
$\neg(p \lor q)$

19) $(p \to q) \land r$
$q \land r$
$q \to s$
―――――――
$p \to s$

20) $(p \lor q) \to (r \land s)$
r
$t \to \neg s$
―――――――
$t \to (\neg p \land \neg q)$

12.7 Řešení – ověřování platnosti úsudkových forem metodou protipříkladu

Platné jsou úsudkové formy z 1)–2), 4), 6), 9), 12)–13), 15)–16), 18)–20).
Neplatné jsou úsudkové formy z 3), 5), 7)–8), 10)–11), 14), 17).

12.8 Cvičení – ověření platnosti z dvojic úsudkových forem metodou protipříkladu

Rozhodněte, které úsudkové formy z následujících dvojic úsudkových forem jsou platné:

1)

a) $p \lor q$
$\neg p$
―――
q

b) $p \lor q$
p
―――
$\neg q$

2)

a) $(p \lor q) \to (p \land q)$
$\neg(p \lor q)$
―――――――
$\neg(p \land q)$

b) $(p \lor q) \to (p \land q)$
$p \lor q$
―――――――
$p \land q$

3)

a) $p \to (q \to r)$
$(q \to r) \to s$
―――
$p \to s$

b) $p \to (q \to r)$
$q \to (r \to s)$
―――
$p \to s$

4)

a) $(p \to q) \wedge (r \to s)$
$\neg q \vee \neg r$
―――
$\neg q \vee \neg s$

b) $(p \to q) \wedge (r \to s)$
$q \vee r$
―――
$q \vee s$

5)

a) $(p \vee q) \to r$
$r \to (p \wedge q)$
―――
$(p \vee q) \to (p \wedge q)$

b) $(p \vee q) \to r$
$r \to (p \wedge q)$
―――
$(p \wedge q) \to (p \vee q)$

12.8 Řešení – ověření platnosti z dvojice úsudkových forem metodou protipříkladu

1) Platnou úsudkovou formou je pouze úsudková forma a).

2) Z dané dvojice úsudkových forem jsou obě platné.

3) Platnou úsudkovou formou je pouze úsudková forma a).

4) Platnou úsudkovou formou je pouze úsudková forma b).

5) Z dané dvojice úsudkových forem jsou obě platné.

13. Axiomatický systém VL a pojem důkazu

Už Euklidés, který položil základy moderním úvahám o *axiomatických* (*formálních*) *systémech*, narazil na to, že množina – v jeho případě geometrických – pravd je nekonečná. Kromě problému s určením takovéto rozsáhlé množiny tu jde i o problém, jak se ujistit, že libovolná pravda z dané množiny skutečně je pravdou. Pojem axiomatického systému pak vlastně řeší oba naznačované problémy najednou. Při sestavování axiomatického systému nejprve zvolíme (konečnou) množinu základních, evidentních a tedy důkaz nevyžadujících pravd, tzv. *axiomů*. Dále zvolíme (konečnou) množinu bezpečných prostředků, tzv. *odvozovacích pravidel* (někdy zvaných *dedukční* či *derivační pravidla*), jež umožňují z množiny axiomů generovat další pravdy, tzv. *teorémy*. Axiomatický systém je tedy dán axiomy a pravidly odvození. Jednotlivé teorémy, tedy dokazované pravdy, jsou vždy demonstrovány pomocí *důkazů*, tj. posloupností pravd daných (čili axiomů) nebo již dokázaných (čili teorémů), přičemž jednotlivé prvky této posloupnosti jsou získávány pomocí pravidel odvozování. Ve 20. století se zjistilo (zvl. díky Gödelovým výsledkům), že pojem pravdy ve smyslu pravdivé formule a pojem dokazatelné formule je žádoucí od sebe oddělit. Mohli bychom říci, že mnohé zde prováděné úvahy patří do tzv. *metalogiky*, v tuzemsku se tento termín ale neužívá.

13.1 Axiomatické systémy pro VL

V následujícím výkladu předkládáme několik možných *axiomatických systém*ů *VL*. V prostředí matematické logiky se často mluví o *kalkulech* k VL. Struktura jiných axiomatických systémů VL je analogická. Každý axiomatický systém *S* je zadán:

1) formálním jazykem (bez sémantiky),
2) množinou axiomů,
3) množinou odvozovacích pravidel.

Tato struktura je vynucena tím, že bod 1) určuje množinu správně utvořených formulí VL, jež jediné nás na rozdíl od nesprávně utvořených formulí zajímají. Určením množiny axiomů, bod 2), vyčleňujeme v množině správně utvořených formulí určitou množinu pravd; zbylé pravdy pak generujeme pomocí pravidel odvození, bod 3), jakožto teorémy.

Toto rozdělení axiomatického systému (kalkulu) do tří částí je však do jisté míry artificiální, například jazyk je obsažen ve formulích a tedy i v axiomech. Takováto úvaha však může jít dále k názoru, že axiomy jsou jakási bezprostřední pravidla. To by pak znamenalo, že axiomatický systém (kalkul) můžeme jednoduše chápat jako jednoznačně určený množinou pravidel.

1) Formální jazyk

Formální jazyk, zadaný abecedou a gramatikou, je tedy relativní k danému axiomatickému systému. V případě standardního axiomatického systému VL je často vybírán jazyk, jehož jedinými spojkami jsou $\neg$ a $\rightarrow$.

2) Axiomy

Axiomy daného axiomatického systému *S* jsou základní vybrané formule *S*. Volba axiomů totiž není libovolná. Aby byl daný axiomatický systém korektní, tedy abychom dokazovali jen logicky pravdivé formule, volba podléhá dvěma kritériím: a) každý axiom je tautologie, b) množina axiomů musí umožňovat, aby se z nich daly odvodit pokud možno všechny logicky platné formule. Přitom je rozumné, aby tato množina byla minimální, tedy aby žádný axiom nebyl dokazatelný z jiných axiomů; volíme tedy tzv. *nezávislou množinu axiomů* – axiom je nezávislý tehdy, když by množina teorémů byla menší, kdyby byl tento axiom odejmut.

Tzv. *formalizované* (či *axiomatizované*, *axiomatické*) *teorie* mají kromě axiomů definovány i *mimologické axiomy* či jinak řečeno *postuláty*, které obsahují *mimologické pojmy*, tj. pojmy z předmětné oblasti, o níž daná teorie vypovídá. Tyto postuláty nebývají logicky pravdivé, nebývají to tautologie. Příkladem je třeba některá axiomatická teorie množin.

Běžně uvažovanými axiomy VL jsou:

Axiom 1: $p\rightarrow(q\rightarrow p)$
Axiom 2: $(p\rightarrow(q\rightarrow r))\rightarrow((p\rightarrow q)\rightarrow(p\rightarrow r))$
Axiom 3: $(\neg q\rightarrow\neg p)\rightarrow(p\rightarrow q)$

Aby bylo možno z pravidel odvození vypustit Pravidlo substituce (srov. níže), jsou obvykle volena *axiomová schémata*. Protože obsahují metaproměnné pro formule, každé axiomové schéma reprezentuje nekonečně mnoho jednotlivých axiomů, které by vznikly substitucí.

Axiom 1: $A\rightarrow(B\rightarrow A)$
Axiom 2: $(A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C))$
Axiom 3: $(\neg B\rightarrow\neg A)\rightarrow(A\rightarrow B)$

Existují i jiné sady axiomových schémat, například:

$A \to (B \to A)$
$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
$(\neg B \to \neg A) \to ((\neg A \to B) \to A)$
$(A \wedge B) \to A$ alt. $(A \wedge B) \to B$
$A \to (B \to (A \wedge B))$
$A \to (A \vee B)$ alt. $B \to (A \vee B)$
$(A \to B) \to ((A \to B) \to (A \vee B) \to C))$

Dokonce je možná i jednoprvková množina axiomů pro jazyk s $\neg$ a $\to$, obsahuje:

$$((((A \to B) \to (\neg C \to \neg D)) \to C) \to E) \to ((E \to A) \to (D \to A))$$

Pro axiomatický systém, jehož jazyk obsahuje jako operátor jen $\uparrow$, je takovým jediným axiomem:

$$(A \uparrow (B \uparrow C)) \uparrow ((D \uparrow (D \uparrow D)) \uparrow ((E \uparrow B) \uparrow ((A \uparrow E) \uparrow (A \uparrow E))))$$

(Pravidlem odvození v tomto systému není Modus ponens, ale A, $A \uparrow (A \uparrow C)$ / C.) (Tautologičnost všech těchto axiomů lze snadno ověřit například tabulkovou metodou.)

3) Pravidla odvozování

Modus ponens (MP)

$$\frac{\begin{array}{l} A \to B \\ A \end{array}}{B}$$

Pravidlo substituce

$$\frac{A}{A[B/a]}$$

(Pomocí $[B/a]$ vyznačujeme nahrazení všech výskytů a v A pomocí B.)

MP je obligátním pravidlem odvozování (Modus ponendo ponens, lat. způsob kladně kladný; alternativní název je pravidlo odloučení, angl. „rule of detachment"; byl objeven Stoiky, kteří ho nazývali hypoteticko-kategorický sylogismus). Pravidlo substituce je nezbytné pouze pokud nepoužíváme axiomová schémata.

Podotkněme, že volba odvozovacích pravidel není libovolná. Aby byl systém korektní, musí pravidla zachovávat pravdivost v tom smyslu, že formule, kterou aplikací pravidla obdržíme, je pravdivá alespoň ve všech modelech množiny předpokladů pravidla, tedy že z těchto předpokladů vyplývá. Hovoří se zde proto o *korektnosti odvozovacích pravidel*, přičemž takováto korektnost může být vyjádřena větou, jejíž platnost je následně dokazována. Pro příklad uvažme *Větu o korektnosti pravidla Modus ponens* a to v této podobě: Jestliže formule A a $A \rightarrow B$ jsou tautologiemi, tak i B je tautologií. Důkaz této věty je poměrně jednoduchý, a proto si ho teď předvedeme. Předpokládejme, že A i $A \rightarrow B$ jsou logicky pravdivé formule; proto nemůže existovat v, při níž by B mohla být nepravdivá, poněvadž to by $A \rightarrow B$ nemohla být při této v pravdivá a tedy ani tautologií.

Kromě výše uvedených dvou pravidel si lze odvodit i další pomocná odvozovací pravidla. Mnohá z nich mají svou obdobu v zákonech VL, jež jsou tvaru implikace; to ukazuje důležitost implikace pro vyplývání. Viz takováto pravidla níže v sekci o přirozené dedukci (14.4), popř. gentzenovské dedukci (14.5).

13.2 Důkazy

Posloupnosti formulí, jež jsou výsledky aplikací odvozovacích pravidel, nazýváme *důkazy*. Jejich závěrečnými formulemi jsou formule dokázané, tedy teorémy. Je žádoucí si uvědomit, že jak pojem teorému, tak hlavně pojem důkazu jsou syntaktické pojmy. K získání teorému tedy není nezbytná nějaká sémantická úvaha či snad intuice, ale pouhá manipulace symbolů. Mechaničnost takovéto ‚strukturální' práce se symboly umožňuje nejenom lepší produktivitu pravd po kvalitativní stránce, ale i po stránce kvantitativní, což ukazuje zajímavá oblast počítačově generovaných důkazů, automatické dokazování. Jednotlivé důkazy jsou samozřejmě relativní k jednotlivým axiomatickým systémům, od čehož ovšem mnozí autoři ve svých definicích abstrahují. Podobně abstrahují od toho, že se jedná o důkazy v tom či jiném důkazovém systému. Je však třeba podotknout, že důkazy například v hilbertovském a gentzenovském systému (k oběma v následujících dvou kapitolách) jsou vzájemně přeložitelné.

Důkaz

Konečná posloupnost formulí A_1, A_2, ..., A_n je v daném axiomatickém systému S důkazem právě tehdy, když pro každé i takové, že $1 \leq i \leq n$, je formule A_i buď

1) axiomem S nebo
2) je odvozena aplikací některého pravidla odvození systému S na formule A_j, ..., A_k, přičemž j, ..., $k < i$.

Všimněme si, že podmínky 1) a 2) nejsou vzájemně se vylučující. Na konci důkazů se z historických důvodů někdy uvádí *QED*, příp. q.e.d., což je zkratka za latinské „quod erat demonstrandum", česky „což bylo třeba dokázat". Po straně důkazů se píší *anotace*, které indikují, že daný *krok důkazu* vznikl uplatněním kterého pravidla na které předchozí kroky.

Uveďme si hned jednoduchou ukázku takového obyčejného přímého důkazu bez předpokladů. Dokažme $q \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$. V důkazu použijeme axiom $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ (tj. Ax 1) a pak uplatníme Pravidlo substituce (v následujících kapitolách budeme tyto dva kroky obvykle psát do jednoho řádku):

1. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$	Ax 1
2. $q \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$	Pravidlo substituce (1; q/p, $\neg p/q$)

Důkaz z předpokladů, někdy nazývaný *důkaz z hypotéz*, odděluje předpoklady a vlastní dokazované formule, a proto je formální obdobou běžných úsudků, jež se sestávají z premis a závěrů.

Důkaz z předpokladů

Nechť T je systém formulí. Konečná posloupnost formulí A_1, A_2, ..., A_n je v daném axiomatickém systému S *důkazem ze systému předpokladů* T právě tehdy, když pro každé i takové, že $1 \leq i \leq n$, je formule A_i buď

1) axiomem S nebo
2) je prvkem T nebo
3) je odvozena aplikací některého pravidla odvození systému S na formule A_j, ..., A_k, přičemž j, ..., $k < i$.

Na ukázku dokážeme z předpokladů formuli $q \rightarrow p$, naším předpokladem bude formule p, tj. naší T je $\{p\}$.

1. $p \to (q \to p)$ Ax 1
2. p předpoklad
3. $q \to p$ MP (1,2)

Tímto jsme mimochodem dokázali (odvozené) pravidlo $p \to (q \to p)$, p / $q \to p$. Všimněme si, že v důkazu z předpokladů není každý krok logicky pravdivý, formule p i $q \to p$ jsou totiž netautologické.

Všimněme si ještě, že máme-li v axiomatickém systému *S* dokázat jeho axiom, pak jeho nejjednodušší důkaz má nula kroků, čili důkazem axiomu *S* v systému *S* je axiom sám. (Existují i delší než jednokrokové důkazy axiomů, například Ax 1 odvodíme z Ax 1 pomocí substituce q/p, p/q a pak pomocí substituce p/q, q/p.)

Konečně jsou tu ještě pojmy dokazatelné formule a teorému. (V případě VL ke každé tautologické formuli existuje důkaz bez předpokladů, proto není třeba hovořit o dokazatelnosti z předpokladů.)

Dokazatelnost formule

Formule *A* je *dokazatelná v axiomatickém systému S* právě tehdy, když v tomto systému *S* existuje důkaz, jehož je tato formule posledním členem.

Bylo by užitečné si rezervovat termín „dokazatelná“ pro formule dokázané důkazem bez předpokladů a termín „odvoditelná“ pro formule dokázané (odvozené) důkazem z předpokladů, ale v přirozeném jazyce zakotvená tendence tyto dva termíny zaměňovat činí takovouto úmluvu těžko udržitelnou.

Teorém

Formule *A* je *teorémem axiomatického systému S* právě tehdy, když je dokazatelná v systému *S*. Značíme pomocí $\vdash_S A$.

Někdy se teorémům říká *věty*, ale v případě teorémů studovaných kalkulů (nikoli teorémů naší metalogiky), je tento termín spíš vzácný. (Dodejme, že formule *A* je *vyvratitelná v axiomatickém systému S* právě tehdy, když v *S* existuje důkaz $\neg A$.)

Protože se jedná o dokazování (níže pak vyplývání) vzhledem k *S*, u $\vdash_S$ (v textu níže zase $\models_S$) píšeme „*S*“ v dolním indexu. Pokud ale není nezbytné tuto relativizaci k určitému axiomatickému systému zmiňovat, bývá „*S*“ v dolním indexu vypouštěno.

Nyní uvedeme Davidem Hilbertem dokázaný *Metateorém dedukce* (či *Dedukční teorém*), v současnosti nejčastěji nazývaný *Věta o dedukci*. Ten umožňuje účinně zkracovat důkazy, zejm. důkazy z předpokladů.

Věta o dedukci (VD)

Nechť T je teorie (soubor předpokladů), A a B formule. Potom $T \vdash A \rightarrow B$ právě tehdy, když $T \cup \{A\} \vdash B$.

Všimněme si, že VD vlastně mluví o existenci důkazů: důkaz formule B z A (a z T) existuje právě tehdy, když existuje důkaz formule $A \rightarrow B$ (z T). „$T \cup \{A\}$" bývá obvykle zkracováno na „T, A".

Z hlediska základního praktického užití umožňuje VD převádět platné úsudky na tautologie, a naopak. Díky této souvislosti s úsudky někteří autoři uvádějí tzv. *sémantickou variantu Věty o dedukci*: Nechť T je teorie, A a B formule; potom $T \models A \rightarrow B$ právě tehdy, když $T, A \models B$.

Fungování VD si ukážeme na výše uváděném přímém důkazu z předpokladů:

1. $p \rightarrow p$
2. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$
3. $(p \rightarrow p) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow p))$ VD (1,2)

V našem dalším příkladu si ukážeme, jak se (přímý) důkaz z předpokladů použitý dohromady s VD využívá k dokazování nových pravidel v systémech tzv. přirozené dedukce. Mějme za úkol odvodit pravidlo:

$$\frac{p \rightarrow q}{\neg q \rightarrow \neg p}$$

To znamená, že máme dokázat $\neg q \rightarrow \neg p$ z předpokladu $p \rightarrow q$, tj. $p \rightarrow q \vdash \neg q \rightarrow \neg p$. Důkaz využívá odvozené pravidlo Modus tollens (tj. $A \rightarrow B, \neg B \,/\, \neg A$; srov. níže):

1. $p \rightarrow q$	předpoklad
2. $\neg q$	předpoklad
3. $\neg p$	Modus tollens (1,2)
4. $\neg q \rightarrow \neg p$	VD (2,3)

Nyní uvedeme tři další druhy důkazů, jež jsou kromě přímého důkazu z nebo bez předpokladů často používány. *Nepřímý důkaz* odvoditelnosti B z A je vlastně přímým důkazem odvoditelnosti $\neg A$ z $\neg B$. Pro praktickou ilustraci užití dokažme $p \rightarrow q, \neg q \vdash \neg p$. Náš nepřímý důkaz využívá odvozené Pravidlo eliminace dvojité negace (tj. $\neg\neg A \,/\, A$; srov. níže):

1. $p \rightarrow q$	předpoklad
2. $\neg q$	předpoklad
3. $\neg\neg p$	předpoklad nepřímého důkazu
4. p	Pravidlo eliminace dvojité negace (3)
5. q	MP (1,4)

V daném příkladu dále vede důsledek 5. našeho předpokladu nepřímého důkazu 3. ke sporu s přímým předpokladem 2., takže lze z našich předpokladů 1. a 2. odvodit negaci předpokladu nepřímého důkazu (přesněji to, čeho byl předpoklad nepřímého důkazu negací), totiž:

6. $\neg p$	na základě sporu (3,5)

Takže daný příklad zároveň můžeme pochopit i jako ukázku často používaného *důkazu sporem* (v anglicky píšícím prostředí „reductio ad absurdum", častěji jen „reductio", což se dopisuje do anotace příslušného kroku). (Náš příklad byl záměrně vybrán právě proto, aby ukázal rozdíl mezi nepřímým důkazem a důkazem sporem, který mnohdy není jasný.) Důkaz sporem se zakládá na *Větě o důkazu sporem*: $T \vdash A$ právě tehdy, když $T, \neg A \vdash \neg(B \rightarrow B)$ (kde formule $\neg(B \rightarrow B)$ reprezentuje spor); v sémantické obdobě této věty, tj. s $\models$ namísto $\vdash$, je $T \cup \{\neg A\}$ nesplnitelnou množinou formulí. Budeme-li teď T (jež je konečnou množinou) chápat jednoduše jako formuli, tak to znamená, že $T \rightarrow A$ právě tehdy, když $\neg(T \wedge \neg A)$. V matematice mnohdy užívaný *důkaz rozborem případů* se zase zakládá na *Větě o důkazu rozborem případů*: $T, A \vee B \vdash C$ právě tehdy, když $T, A \vdash C$ a zároveň $T, B \vdash C$.

13.3 Vlastnosti axiomatických systémů VL

U axiomatických systémů nás zajímají tři důležité vlastnosti, jež mohou mít, totiž rozhodnutelnost, bezespornost a úplnost. Prvá zmiňovaná vlastnost, jež v poslední době nebývá příliš často zmiňována, znamená to, že dovedeme rozhodnout, zda je daná formule teorémem daného systému nebo ne. Bezespornost v zásadě znamená, že daný systém negeneruje kromě formule i její negaci, což by v důsledku obnášelo, že by generoval všechny formule vůbec. Úplnost je nejzajímavější, neboť znamená, že daný axiomatický systém generuje všechny logicky pravdivé formule.

Než uvedeme přesné definice, zmíníme důležitý fakt, totiž že pro VL existují rozhodnutelné, bezesporné a úplné axiomatické systémy (kalkuly).

Stručně se pak říká, že *VL je rozhodnutelná, bezesporná, a úplná*. Příkladem takového axiomatického systému je výše uváděný systém s trojicí axiomových schémat a MP.

Pro porozumění pojmu rozhodnutelnosti axiomatického systému musíme nejdříve definovat, co rozhodnutelnost znamená obecně: *množina M* je *rozhodnutelná* ve své nadmnožině *N* právě tehdy, když existuje efektivní algoritmus (tj. procedura o konečném počtu kroků) aplikovatelný na prvky množiny *N*, který o každém prvku množiny *N* určí, zda je, či není, prvkem množiny *M*. Samozřejmě platí, že abeceda jazyka daného axiomatického systému musí být rozhodnutelná v množině všech možných symbolů. Také množina správně utvořených formulí musí být rozhodnutelná v množině všech možných kombinací znaků abecedy. Množina axiomů daného axiomatického systému musí být rozhodnutelná v množině správně utvořených formulí. Když se hovoří o rozhodnutelnosti axiomatického systému, je tím míněn následující pojem.

Rozhodnutelnost

Axiomatický systém *S* je *rozhodnutelný* právě tehdy, když o každé formuli *A* je rozhodnutelné, zda je či není teorémem *S*.

To znamená, že množina teorémů *S* je rozhodnutelná v množině všech formulí VL.

Ve sporném systému je dokazatelná formule *A* i formule ¬*A*; systém je bezesporný, pokud v něm *A* i ¬*A* dokazatelné nejsou.

Syntaktická bezespornost

Axiomatický systém *S* je *syntakticky bezesporný* (*konzistentní*) právě tehdy, když v *S* není dokazatelná věta $A \land \neg A$ (tj. spor).

Někdy bývá přidávána následující definice: Axiomatický systém *S* je *syntakticky úplný* právě tehdy, když přidáme-li k množině axiomů *S* formuli, která není teorémem, tak dostaneme syntakticky sporný systém.

To, že axiomatický systém má být bezesporný, je samozřejmý požadavek. Co už tak samozřejmé být nemusí, je to, zda axiomatický systém jako teorémy generuje pouze tautologie (což je korektnost) a hlavně zda generuje všechny tautologie (což je úplnost).

Korektnost (sémantická bezespornost)

Axiomatický systém S je *korektní (sémanticky bezesporný)* právě tehdy, když pro každou formuli A a systém formulí T platí, že je-li A dokazatelná v S z T, tak A vyplývá z T (je tautologickým důsledkem T).

Čili je-li $T \vdash_S A$, pak $T \models_S A$.

Speciálním případem je, že je-li A dokazatelná v S, tak A je logicky pravdivá (je tautologií):

Čili je-li $\vdash_S A$, pak $\models_S A$.

Tuto větu je možno reformulovat v tom smyslu, že žádný sporný systém T není splnitelný.

Sémantická úplnost

Axiomatický systém S je *sémanticky úplný* právě tehdy, když pro každou formuli A a systém formulí T platí, že jestliže A vyplývá z T (A je tautologickým důsledkem T), tak A je dokazatelná v S z T.

Čili je-li $T \models_S A$, pak $T \vdash_S A$.

Speciálním případem je, že je-li A logicky pravdivá (je tautologií), tak A je dokazatelná v S.

Čili je-li $\models_S A$, pak $\vdash_S A$.

Zde je definována tzv. *silná* sémantická úplnost, *slabá* sémantická úplnost obnáší omezení na konečný soubor formulí T.

13.4 Cvičení – axiomatické systémy, jejich vlastnosti, důkazy

1) Uveďte axiomy či axiomová schémata a odvozovací pravidla či pravidlo některé axiomatizace VL.

2) Vysvětlete rozdíl mezi důkazem a důkazem z předpokladů. Podejte jejich definice.

3) Vysvětlete rozdíl mezi axiomem a teorémem. Definujte teorém.

4) Popište rozdíly mezi přímým i nepřímým důkazem a důkazem sporem. Definujte důkaz sporem.

5) Definujte rozhodnutelnost, syntaktickou bezespornost, korektnost, sémantickou úplnost.

6) Které vlastnosti jmenované v otázce 5) má klasická VL?

14. Důkazové systémy

V této kapitole si ukážeme nejznámější důkazové systémy, tedy systémy organizující dokazování formulí (úžeji: tautologických formulí) z nějakých formulí. Každý z těchto systémů akcentuje jinou stránku našeho běžného usuzování, ovšem některé systémy vystihují naše usuzování lépe než jiné. Například hilbertovská dedukce s důkazy bez předpokladů si adresuje primárně otázku generování tautologických formulí, kdežto předpokladové systémy přirozené dedukce jsou vhodnější ke studiu běžných úsudků; metoda sémantických tabel zase zužitkovává sémantickou rovinu natolik, že není čistě syntaktickou manipulací symbolů. Ne všem těmto systémům věnujeme stejnou pozornost. Ač to nebudeme vždy opakovat, všechny tyto systémy jsou úplné v tom smyslu, že dokazují všechny tautologie VL, a jsou korektní v tom smyslu, že dokazují pouze tautologie.

14.1 Hilbertovská dedukce

Davidem Hilbertem navržený systém dedukce, dále jen *hilbertovská dedukce*, je korektní dedukční kalkul pro VL. Lze snadno ověřit, že všechny axiomy námi uváděného systému jsou tautologie a že jediné pravidlo systému, totiž MP, je korektní, takže formule B, která vznikne aplikací pravidla na formule A_1 a A_2, z těchto formulí logicky vyplývá, čili platí, že pokud $\{A_1, A_2\} \vdash B$, pak $\{A_1, A_2\} \models B$.

Definice formálního systému Hilbertova typu pro VL je:

1) Jazyk s $\neg$, $\rightarrow$.
2) Axiomová schémata:

Ax 1: $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
Ax 2: $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
Ax 3: $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$

3) Odvozovací pravidlo MP:

$A \rightarrow B, A \vdash B.$

Z níže uvedených ilustračních příkladů je zřejmé, že nalezení důkazů i velmi jednoduchých teorémů nemusí být přímočaré. To souvisí s tím, že v axiomatickém systému je minimalizován počet axiomů a počet odvozovacích pravidel na nezbytně nutný počet. S přibývajícím množstvím dokázaných teorémů a odvozených pomocných odvozovacích pravidel se však neustále zlepšují možnosti pro hledání důkazů. Stojí rovněž za zmínku, že rutinou při sestavování strategie důkazu v rámci hilbertovské dedukce je v mysli postupovat od toho, co se má dokázat k bezprostředně předcházejícím formulím. Poté se doplní předpoklady, pokud nějaké jsou. Následně hledáme vhodné substituce do axiomů, abychom mohli pomocí MP dospět k dokazované formuli.

14.2 Příklady důkazů v hilbertovském systému dedukce

1) Dokažte, že platí $\vdash A \to A$. Užijeme obyčejný přímý důkaz:

1.	$A \to (B \to A)$	Ax 1
2.	$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$	Ax 2
3.	$(A \to (B \to A)) \to ((A \to B) \to (A \to A))$	substituce do 3. (A/C)
4.	$(A \to B) \to (A \to A)$	MP (3,1)
5.	$(A \to (B \to A)) \to (A \to A)$	substituce do 4. $((B \to A)/B)$
6.	$A \to A$	MP (5,1)

2) Dokažte, že platí $A \vdash A$. Užijeme přímý důkaz, který je až po krok 5. (včetně) jiným důkazem $A \to A$, než v předchozím příkladu:

1.	$(A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$	Ax 2 $((A \to A)/B, A/C)$
2.	$A \to ((A \to A) \to A)$	Ax 1 $((A \to A)/B)$
3.	$(A \to (A \to A)) \to (A \to A)$	MP (1,2)
4.	$A \to (A \to A)$	Ax 1 (A/B)
5.	$A \to A$	MP (3,4)
6.	$A \vdash A$	VD (5)

3) Dokažte, že platí $A \to C$ za předpokladu $A \to B$ a $B \to C$. Užijeme důkaz z předpokladů:

1.	$A \rightarrow B$	předpoklad
2.	$B \rightarrow C$	předpoklad
3.	$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$	Ax 2
4.	$(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$	Ax 1 ($(B \rightarrow C)/A$, A/B)
5.	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	MP (4,2)
6.	$(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$	MP (3,5)
7.	$A \rightarrow C$	MP (6,1)

4) Dokažte, že platí-li $(A \rightarrow C)$, $(A \rightarrow C)$, $(A \vee B) \vdash C$, tak je dokazatelné $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))$:

1.	$(A \rightarrow C), (B \rightarrow C), (A \vee B) \vdash C$	dané předpoklady
2.	$(A \rightarrow C), (B \rightarrow C) \vdash (A \vee B) \rightarrow C$	VD (1)
3.	$(A \rightarrow C) \vdash (B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)$	VD (2)
4.	$\vdash (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))$	VD (3)

5) Dokažte, že platí A, $\neg A \vdash B$ (Pravidlo Dunse Scota). Užijeme důkaz z předpokladů:

1.	A	předpoklad
2.	$\neg A$	předpoklad
3.	$(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$	Ax 3
4.	$\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$	Ax 1 ($\neg A/A$, $\neg B/B$)
5.	$\neg B \rightarrow \neg A$	MP (4,2)
6.	$A \rightarrow B$	MP (3,5)
7.	B	MP (6,1)

S pomocí VD pak můžeme dokázat $\vdash A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$:

8.	$\neg A \rightarrow B$	VD (2,7)
9.	$A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$	VD (1,8)

6) Dokažte, že $\vdash \neg A \to (A \to B)$. Užijeme obyčejný přímý důkaz:

1.	$\vdash \neg A \to (\neg B \to \neg A)$	Ax 1 ($\neg A/A$, $\neg B/B$)
2.	$\neg A \vdash (\neg B \to \neg A)$	VD (1)
3.	$\neg A \vdash (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$	Ax 3
4.	$\neg A \vdash (A \to B)$	MP (3,2)
5.	$\vdash \neg A \to (A \to B)$	VD (4)

7) Dokažte, že $\neg\neg A \vdash A$:

1.	$\vdash \neg\neg A \to (\neg A \to \neg\neg\neg A)$	teorém $\neg A \to (A \to B)$ ($\neg A/A$, $\neg\neg\neg A/B$)
2.	$\vdash (\neg A \to \neg\neg\neg A) \to (\neg\neg A \to A)$	Ax 3 ($\neg\neg A/A$, B/A)
3.	$\neg\neg A \vdash (\neg A \to \neg\neg\neg A)$	VD (1)
4.	$\neg\neg A \vdash (\neg\neg A \to A)$	MP (3,2)
5.	$\neg\neg A \vdash A$	VD (4)

Pohodlný je i důkaz z předpokladů:

1.	$\neg\neg A$	předpoklad
2.	$(\neg A \to \neg\neg\neg A) \to (\neg\neg A \to A)$	Ax 3
3.	$\neg\neg A \to (\neg A \to \neg\neg\neg A)$	teorém $\vdash A \to (\neg A \to B)$
4.	$\neg A \to \neg\neg\neg A$	MP (1,3)
5.	$\neg\neg A \to A$	MP (4,2)
6.	A	MP (1,5)

8) Dokažte, že platí $\vdash A \to \neg\neg A$:

1.	$\neg\neg\neg A \to \neg A$	teorém $\neg\neg A \to A$ ($\neg A/A$)
2.	$(\neg\neg\neg A \to \neg A) \to (A \to \neg\neg A)$	Ax 3 ($\neg A/A$)
3.	$A \to \neg\neg A$	MP (3,2)

9) Dokažte, že platí $\vdash \neg(A\to\neg B)\to A$, resp. pravidlo $\neg(A\to\neg B) \vdash A$:

1.	$\neg(A\to\neg B)$	předpoklad
2.	$(\neg A\to(A\to\neg B))\to(\neg(A \to \neg B)\to\neg\neg A)$	teorém $\vdash (A\to B)\to(\neg B\to\neg A)$
3.	$\neg A\to(A\to\neg B)$	teorém $\vdash A\to(\neg A\to B)$
4.	$\neg(A\to\neg \mathrm{B})\to\neg\neg A$	MP (3,2)
5.	$\neg\neg A$	MP (1,4)
6.	$\neg\neg A\to A$	teorém $\vdash \neg\neg A\to A$
7.	A	MP (5,6)
8.	$\vdash \neg(A\to\neg B)\to A$	VD (1,7)

14.3 Přirozená dedukce

Hilbertovská dedukce má stále zastánce třeba v matematických kruzích, je však asi stěží obhajitelná jako model našeho běžného usuzování. Už v době vzniku moderní logiky byly hledány její alternativy, jež by naše přirozené uvažování vystihovaly lépe. Pionýrské práce Gerharda Gentzena (a nezávisle Stanisława Jaśkowského) přitom vedly ke dvěma důležitým současným druhům důkazových systémů, přirozené dedukci a k sekvenčnímu kalkulu. Myšlenka *přirozené dedukce*, která si ve svém vyjádření ponechává mnohé z hilbertovské dedukce, se opírá o řadu intuitivně platných odvozovacích pravidel, nikoli o jedno, jak je tomu v hilbertovské dedukci. To značně usnadňuje usuzování. Tato pravidla byla známa již po staletí, a proto mají mnohá tradiční názvy.

Zde je seznam těch nejznámějších odvozovacích pravidel:

Modus ponens (MP; modus ponendo ponens; pravidlo odloučení):

$$\frac{\begin{matrix}A\to B\\ A\end{matrix}}{B}$$

Modus tollens (MT; modus tollendo tollens, lat. způsob záporně záporný):

$$\frac{\begin{matrix}A\to B\\ \neg B\end{matrix}}{\neg A}$$

Pravidlo *Disjunktivní sylogismus* (DS; starším názvem Modus tollendo ponens, lat. způsob záporně kladný):

nebo:

$$\begin{array}{l} A\vee B \\ \neg A \\ \hline B \end{array} \qquad \begin{array}{l} A\vee B \\ \neg B \\ \hline A \end{array}$$

Pravidlo Dunse Scota (PDS) (ze sporu plyne cokoliv, srov. zákon Dunse Scota):

event.

$$\begin{array}{l} A \\ \neg A \\ \hline B \end{array} \qquad \begin{array}{l} A\wedge\neg A \\ \hline B \end{array}$$

Pravidlo *Hypotetický sylogismus* (HS):

$$\begin{array}{l} A\rightarrow B \\ B\rightarrow C \\ \hline A\rightarrow C \end{array}$$

Pravidlo *Reductio ad absurdum* (RAA):

$$\begin{array}{l} A\rightarrow B \\ A\rightarrow\neg B \\ \hline \neg A \end{array}$$

Pravidlo simplifikace (Simp):

nebo:

$$\begin{array}{l} A\wedge B \\ \hline A \end{array} \qquad \begin{array}{l} A\wedge B \\ \hline B \end{array}$$

Pravidlo přidání (Add):

nebo:

$$\begin{array}{l} A \\ \hline A\vee B \end{array} \qquad \begin{array}{l} B \\ \hline A\vee B \end{array}$$

Pravidlo *Konstruktivní dilema* (KD):

$$\begin{array}{l} A\rightarrow B \\ C\rightarrow D \\ A\vee C \\ \hline B\vee D \end{array}$$

Pravidlo *Destruktivní dilema* (DD):

$$\begin{array}{l} A\rightarrow B \\ C\rightarrow D \\ \neg B\vee\neg D \\ \hline \neg A\vee\neg C \end{array}$$

Pravidlo *Jednoduché konstruktivní dilema* (JKD):

$$\begin{array}{l} A\rightarrow C \\ B\rightarrow C \\ A\vee B \\ \hline C \end{array}$$

Pravidlo *Jednoduché destruktivní dilema* (JDD):

$$\begin{array}{l} A\rightarrow B \\ A\rightarrow C \\ \neg B\vee\neg C \\ \hline \neg A \end{array}$$

Pravidlo absorbce (Abs):

$$\frac{A \to B}{A \to (A \wedge B)}$$

Pravidlo exportace (Exp):

$$\frac{A \to (B \to C)}{(A \wedge B) \to C} \quad \text{nebo:} \quad \frac{(A \wedge B) \to C}{A \to (B \to C)}$$

Často se uvažují také pravidla pro introdukci nebo eliminaci jednotlivých spojek, například zavedení konjunkce A, B / $A \wedge B$, dále De Morganovy zákony, atd. (některá z těchto pravidel jsou explicitně uvedena níže v sekci o gentzenovské dedukci). Na tyto zákony budeme odkazovat buď snadno pochopitelnými zkratkami, anebo jejich explicitním uvedením.

Nyní ještě jedna doplňující informace. Jak lze zjistit, dokázání podmíněných tvrzení, tj. formulí tvaru $A \to B$, je v přirozené dedukci obtížné a někdy jednoduše nemožné. Z hilbertovského dokazování víme, že by v takových případech šlo aplikovat Větu o dedukci a dokázanou formuli B tedy podmínit formulí A, jež se nám v důkazu vyskytla někde výše. Náhrada VD existuje ve variantě přirozené dedukce, kterou navrhl Frederic B. Fitch, někdy se úžeji hovoří o *podmiňovaném důkazu*, angl. „conditional proof" (to, že jsme k nějakému kroku dospěli pomocí něj, bývá indikováno pomocí CP). V anglicky psaných úvodech do logiky se s touto důkazovou technikou setkáváme poměrně často, my ji však používat nebudeme. Podstata dokazování tkví v tom, že v průběhu dokazování přijmeme dočasný předpoklad (dále jen DP), který nám z dosavadního umožní odvodit formuli, kterou podmíníme tímto DP. Tomu, že se nám v důkazu objeví příslušná implikace a tedy onen vnořený důkaz je ukončen, se říká vypuštění (angl. „discharge"). Daný vnořený důkaz bývá oddělován čarou, zde jsou dvě notační varianty téhož.

1.	$A \to B$	předpoklad
2.	A	DP
3.	B	MP (1,2)
4.	$A \wedge B$	zavedení $\wedge$ (2,3)
5.	$A \to (A \wedge B)$	CP (2,4)

1.	$A \to B$	předpoklad
2.	A	DP
3.	B	MP (1,2)
4.	$A \wedge B$	zavedení $\wedge$ (2,3)
5.	$A \to (A \wedge B)$	CP (2,4)

Ještě dodejme, že oněch ‚vnořených' důkazů může být v jednom důkazu více. Následně dostaneme podobnost s důkazy v sekvenčním kalkulu, který rovněž běžně pracuje s takto komplexními důkazy.

14.4 Příklady důkazů v systému přirozené dedukce

Základní strategii vedení důkazů v přirozené dedukci lze z několika příkladů rychle pochopit i bez vysvětlování. V premisách se snažíme ‚uvidět' hledanou formuli, a to jako následek některého (nebo některých) z pravidel z našeho rezervoáru pravidel. V průběhu důkazu se dostáváme do situací, které vyloženě volají po užití určitého pravidla, načež se posouváme v důkazu dopředu. Stojí ještě za poznámku, že množinu odvozovacích pravidel lze různým způsobem rozdělit na pravidla základní a odvozená, kdy ta odvozená jsou odvozena z těch základnějších. Důkazem nějaké formule z množiny jiných formulí získáváme v přirozené dedukci další odvozené dedukční pravidlo.

1) Dokažte, že z formule $A \wedge (A \rightarrow \neg B)$ lze odvodit $\neg B$, tj. $A \wedge (A \rightarrow \neg B) \vdash \neg B$.

1.	$A \wedge (A \rightarrow \neg B)$	předpoklad
2.	$A \rightarrow \neg B$	Simp (1)
3.	A	Simp (1)
4.	$\neg B$	MP (2,3)

2) Dokažte, že z formulí $A \rightarrow \neg B$, A a $C \rightarrow B$ lze odvodit $\neg C$.

1.	$A \rightarrow \neg B$	předpoklad
2.	A	předpoklad
3.	$C \rightarrow B$	předpoklad
4.	$\neg B$	MP (1,2)
5.	$\neg C$	MT (3,4)

3) Dokažte, že z formulí $A \rightarrow B$, $A \wedge \neg D$ a $B \rightarrow C$ lze odvodit $C \wedge \neg D$.

1.	$A \rightarrow B$	předpoklad

2.	$A\wedge\neg D$	předpoklad
3.	$B\rightarrow C$	předpoklad
4.	A	Simp (2)
5.	B	MP (1,4)
6.	C	MP (3,5)
7.	$\neg D$	Simp (2)
8.	$C\wedge\neg D$	zavedení $\wedge$ (6,7)

4) Dokažte, že z formulí $A\vee(B\rightarrow A)$ a $\neg A$ lze odvodit $\neg B$.

1.	$A\vee(B\rightarrow A)$	předpoklad
2.	$\neg A$	předpoklad
3.	$B\rightarrow A$	DS (1)
4.	$\neg B$	MT (3,2)

5) Dokažte, že z formulí A a $\neg A$ lze odvodit B, tedy Pravidlo Dunse Scota.

1.	A	předpoklad
2.	$\neg A$	předpoklad
3.	$A\vee B$	Pravidlo přidání (Add, tj. zavedení $\vee$) (1)
4.	B	DS (3,1)

6) Dokažte, že z formulí $A\rightarrow(B\rightarrow C)$, $D\rightarrow(C\rightarrow E)$, A a D lze odvodit $B\rightarrow E$.

1.	$A\rightarrow(B\rightarrow C)$	předpoklad
2.	$D\rightarrow(C\rightarrow E)$	předpoklad
3.	A	předpoklad
4.	D	předpoklad
5.	$B\rightarrow C$	MP (1,3)
6.	$C\rightarrow E$	MP (2,4)
7.	$B\rightarrow E$	HS (5,6)

7) Dokažte, že z formulí $A \to B$, $\neg B$ a $\neg A \to C$ lze odvodit $\neg A \wedge C$.

1.	$A \to B$	předpoklad
2.	$\neg B$	předpoklad
3.	$\neg A \to C$	předpoklad
4.	$\neg A$	MT (1,2)
5.	C	MP (3,4)
6.	$\neg A \wedge C$	zavedení $\wedge$ (4,5)

8) Dokažte, že z formulí $A \vee B$, $C \to D$, $A \to C$ a $\neg D$ lze odvodit B.

1.	$A \vee B$	předpoklad
2.	$C \to D$	předpoklad
3.	$A \to C$	předpoklad
4.	$\neg D$	předpoklad
5.	$\neg C$	MT (2,4)
6.	$\neg A$	MT (3,5)
7.	B	DS (1,6)

9) Dokažte, že z formulí $A \to (B \to C)$, $C \vee A$ a $\neg C$ lze odvodit $\neg B$.

1.	$A \to (B \to C)$	předpoklad
2.	$C \vee A$	předpoklad
3.	$\neg C$	předpoklad
4.	A	DS (2,3)
5.	$B \to C$	MP (1,4)
6.	$\neg B$	MT (5,3)

10) Dokažte, že z formulí $A \to B$, $(B \vee C) \to (D \wedge E)$ a A lze odvodit D.

1.	$A \rightarrow B$	předpoklad
2.	$(B \vee C) \rightarrow (D \wedge E)$	předpoklad
3.	A	předpoklad
4.	B	MP (1,3)
5.	$B \vee C$	zavedení $\vee$ (4)
6.	$D \wedge E$	MP (2,5)
7.	D	Simp (6)

11) Dokažte, že z formulí $A \rightarrow B$, $C \rightarrow D$, A a $\neg D$ lze odvodit $(A \wedge \neg D) \wedge (B \wedge \neg C)$.

1.	$A \rightarrow B$	předpoklad
2.	$C \rightarrow D$	předpoklad
3.	A	předpoklad
4.	$\neg D$	předpoklad
5.	B	MP (1,3)
6.	$\neg C$	MT (2,4)
7.	$A \wedge \neg D$	zavedení $\wedge$ (3,4)
8.	$B \wedge \neg C$	zavedení $\wedge$ (5,6)
9.	$(A \wedge \neg D) \wedge (B \wedge \neg C)$	zavedení $\wedge$ (7,8)

12) Dokažte, že z formulí $A \rightarrow B$, $C \vee D$, $\neg A \rightarrow \neg C$ a $\neg B$ lze odvodit D.

1.	$A \rightarrow B$	předpoklad
2.	$C \vee D$	předpoklad
3.	$\neg A \rightarrow \neg C$	předpoklad
4.	$\neg B$	předpoklad
5.	$\neg A$	MT (1,4)
6.	$\neg C$	MP (3,5)
7.	D	DS (2,6)

13) Dokažte, že z formulí $A \to B$ a $A \to \neg B$ lze odvodit $\neg A$, tedy Pravidlo Reductio ad absurdum. Důkaz sporem.

1.	$A \to B$	předpoklad
2.	$A \to \neg B$	předpoklad
3.	$\neg\neg A$	předpoklad důkazu sporem
4.	A	eliminace dvojité negace (3)
5.	B	MP (1,4)
6.	$\neg B$	MP (2,4)
7.	$\neg A$	na základě důkazu sporem (*reductio*; 5,6)

14) Dokažte, že z formulí $(A \wedge B) \vee C$ a $\neg A \wedge \neg D$ lze odvodit C.

1.	$(A \wedge B) \vee C$	předpoklad
2.	$\neg A \wedge \neg D$	předpoklad
3.	$C \vee (A \wedge B)$	komutativita $\vee$ (1)
4.	$(C \vee A) \wedge (C \vee B)$	distributivita $\vee$ (3)
5.	$C \vee A$	Simp $\wedge$ (4)
6.	$\neg A$	Simp $\wedge$ (2)
7.	C	DS (5,6)

15) Dokažte, že z formulí $A \to B$, $B \to C$, $C \to D$ a $\neg D$ lze odvodit $(A \to C) \wedge (\neg B \wedge \neg C)$.

1.	$A \to B$	předpoklad
2.	$B \to C$	předpoklad
3.	$C \to D$	předpoklad
4.	$\neg D$	předpoklad
5.	$A \to C$	HS (1,3)
6.	$\neg C$	MT (3,4)
7.	$\neg B$	MT (2,6)

8.	$\neg B \land \neg C$	zavedení $\land$ (6,7)
9.	$(A \rightarrow C) \land (\neg B \land \neg C)$	zavedení $\land$ (5,8)

16) Dokažte, že z formulí $A \rightarrow B$, $\neg B \land C$, $D \land E$ a $(\neg A \land D) \rightarrow F$ lze odvodit $F \land C$.

1.	$A \rightarrow B$	předpoklad
2.	$\neg B \land C$	předpoklad
3.	$D \land E$	předpoklad
4.	$(\neg A \land D) \rightarrow F$	předpoklad
5.	$\neg B$	Simp $\land$ (2)
6.	$\neg A$	MT (1,5)
7.	D	Simp $\land$ (3)
8.	$\neg A \land D$	zavedení $\land$ (6,7)
9.	F	MP (4,8)
10.	C	Simp $\land$ (2)
11.	$F \land C$	zavedení $\land$ (9,10)

17) Dokažte, že z formulí $A \rightarrow B$ a $\neg B$ lze odvodit $\neg A$, tedy Modus tollens. Důkaz sporem.

1.	$A \rightarrow B$	předpoklad
2.	$\neg B$	předpoklad
3.	$\neg\neg A$	předpoklad důkazu sporem
4.	A	pravidlo eliminace dvojité negace (3)
5.	B	MP (1,4)
6.	$\neg A$	na základě důkazu sporem (*reductio*; 2,5)

18) Dokažte, že z formulí $A \rightarrow \neg(B \land C)$ a $A \land C$ lze odvodit $\neg B$.

1.	$A \rightarrow \neg(B \wedge C)$	předpoklad
2.	$A \wedge C$	předpoklad
3.	A	Simp $\wedge$ (2)
4.	$\neg(B \wedge C)$	MP (1,3)
5.	C	Simp $\wedge$ (2)
6.	$\neg B \vee \neg C$	De Morganův zákon (4)
7.	$\neg B$	DS (6,5)

19) Dokažte, že z formulí $\neg A \rightarrow (A \vee \neg B)$, $\neg B \rightarrow (C \rightarrow \neg B)$ a $\neg A$ lze odvodit $\neg C$.

1.	$\neg A \rightarrow (A \vee \neg B)$	předpoklad
2.	$\neg B \rightarrow (C \rightarrow B)$	předpoklad
3.	$\neg A$	předpoklad
4.	$A \vee \neg B$	MP (1,3)
5.	$\neg B$	DS (4,3)
6.	$C \rightarrow B$	MP (2,5)
7.	$\neg C$	MT (6,5)

20) Dokažte, že z formulí $(A \vee B) \wedge C$ a $\neg(B \wedge C)$ lze odvodit $(C \wedge A)$.

1.	$(A \vee B) \wedge C$	předpoklad
2.	$\neg(B \wedge C)$	předpoklad
3.	$C \wedge (A \vee B)$	komutativita $\wedge$ (1)
4.	$(C \wedge A) \vee (C \wedge B)$	distributivita $\wedge$ (3)
5.	$(C \wedge A) \vee (B \wedge C)$	komutativita $\wedge$ (4)
6.	$(C \wedge A)$	DS (5,2)

21) Dokažte, že z formulí $A \rightarrow (B \rightarrow C)$, $D \rightarrow (C \rightarrow E)$, $A \vee F$, $\neg F$ a D lze odvodit $(B \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow E)$.

1.	$A\rightarrow(B\rightarrow C)$	předpoklad
2.	$D\rightarrow(C\rightarrow E)$	předpoklad
3.	$A\vee F$	předpoklad
4.	$\neg F$	předpoklad
5.	D	předpoklad
6.	$C\rightarrow E$	MP (2,5)
7.	A	DS (3,4)
8.	$B\rightarrow C$	MP (1,7)
9.	$B\rightarrow E$	HS (8,6)
10.	$(B\rightarrow C)\wedge(B\rightarrow E)$	zavedení $\wedge$ (8,9)

22) Dokažte, že z formulí $A\rightarrow B$, $A\vee C$, $\neg B$ a $C\rightarrow(B\rightarrow D)$ lze odvodit $A\rightarrow D$.

1.	$A\rightarrow B$	předpoklad
2.	$A\vee C$	předpoklad
3.	$\neg B$	předpoklad
4.	$C\rightarrow(B\rightarrow D)$	předpoklad
5.	$\neg A$	MT (1,3)
6.	C	DS (2,5)
7.	$B\rightarrow D$	MP (4,6)
8.	$A\rightarrow D$	HS (1,7)

23) Dokažte, že z formulí $(B\rightarrow C)\rightarrow A$ a $\neg(D\vee A)$ lze odvodit B.

1.	$(B\rightarrow C)\rightarrow A$	předpoklad
2.	$\neg(D\vee A)$	předpoklad
3.	$\neg D\wedge\neg A$	De Morganův zákon (2)
4.	$\neg A$	Simp $\wedge$ (3)
5.	$\neg(B\rightarrow C)$	MT (1,4)
6.	$B\wedge\neg C$	převod $\rightarrow$ na $\wedge$ (5)
7.	B	Simp $\wedge$ (6)

24) Dokažte, že z formulí $\neg A \rightarrow B$ a $A \rightarrow (C \vee D)$ lze odvodit $\neg C \rightarrow (\neg D \rightarrow B)$.

1.	$\neg A \rightarrow B$	předpoklad
2.	$A \rightarrow (C \vee D)$	předpoklad
3.	$\neg B \rightarrow A$	transpozice $\rightarrow$ (1)
4.	$\neg B \rightarrow (C \vee D)$	HS (3,2)
5.	$\neg(C \vee D) \rightarrow B$	transpozice $\rightarrow$ (4)
6.	$(\neg C \wedge \neg D) \rightarrow B$	De Morganův zákon (5)
7.	$\neg C \rightarrow (\neg D \rightarrow B)$	Exp (6)

25) Dokažte, že z formulí $(A \rightarrow \neg B) \wedge \neg C$ a $B \rightarrow (\neg A \rightarrow C)$ lze odvodit $B \rightarrow A$.

1.	$(A \rightarrow \neg B) \wedge \neg C$	předpoklad
2.	$B \rightarrow (\neg A \rightarrow C)$	předpoklad
3.	$A \rightarrow \neg B$	Simp (1)
4.	$\neg C$	Simp (1)
5.	$(B \wedge \neg A) \rightarrow C$	Exp
6.	$\neg(B \wedge \neg A)$	MT (5,4)
7.	$\neg B \vee \neg\neg A$	De Morganův zákon (6)
8.	$\neg B \vee A$	eliminace dvojité negace (7)
9.	$B \rightarrow A$	převod $\vee$ na $\rightarrow$ (8)

26) Dokažte, že z formulí $A \rightarrow B$, $C \rightarrow D$ a $\neg B \vee \neg D$ lze odvodit $\neg A \vee \neg C$, tedy Pravidlo Destruktivní dilema. Důkaz sporem.

1.	$A \rightarrow B$	předpoklad
2.	$C \rightarrow D$	předpoklad
3.	$\neg B \vee \neg D$	předpoklad
4.	$\neg(\neg A \vee \neg C)$	negace závěru za účelem důkazu sporem
5.	$\neg\neg A \wedge \neg\neg C$	De Morganův zákon (4)
6.	$A \wedge C$	eliminace dvojité negace (na obě části 5.)

7.	A	Simp (6)
8.	B	MP (1,7)
9.	C	Simp (6)
10.	D	MP (2,9)
11.	$\neg B$	DS (3,10), což je spor s 8.
12.	$\neg C$	MT (2,11), což je spor s 9.
13.	$\neg A$	MT (1,11), což je spor s 7.
14.	$\neg A \vee \neg C$	na základě (několikanásobného) sporu (*reductio*) (řádky 12 .a 13. byly vlastně nadbytečné)

27) Dokažte, že z formulí $A \rightarrow B$, $C \rightarrow (D \wedge E)$, $\neg C \rightarrow \neg B$ a $D \rightarrow (E \rightarrow A)$ lze odvodit $A \leftrightarrow C$.

1.	$A \rightarrow B$	předpoklad
2.	$C \rightarrow (D \wedge E)$	předpoklad
3.	$\neg C \rightarrow \neg B$	předpoklad
4.	$D \rightarrow (E \rightarrow A)$	předpoklad
5.	$B \rightarrow C$	transpozice $\rightarrow$ (3)
6.	$A \rightarrow C$	HS (1,5)
7.	$(D \wedge E) \rightarrow A$	Exp (4)
8.	$C \rightarrow A$	HS (2,7)
9.	$(A \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow A)$	zavedení $\wedge$ (6,8)
10.	$A \leftrightarrow C$	zavedení $\leftrightarrow$ (9)

14.5 Gentzenovská dedukce

Na rozdíl od hilbertovské dedukce, v níž je jen jedno odvozovací pravidlo a několik axiomových schémat, systém gentzenovské přirozené dedukce má vlastně jen jeden axiom (k němu se někdy přidávají dva další), avšak disponuje několika jednoduchými dedukčními pravidly. Ta jsou považována za výchozí, a proto se nedokazují; na základě těchto výchozích pravidel se pak dokazují další složitější dedukční pravidla.

Důležitým ideovým prvkem gentzenovská dedukce je, že každý krok důkazu je logicky pravdivý. (Toto např. hilbertovská dedukce nesplňuje v případě důkazu z předpokladů.) V každém kroku jsou totiž uváděny rovněž všechny předpoklady dané formule.

Nechť Γ je konečná množina formulí. Γ vlastně reprezentuje množinu našich přesvědčení (formulí). K množině Γ budeme někdy přibírat ne nutně disjunktní množinu Δ. Znak „$\Rightarrow$" je obdobou dokazovátka „$\vdash$", ovšem na rozdíl od něho coby metaznaku hilbertovské dedukce je v gentzenovské přirozené dedukci zadán systémově. Jednotkou dokazování je *sekvent*, má tvar:

$$\Gamma, A_1, A_2, ..., A_n \Rightarrow B,$$

V sekventu je $A_1, A_2, ..., A_n$ označením jisté množiny formulí, přičemž sekvence $A_1, A_2, ..., A_n \Rightarrow B$ je ekvivalentní s $(A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n) \rightarrow B$. (Vlastní Gentzenův systém namísto B obsahuje $B_1 \vee B_2 ... \vee B_n$; při pravdivosti všech formulí nalevo od $\Rightarrow$ je alespoň jedna formule napravo od $\Rightarrow$ pravdivá.) Jak už bylo výše řečeno, každý sekvent je vždy logicky pravdivý. Aby byl každý sekvent logicky pravdivý, nesmí se nalevo vyskytovat nadbytečné předpoklady.

Odvozovací pravidla jsou tvaru:

$$\frac{\text{sekvent}_1\,;\ ...\ ;\ \text{sekvent}_n}{\text{sekvent}}$$

Ze sekventů nad čarou lze tedy odvodit sekvent pod čarou. V naší expozici ovšem neukazujeme samotný *sekvenční kalkul*, ale přirozenou dedukci opírající se o myšlenky gentzenovského sekvenčního kalkulu. Vlastní sekvenční kalkul se vyznačuje jednak zacházením s několika strukturálními pravidly, jež zde neuvádíme, jednak dvoudimenzionálním zápisem reprezentujícím inference.

Zde je axiomové schéma a dvě pomocná pravidla:

$\Gamma, A \Rightarrow A$	*Základní Axiom* (ZA)
$\dfrac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma, B \Rightarrow A}$	*Zavedení Předpokladu* („weakening“) (ZP)
$\dfrac{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B;\ \Delta \Rightarrow \neg A \rightarrow B}{\Gamma, \Delta \Rightarrow B}$	*Eliminace Předpokladu* (EP)

Za výchozí, tj. nedokazovaná, pravidla jsou obvykle volena ta následující. Písmeno „I“ zkracuje „introdukce“ (tj. „zavedení“), písmeno „E“ zkracuje „eliminace“. Všimněme si, že introdukce $\rightarrow$ je de facto VD a eliminace $\rightarrow$ je de facto MP; podobně introdukce $\neg$ je RAA a eliminace $\neg$ je PDS.

I$\wedge$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow A\ ;\ \Delta \Rightarrow B}{\Gamma, \Delta \Rightarrow A \wedge B}$	E$\wedge$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow A \wedge B}{\Gamma \Rightarrow A \text{ (či } B\text{)}}$
I$\rightarrow$	$\dfrac{\Gamma, A \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B}$	E$\rightarrow$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow A\ ;\ \Delta \Rightarrow A \rightarrow B}{\Gamma, \Delta \Rightarrow B}$
I$\vee$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow A \text{ (či } B\text{)}}{\Gamma \Rightarrow A \vee B}$	E$\vee$	$\dfrac{\Gamma, A \Rightarrow B\ ;\ \Delta_1, B \Rightarrow C\ ;\ \Delta_2 \Rightarrow A \vee B}{\Gamma, \Delta_1, \Delta_2 \Rightarrow C}$
I$\neg$	$\dfrac{\Gamma, A \Rightarrow B\ ;\ \Delta, A \Rightarrow \neg B}{\Gamma, \Delta \Rightarrow \neg A}$	E$\neg$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow B\ ;\ \Delta \Rightarrow \neg B}{\Gamma, \Delta \Rightarrow A}$
I$\leftrightarrow$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B\ ;\ \Delta \Rightarrow B \rightarrow A}{\Gamma, \Delta \Rightarrow A \leftrightarrow B}$	E$\leftrightarrow$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow A \leftrightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B \text{ (či } B \rightarrow A\text{)}}$

14.6 Příklady důkazů v gentzenovském systému přirozené dedukce

1) Odvoďte formuli $p \rightarrow p$ (zákon totožnosti). Postup bude takový, že pomocí ZA zavedeme p. Zároveň se tak p stane předpokladem nalevo od $\Rightarrow$, jehož se posléze ‚zbavíme' tak, že jej převedeme napravo od $\Rightarrow$ pomocí I$\rightarrow$.

1.	$\Gamma, p \Rightarrow p$	ZA
2.	$\Gamma \Rightarrow p \rightarrow p$	I$\rightarrow$

(Bod 2. vlastně znamená, že $p \rightarrow p$ plyne z prázdné množiny předpokladů.)

2) Dokažte, že z předpokladů $p \rightarrow q$ a $q \rightarrow r$ je odvoditelné $p \rightarrow r$, tj. ověřte úsudek $p \rightarrow q$, $q \rightarrow r$ $\therefore$ $p \rightarrow r$ (vlastně pravidlo hypotetický sylogismus). Postup bude takový, že formule $p \rightarrow q$ a $q \rightarrow r$ budou prvními kroky důkazu, přičemž zůstanou na levé straně jako předpoklady, a proto se právě jich nebudeme snažit zbavit. Z těchto předpokladů pak bude odvoditelná – to bude poslední krok – formule $p \rightarrow r$. V posledním kroku se tedy pomocí I$\rightarrow$ dostane napravo náš pomocný předpoklad p:

1.	$\Gamma, p \rightarrow q \Rightarrow p \rightarrow q$	ZA
2.	$\Gamma, p \rightarrow q, q \rightarrow r \Rightarrow q \rightarrow r$	ZA
3.	$\Gamma, p \rightarrow q, q \rightarrow r, p \Rightarrow p$	ZA
4.	$\Gamma, p \rightarrow q, q \rightarrow r, p \Rightarrow q$	E$\rightarrow$ (1,3)
5.	$\Gamma, p \rightarrow q, q \rightarrow r, p \Rightarrow r$	E$\rightarrow$ (2,4)
6.	$\Gamma, p \rightarrow q, q \rightarrow r \Rightarrow p \rightarrow r$	I$\rightarrow$

Kdybychom pokračovali ještě následujícími dvěma kroky, dokázali bychom formuli $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$ (zákon hypotetického sylogismu):

8.	$\Gamma, p \rightarrow q \Rightarrow (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$	I$\rightarrow$ (7)
9.	$\Gamma \Rightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$	I$\rightarrow$ (8)

3) Dokažte formuli $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r))$ (předpoklad p zavádíme až po q, abychom pak hladce zavedli $\rightarrow$):

1.	$\Gamma, p \rightarrow (q \rightarrow r) \Rightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r)$	ZA
2.	$\Gamma, p \rightarrow (q \rightarrow r), q \Rightarrow q$	ZA

3.	$\Gamma, p\to(q\to r), q, p \Rightarrow p$	ZA
4.	$\Gamma, p\to(q\to r), q, p \Rightarrow (q\to r)$	E$\to$ (1,3)
5.	$\Gamma, p\to(q\to r), q, p \Rightarrow r$	E$\to$ (4,2)
6.	$\Gamma, p\to(q\to r), q \Rightarrow (p\to r)$	I$\to$ (5)
7.	$\Gamma, p\to(q\to r) \Rightarrow q\to(p\to r)$	I$\to$ (6)

4) Dokažte formuli $((p\to q)\wedge(q\to r))\to(p\to r)$:

1.	$\Gamma, (p\to q)\wedge(q\to r) \Rightarrow (p\to q)\wedge(q\to r)$	ZA
2.	$\Gamma, (p\to q)\wedge(q\to r), p \Rightarrow p\to q$	E$\wedge$ (1)
3.	$\Gamma, (p\to q)\wedge(q\to r), p \Rightarrow q\to r$	E$\wedge$ (1)
4.	$\Gamma, (p\to q)\wedge(q\to r), p \Rightarrow p$	ZA
5.	$\Gamma, (p\to q)\wedge(q\to r), p \Rightarrow q$	E$\to$ (2,4)
6.	$\Gamma, (p\to q)\wedge(q\to r), p \Rightarrow r$	E$\to$ (3,5)
7.	$\Gamma, (p\to q)\wedge(q\to r) \Rightarrow p\to r$	I$\to$ (6)
8.	$\Gamma \Rightarrow ((p\to q)\wedge(q\to r))\to(p\to r)$	I$\to$ (7)

5) Dokažte formuli $p\vee\neg p$ (zákon vyloučeného třetího):

1.	$\Gamma, p \Rightarrow p$	ZA
2.	$\Gamma, p \Rightarrow p\vee\neg p$	I$\vee$
3.	$\Gamma, p, \neg p \Rightarrow \neg p$	ZA
4.	$\Gamma, p, \neg p \Rightarrow p\vee\neg p$	I$\vee$
5.	$\Gamma \Rightarrow p\vee\neg p$	EP (2,4)

6) Dokažte formuli $(p\to q)\to(\neg q\to\neg p)$:

1.	$\Gamma, p\to q \Rightarrow p\to q$	ZA
2.	$\Gamma, p\to q, p \Rightarrow p$	ZA
3.	$\Gamma, p\to q, p \Rightarrow q$	E$\to$ (1,2)
4.	$\Gamma, p\to q, p, \neg q \Rightarrow \neg q$	ZA
5.	$\Gamma, p\to q, \neg q \Rightarrow \neg p$	EP (3,4)
6.	$\Gamma, p\to q \Rightarrow \neg q\to\neg p$	I$\to$ (5)
7.	$\Gamma \Rightarrow (p\to q)\to(\neg q\to\neg p)$	I$\to$ (6)

7) Dokažte, že z předpokladu $p\to(q\to r)$ lze odvodit $(p\to q)\to(q\to r)$. Jinými slovy, ověřte úsudek $p\to(q\to r) \therefore (p\to q)\to(q\to r)$:

1.	$\Gamma, p\to(q\to r) \Rightarrow p\to(q\to r)$	ZA
2.	$\Gamma, p\to(q\to r), p \Rightarrow p$	ZA
3.	$\Gamma, p\to(q\to r), p \Rightarrow q\to r$	E$\to$ (1,2)

4.	$\Gamma, p{\rightarrow}(q{\rightarrow}r), p, p{\rightarrow}q \Rightarrow p{\rightarrow}q$	ZA
5.	$\Gamma, p{\rightarrow}(q{\rightarrow}r), p, p{\rightarrow}q \Rightarrow q$	E→ (2,4)
6.	$\Gamma, p{\rightarrow}(q{\rightarrow}r), p, p{\rightarrow}q \Rightarrow r$	E→ (3,5)
7.	$\Gamma, p{\rightarrow}(q{\rightarrow}r), p{\rightarrow}q \Rightarrow p{\rightarrow}r$	I→ (6)
8.	$\Gamma, p{\rightarrow}(q{\rightarrow}r) \Rightarrow (p{\rightarrow}q){\rightarrow}(p{\rightarrow}r)$	I→ (7)

8) Dokažte, že z předpokladu $p{\rightarrow}(qp{\rightarrow}r)$ lze odvodit $(p{\wedge}q)p{\rightarrow}r$, čili ověřte úsudek $p{\rightarrow}(qp{\rightarrow}r) \therefore (p{\wedge}q)p{\rightarrow}r$ (tj. Pravidlo exportace):

1.	$\Gamma, p{\rightarrow}(q{\rightarrow}r) \Rightarrow p{\rightarrow}(q{\rightarrow}r)$	ZA
2.	$\Gamma, p{\rightarrow}(q{\rightarrow}r), p{\wedge}q \Rightarrow p{\wedge}q$	ZA
3.	$\Gamma, p{\rightarrow}(q{\rightarrow}r), p{\wedge}q \Rightarrow p$	E∧ (2)
4.	$\Gamma, p{\rightarrow}(q{\rightarrow}r), p{\wedge}q \Rightarrow q{\rightarrow}r$	E→ (1,3)
5.	$\Gamma, p{\rightarrow}(q{\rightarrow}r), p{\wedge}q \Rightarrow q$	E∧ (2)
6.	$\Gamma, p{\rightarrow}(q{\rightarrow}r), p{\wedge}q \Rightarrow r$	E→ (4,5)
7.	$\Gamma, p{\rightarrow}(q{\rightarrow}r) \Rightarrow (p{\wedge}q){\rightarrow}r$	I→ (6)

9) Dokažte, že z předpokladu $(p{\wedge}q){\rightarrow}r$ lze odvodit $p{\rightarrow}(q{\rightarrow}r)$, čili ověřte úsudek $p{\rightarrow}(q{\rightarrow}r) \therefore (p{\wedge}q){\rightarrow}r$ (tj. Pravidlo exportace):

1.	$\Gamma, (p{\wedge}q){\rightarrow}r \Rightarrow (p{\wedge}q){\rightarrow}r$	ZA
2.	$\Gamma, (p{\wedge}q){\rightarrow}r, p \Rightarrow p$	ZA
3.	$\Gamma, (p{\wedge}q){\rightarrow}r, p, q \Rightarrow q$	ZA
4.	$\Gamma, (p{\wedge}q){\rightarrow}r, p, q \Rightarrow p{\wedge}q$	I∧ (2,3)
5.	$\Gamma, (p{\wedge}q){\rightarrow}r, p, q \Rightarrow r$	E→ (1,4)
6.	$\Gamma, (p{\wedge}q){\rightarrow}r, p \Rightarrow q{\rightarrow}r$	I→ (5)
7.	$\Gamma, (p{\wedge}q){\rightarrow}r \Rightarrow p{\rightarrow}(q{\rightarrow}r)$	I→ (6)

10) Dokažte, že z předpokladu $(p{\wedge}q){\rightarrow}r$ lze odvodit $(p{\rightarrow}q){\rightarrow}(p{\rightarrow}r)$:

1.	$\Gamma, (p{\wedge}q){\rightarrow}r \Rightarrow (p{\wedge}q){\rightarrow}r$	ZA
2.	$\Gamma, (p{\wedge}q){\rightarrow}r, p{\rightarrow}q \Rightarrow p{\rightarrow}q$	ZA
3.	$\Gamma, (p{\wedge}q){\rightarrow}r, p{\rightarrow}q, p \Rightarrow p$	ZA
4.	$\Gamma, (p{\wedge}q){\rightarrow}r, p{\rightarrow}q, p \Rightarrow q$	E→ (2,3)
5.	$\Gamma, (p{\wedge}q){\rightarrow}r, p{\rightarrow}q, p \Rightarrow p{\wedge}q$	I∧ (3,4)
6.	$\Gamma, (p{\wedge}q){\rightarrow}r, p{\rightarrow}q, p \Rightarrow r$	E→ (1,5)
7.	$\Gamma, (p{\wedge}q){\rightarrow}r, p{\rightarrow}q \Rightarrow p{\rightarrow}r$	I→ (6)
8.	$\Gamma, (p{\wedge}q){\rightarrow}r \Rightarrow (p{\rightarrow}q) \rightarrow (p{\rightarrow}r)$	I→ (7)

11) Dokažte, že z předpokladů $(p \rightarrow q)$ a $\neg q$ lze odvodit $\neg p$ (tj. pravidlo Modus tollens):

1.	$\Gamma, p \wedge q \Rightarrow p \wedge q$	ZA
2.	$\Gamma, p \wedge q, p \Rightarrow p$	ZA
3.	$\Gamma, p \wedge q, p, \neg q \Rightarrow \neg q$	ZA
4.	$\Gamma, p \wedge q, p, \neg q \Rightarrow q$	E$\wedge$ (1)
5.	$\Gamma, p \wedge q, \neg q \Rightarrow \neg p$	I$\neg$ (3,4)

12) Dokažte formuli $(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow q)$:

1.	$\Gamma, \neg q \rightarrow \neg p \Rightarrow \neg q \rightarrow \neg p$	ZA
2.	$\Gamma, \neg q \rightarrow \neg p, \neg q \Rightarrow \neg q$	ZA
3.	$\Gamma, \neg q \rightarrow \neg p, \neg q \Rightarrow \neg p$	E$\rightarrow$ (1,2)
4.	$\Gamma, \neg q \rightarrow \neg p, p, \neg q \Rightarrow p$	ZA
5.	$\Gamma, \neg q \rightarrow \neg p, p \Rightarrow q$	I$\neg$ (a s pomocí zákona dvojité negace) (3,4)
6.	$\Gamma \Rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow q)$	2x Z$\rightarrow$ (5)

14.7 Metoda sémantických tabel

Současná podoba metody dokazování pomocí *sémantických* (či *analytických*) *tabel*, resp. *sémantických stromů* (angl. „semantic tableaux", „tree proofs"), stručně někdy *tablová metoda*, se vyvinula z metody proponované Evertem Willemem Bethem a rozvinuté Raymondem Smullyanem. Jedná se vlastně o dokazování sporem, poněvadž při dokazování závěru z premis se zužitkovává negace závěru.

Jak už bylo uvedeno výše, při dokazování sporem se vychází z faktu (totiž sémantické podoby Věty o důkazu sporem), že $T \vdash A$, kde T je množina premis a A závěr, právě tehdy, když $T \cup \{\neg A\} \vdash \neg(B \rightarrow B)$ (spor). Sémanticky pak řečeno, jakmile ukážeme, že množina obsahující premisy T a negaci závěru, tj. množina $T \cup \{\neg A\}$, je nesplnitelnou množinou formulí (čili neexistuje valuace, při níž by všechny prvky T a též formule $\neg A$ byly pravdivé), tak A vyplývá z T, tj. $T \models A$, takže úsudek $T \therefore A$ je platný. Jednoduchý ilustrativní příklad: $p \wedge q \models q$, poněvadž množina $\{p \wedge q, \neg q\}$ je nesplnitelná.

Metoda sémantických tabel je založena na tom, že složené formule, jež jsou součástí množiny $T \cup \{\neg A\}$, postupně dekomponujeme podle odvozovacích pravidel na jejich součásti. (Přehled těchto pravidel uvádíme níže, zatím si vystačíme jen s intuitivním náhledem. Termín „dekomponování" se v problematice obvykle nepoužívá, ale je příhodný.) Tato pravidla jsou korektní, tj. zachovávají splnitelnost. Například formule $p \wedge q$ je dekomponována na p a q, přičemž tyto atomické formule jsou splňovány tou valuací, která splňuje $p \wedge q$. Tyto dekomponované formule jsou věšeny na konce větví postupně vznikajícího stromu. V kořeni tohoto stromu jsou formule z množiny $T \cup \{\neg A\}$, na konci těchto větví, tj. v listech, jsou atomické formule nebo jejich negace. Strom je postupně rozvíjen směrem dolů. Zde je příklad stromu pro úsudek $(p \wedge \neg q)$, $(q \vee \neg r) \therefore r$.

$p \wedge \neg q$	✓	premisa
$q \vee \neg r$	✓	premisa
$\neg r$	✓	negace závěru
$\mid$		
p		důsledek aplikace pravidla dekomponujícího $p \wedge \neg q$
$\neg q$		důsledek aplikace pravidla dekomponujícího $p \wedge \neg q$
/ \		
$q \quad \neg r$		důsledek aplikace pravidla dekomponujícího $q \vee \neg r$
$\times$		

V našem příkladu vidíme, že ‚stvol' obsahující p a pod ním bezprostředně $\neg q$ je důsledkem aplikace pravidla, které nezpůsobuje větvení. To znamená, že platí-li $p \wedge \neg q$, platí jak p, tak $\neg q$. K větvení dochází až v důsledku pravidla dekomponujícího $q \vee \neg r$: platí-li $q \vee \neg r$, platí q nebo platí $\neg r$. Větvíme tedy proto, že nevíme, která z těchto možností platí, takže musíme v našem důkazu obě možnosti prošetřit. (Pravidlům nezpůsobujícím větvení se někdy říká *α-pravidla*; těm způsobujícím větvení se pak říká *β-pravidla*.)

Při dokazování pomocí sémantických tabel není rigidně dáno pořadí aplikace pravidel. Důkazem námi studovaného úsudku proto může být také:

$p \wedge \neg q$	✓	premisa
$q \vee \neg r$	✓	premisa
$\neg r$	✓	negace závěru
/ \		
$q \quad \neg r$		důsledek aplikace pravidla dekomponujícího $q \vee \neg r$
$\mid \quad \mid$		
$p \quad p$		(2x) důsledek aplikace pravidla dekomponujícího $p \wedge \neg q$
$\neg q \quad \neg q$		(2x) důsledek aplikace pravidla dekomponujícího $p \wedge \neg q$
$\times$		

V zájmu efektivity a co nejmenší složitosti důkazu však aplikujeme přednostně pravidla, která nezpůsobují větvení; přesněji, volíme taková pravidla a formule k dekompozici, která vedou k brzkému ukončování větví.

Nyní si povšimněme, že všechny složené formule, i ty, co se mohou objevit někde v půli stromu, musíme dekomponovat. Během toho, jak důkaz budujeme, proto používáme pro indikaci, že jsme danou složenou formuli dekomponovali, zatržítko ✓.

Větev, v níž se vyskytuje atomická formule a její negace, například q a $\neg q$, je zvána uzavřená a pod její list vepisujeme křížek $\times$ (popř. $\perp$, alternativní značení: danou atomickou formuli podtrhneme). Na rozdíl od dokončené otevřené větve neobsahuje uzavřená větev splnitelnou množinu formulí; obsahuje totiž spor, v našem příkladu q a $\neg q$. (Někteří autoři uvádí na konci dokončených otevřených větví symbol $\uparrow$, aby indikovali její otevřenost a dokončenost.) Poznamenejme, že ne vždy platí, že v každé větvi jsou všechny atomické proměnné nebo jejich negace, ačkoli je tato větev uzavřena (tedy obsahuje spor nebo nelze získat další atomickou formuli nebo negaci).

Jako i u jiných důkazů sporem činí adeptům logiky největší potíž vyhodnotit, čeho dokončením důkazu dosáhli. Uvědomme si proto, že existují dva druhy (dokončených) tablových důkazů. Důkaz čili strom, jehož všechny větve jsou uzavřené ($\times$), demonstroval, že množina $T\cup\{\neg A\}$ je nesplnitelná. To proto, že neexistuje valuace ohodnocující všechny její formule. To poznáme právě z toho, že jsou v příslušných větvích – jež jsou de facto návrhy možných valuací –, přítomny atomické formule jako p i $\neg p$, jež nemohou být dohromady jednou valuací splňovány. Důkaz čili strom s alespoň jednou dokončenou otevřenou větví ukazuje splnitelnost $T\cup\{\neg A\}$, což obnáší, že A nevyplývá z T. Atomické formule v otevřené větvi ukazují takovou valuaci, při níž je $T\cup\{\neg A\}$ splnitelná. V našem příkladu výše je to valuace $v(p)=1$, $v(q)=v(r)=0$, protože právě při ní jsou splnitelné formule p, $\neg q$, $\neg r$ z otevřené větve $\neg r$ – p – $\neg q$ – $\neg r$. Námi výše uváděný příklad důkazu tedy ukázal, že daný úsudek platný není.

Srovnejme aplikaci tablové metody s aplikací metody protipříkladu. Při metodě protipříkladu taky dokazujeme sporem, předpokládáme totiž, že závěr je nepravdivý a premisy přitom pravdivé. V tablové metodě nepravdivost závěru syntakticky vyznačujeme negací a pravdivost premis vyznačujeme vlastně absencí nějakého indikátoru. Tím, že v tablovém důkazu najdeme otevřenou větev, zjistíme vlastně valuaci, při níž jsou všechny premisy a taky negace závěru pravdivé (jinak řečeno: daná množina formulí je splnitelná). To znamená, že jsme našli valuaci, při níž jsou premisy pravdivé a nenegovaný závěr nepravdivý.

Uvědomme si, že metoda sémantických tabel se dá využít i k nalezení valuace, je-li jaká, jež splňuje nějakou množinu formulí. Valuací splňující danou množinu formulí je valuace vyznačená pomocí proměnných a jejích negací v otevřených větvích důkazu.

Metoda sémantických tabel (stromů) se dá rovněž využít k ověřování tautologičnosti formulí. To je založeno na faktu, že $\emptyset \models A$ právě tehdy, když $\emptyset\cup\{\neg A\} \models \neg(B\to B)$ (kde A je tautologie a $\emptyset$ je prázdná množina formulí T, což normálně neznačíme). V kořeni stromu důkazu, že daná formule A je tautologií, je tedy jen jedna formule, jmenovitě $\neg A$.

(Určitý druh splnitelných množin formulí jsou *Hintikkovy množiny formulí*. Množina formulí H se nazývá Hintikkova množina právě tehdy, když pro formule H platí, že a) je-li $\neg p\in$ H, tak $p\notin$ H, b) je-li $\neg\neg p\in$ H, tak $p\in$ H, c) je-li $p\wedge q\in$ H, tak $p\in$ H i $q\in$ H, d) je-li $p\vee q\in$ H, tak $p\in$ H nebo $q\in$ H, e) je-li $\neg(p\wedge q)\in$ H, tak $\neg p\in$ H nebo $\neg q\in$ H, f) je-li $\neg(p\vee q)\in$ H, tak $\neg p\in$ H i $\neg q\in$ H. Platí, že každá Hintikkova množina je splnitelná.)

Původní verze tablové metody využívala poněkud jiná pravidla, než si uvádíme níže. Obsahovala především indikaci pravdivosti a nepravdivosti formulí, pro což byly používány nejčastěji „TA“ a „FA“, popř. „A=1“ a „A=0“, apod. Námi užívaný systém pravdivost A nijak neindikuje, nepravdivost A však indikuje jakožto $\neg A$, čímž se odstranila zjevnou závislost této důkazové metody na sémantice. Náš výše uváděný příklad by tedy vypadal například takto:

T$(p\wedge\neg q)$	✓	premisa
T$(q\vee\neg r)$	✓	premisa
Fr	✓	negace závěru
|		
Tp		důsledek aplikace pravidla dekomponujícího $p\wedge\neg q$
Fq		důsledek aplikace pravidla dekomponujícího $p\wedge\neg q$
/ \		
Tq Fr		důsledek aplikace pravidla dekomponujícího $q\vee\neg r$
×		

Zde je seznam odvozovacích pravidel námi užívané varianty metody sémantických tabel. Některá z těchto pravidel jakoby předpokládají De Morganovy zákony či převod implikace na disjunkci; to proto, že rozvětvení složené formule odpovídá disjunkci, kdežto dekompozice složené formule na formule, jež jsou zařazeny za sebou, odpovídá konjunkci.

$$\begin{array}{c} A\wedge B \\ : \\ | \\ A \\ B \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\neg(A\wedge B)} \\ \multicolumn{2}{c}{:} \\ / & \backslash \\ \neg A & \neg B \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{A\vee B} \\ \multicolumn{2}{c}{:} \\ / & \backslash \\ A & B \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \neg(A\vee B) \\ : \\ | \\ \neg A \\ \neg B \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{A\rightarrow B} \\ \multicolumn{2}{c}{:} \\ / & \backslash \\ \neg A & B \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \neg(A\rightarrow B) \\ : \\ | \\ A \\ \neg B \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{A\leftrightarrow B} \\ \multicolumn{2}{c}{:} \\ / & \backslash \\ A & \neg A \\ B & \neg B \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\neg(A\leftrightarrow B)} \\ \multicolumn{2}{c}{:} \\ / & \backslash \\ A & \neg A \\ \neg B & B \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \neg\neg A \\ : \\ | \\ A \end{array}$$

14.8 Příklady důkazů metodou sémantických tabel

V anotacích tablových důkazů na výše uváděná pravidla stručně referujeme symboly výrokových spojek, jež jsou hlavní v dekomponované formuli. Například $\wedge$ odkazuje na pravidlo dekomponující $A\wedge B$, $\neg\wedge$ odkazuje na pravidlo dekomponující $\neg(A\wedge B)$. Námi uváděné anotace bychom mohli zjednodušit tak, že bychom odkazovali na čísla formulí, což by ale obnášelo, že postupně vznikající formule bychom museli postupně číslovat.

Znovu připomínáme elementární způsob vyhodnocení: jsou-li všechny větve uzavřeny (×), daný úsudek je platný; je-li aspoň jedna větev otevřená, daný úsudek platný není. V případě ověřování tautologičnosti je to podobné, tautologie je vlastně úsudek s nula premisami.

1) Metodou sémantických tabel ověřte úsudek $p \rightarrow q,\ p \ \therefore\ q$ (tj. vlastně Modus ponens).

$p \rightarrow q$	✓	premisa
p		premisa
$\neg q$		negace závěru (tj. předpoklad důkazu sporem)
/ \		
$\neg p$ q		dekompozice první premisy; $\rightarrow$
× ×		

Všechny větve stromu jsou uzavřeny, čili neexistuje valuace, která by splňovala množinu obsahující premisy a negaci závěru. Znamená to, že úsudek je platný.

2) Metodou sémantických tabel ověřte úsudek $p \vee \neg q,\ q \ \therefore\ \neg p$.

$p \vee \neg q$	✓	premisa
q		premisa
$\neg\neg p$	✓	negace závěru (tj. předpoklad důkazu sporem)
|		
p		
/ \		
p $\neg q$		dekompozice první premisy; $\vee$
×		

Všechny větve stromu nejsou uzavřeny, čili existuje valuace, která splňuje množinu obsahující premisy a negaci závěru. Znamená to, že úsudek není platný.

3) Metodou sémantických tabel ověřte úsudek $p \rightarrow q,\ \neg q \ \therefore\ \neg p$ (tj. vlastně Modus tollens).

$p \rightarrow q$	✓	premisa
$\neg q$		premisa
$\neg\neg p$	✓	negace závěru

$|$

p — dekompozice negace závěru; $\neg\neg$

$/ \quad \backslash$

$\neg p \quad q$ — dekompozice první premisy; $\rightarrow$

$\times \quad \times$

Všechny větve stromu jsou uzavřeny, čili neexistuje valuace, která by splňovala množinu obsahující premisy a negaci závěru. Znamená to, že úsudek je platný.

4) Metodou sémantických tabel ověřte úsudek $p\rightarrow q,\ q\rightarrow r \therefore p\rightarrow r$ (tj. vlastně Hypotetický sylogismus).

$p\rightarrow q$	✓	premisa
$q\rightarrow r$	✓	premisa
$\neg(p\rightarrow r)$	✓	negace závěru
$|$		
p		dekompozice negace závěru; $\neg\rightarrow$
$\neg r$		dekompozice negace závěru; $\neg\rightarrow$
$/ \quad \backslash$		
$\neg p \quad q$		dekompozice první premisy; $\rightarrow$
$\times \quad / \quad \backslash$		
$\neg q \quad r$		dekompozice druhé premisy; $\rightarrow$
$\times \quad \times$		

Všechny větve stromu jsou uzavřeny, čili neexistuje valuace, která by splňovala množinu obsahující premisy a negaci závěru. Znamená to, že úsudek je platný.

5) Metodou sémantických tabel ověřte úsudek $\neg p\vee\neg q,\ \neg r\rightarrow p \therefore q\rightarrow r$.

$\neg p\vee\neg q$	✓	předpoklad
$\neg r\rightarrow p$	✓	předpoklad
$\neg(q\rightarrow r)$	✓	negace závěru
$|$		
q		dekompozice negace závěru; $\neg\rightarrow$
$\neg r$		dekompozice negace závěru; $\neg\rightarrow$
$/ \quad \backslash$		
$\neg\neg r$✓ $\quad p$		dekompozice druhé premisy; $\rightarrow$
$| \quad / \quad \backslash$		
$r \quad \neg p \quad \neg q$		dekompozice $\neg\neg r$; $\neg\neg$; dekompozice první premisy; $\vee$
$\times \quad \times \quad \times$		

Všechny větve stromu jsou uzavřeny, čili neexistuje valuace, která by splňovala množinu obsahující premisy a negaci závěru. Znamená to, že úsudek je platný.

6) Metodou sémantických tabel ověřte úsudek $p \rightarrow q$, $\neg(q \wedge \neg r) \therefore p \vee r$.

$p \rightarrow q$	✓	premisa
$\neg(q \wedge \neg r)$ ✓		premisa
$\neg(p \vee r)$	✓	negace závěru
|		
$\neg p$		dekompozice negace závěru; $\neg\vee$
$\neg r$		dekompozice negace závěru; $\neg\vee$
/ \		
$\neg p$ q		dekompozice první premisy; $\rightarrow$
/ \ / \		
$\neg q$ r $\neg q$ r		dekompozice druhé premisy; $\neg\wedge$
× × ×		

Úsudek není platný.

7) Metodou sémantických tabel ověřte úsudek $p \rightarrow q$, $q \rightarrow r$, $\neg r \vee \neg p \therefore \neg p$.

$p \rightarrow q$	✓	premisa
$q \rightarrow r$	✓	premisa
$\neg r \vee \neg p$	✓	premisa
$\neg\neg p$	✓	negace závěru
|		
p		dekompozice negace závěru; $\neg\neg$
/ \		
$\neg p$ q		dekompozice první premisy; $\rightarrow$
× / \		
$\neg r$ $\neg p$		dekompozice třetí premisy; $\vee$
/ \ ×		
$\neg q$ r		dekompozice druhé premisy; $\rightarrow$
× ×		

Úsudek je platný.

8) Metodou sémantických tabel ověřte úsudek $p \rightarrow q$, $r \vee \neg q \therefore (p \vee q) \rightarrow r$.

$p \rightarrow q$	✓	premisa
$r \vee \neg q$	✓	premisa

$\neg((p\vee q)\rightarrow r)$	✓	negace závěru
$\vert$		
$(p\vee q)$	✓	dekompozice negace závěru; $\neg\neg$
$\neg r$		dekompozice negace závěru; $\neg\neg$
/ \		
r $\neg q$		dekompozice druhé premisy; $\vee$
× / \		
$\neg p$ q		dekompozice první premisy; $\rightarrow$
/ \ ×		
p q		dekompozice složené formule pod závěrem; $\vee$
× ×		

Úsudek je platný.

9) Metodou sémantických tabel ověřte úsudek $p\rightarrow(q\rightarrow r)$ $\therefore$ $(p\wedge q)\rightarrow\neg r$.

$p\rightarrow(q\rightarrow r)$ ✓		premisa
$\neg((p\wedge q)\rightarrow\neg r)$	✓	negace závěru
$\vert$		
$(p\wedge q)$	✓	dekompozice negace závěru; $\neg\rightarrow$
$\neg\neg r$	✓	dekompozice negace závěru; $\neg\rightarrow$
$\vert$		
p		dekompozice $(p\wedge q)$; $\wedge$
q		dekompozice $(p\wedge q)$; $\wedge$
r		dekompozice $\neg\neg r$; $\neg\neg$
/ \		
$\neg p$ $q\rightarrow r$	✓	dekompozice první premisy; $\rightarrow$
× / \		
$\neg q$ r		dekompozice $q\rightarrow r$; $\rightarrow$
×		

Úsudek není platný.

10) Metodou sémantických tabel ověřte úsudek $p\rightarrow q$, $q\rightarrow\neg r$, $\neg r\rightarrow s$ $\therefore$ $p\rightarrow s$.

$p\rightarrow q$	✓	premisa
$q\rightarrow\neg r$	✓	premisa
$\neg r\rightarrow s$	✓	premisa
$\neg(p\rightarrow s)$	✓	negace závěru
$\vert$		
p		dekompozice negace závěru; $\neg\rightarrow$

$\neg s$ dekompozice negace závěru; $\neg\rightarrow$

/ \

$\neg p$ q dekompozice první premisy; $\rightarrow$

$\times$ / \

$\neg q$ $\neg r$ dekompozice druhé premisy; $\rightarrow$

$\times$ / \

$\neg\neg r$ ✓ s dekompozice třetí premisy; $\rightarrow$

| $\times$

r dekompozice $\neg\neg r$; $\neg\neg$

$\times$

Úsudek je platný.

11) Metodou sémantických tabel ověřte úsudek $(p\vee q)\leftrightarrow(r\wedge s)$, $q\leftrightarrow(\neg r\rightarrow p)$ $\therefore$ $r\rightarrow(p\vee q)$.

$(p\vee q)\leftrightarrow(r\wedge s)$ ✓ premisa

$q\leftrightarrow(\neg r\rightarrow p)$ ✓ premisa

$\neg(r\rightarrow(p\vee q))$ ✓ negace závěru

|

r dekompozice negace závěru; $\neg\rightarrow$

$\neg(p\vee q)$ ✓ dekompozice negace závěru; $\neg\rightarrow$

|

$\neg p$ dekompozice $(p\vee q)$; $\neg\vee$

$\neg q$ dekompozice $(p\vee q)$; $\neg\vee$

/ \

$p\vee q$ ✓ $\neg(p\vee q)$ ✓ dekompozice první premisy; $\leftrightarrow$

$r\wedge s$ ✓ $\neg(r\wedge s)$ ✓ dekompozice první premisy; $\leftrightarrow$

/ \ |

p q | dekompozice $p\vee q$; $\vee$

$\times$ $\times$ |

$\neg p$ dekompozice $\neg(p\vee q)$; $\neg\vee$

$\neg q$ dekompozice $\neg(p\vee q)$; $\neg\vee$

/ \

$\neg r$ $\neg s$ dekompozice $\neg(r\wedge s)$; $\neg\wedge$

$\times$ / \

q $\neg q$ dekompozice druhé premisy; $\leftrightarrow$

$(\neg r\rightarrow p)$✓ $\neg(\neg r\rightarrow p)$ ✓ dekompozice druhé premisy; $\leftrightarrow$

$\times$ |

$\neg r$ dekompozice $\neg(\neg r\rightarrow p)$; $\neg\rightarrow$

$\neg p$ dekompozice $\neg(\neg r\rightarrow p)$; $\neg\rightarrow$

$\times$

Úsudek je platný.

12) Metodou sémantických tabel ověřte, zda je formule $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ tautologií. (Pro volbu A, B, C namísto p, q, r v těchto úlohách nemáme s výjimkou odlišení od ověřování úsudků zvláštní důvod.) Jak už bylo řečeno výše, tautologie je vlastně závěr pomyslného úsudku o nula premisách. Při důkazu sporem tedy celou tautologii negujeme.

$\neg(A \rightarrow (B \rightarrow A))$ ✓	negace formule
|	
A	dekompozice negace formule; $\neg\rightarrow$
$\neg(B \rightarrow A)$ ✓	dekompozice negace formule; $\neg\rightarrow$
|	
B	dekompozice předchozí složené formule; $\neg\rightarrow$
$\neg A$	dekompozice předchozí složené formule; $\neg\rightarrow$
$\times$	

Daná formule je tautologií, neboť neexistuje valuace, která by splňovala negaci této formule. Protože je nesplnitelná, negace dané formule je kontradikce a formule daná je tudíž tautologií.

13) Metodou sémantických tabel ověřte, zda je formule $(\neg B \rightarrow \neg C) \rightarrow (A \rightarrow B)$ tautologií.

$\neg((\neg B \rightarrow \neg C) \rightarrow (A \rightarrow B))$ ✓	negace formule
|	
$\neg B \rightarrow \neg C$ ✓	dekompozice negace dané formule; $\neg\rightarrow$
$\neg(A \rightarrow B)$ ✓	dekompozice negace dané formule; $\neg\rightarrow$
|	
A	
$\neg B$	dekompozice $\neg(A \rightarrow B)$; $\neg\rightarrow$
/ \\	
B $\quad \neg C$	dekompozice $(\neg B \rightarrow \neg C)$; $\rightarrow$
$\times$	

Daná formule není tautologií, neboť existuje valuace, která splňuje negaci této formule.

14) Metodou sémantických tabel ověřte, zda je formule $\neg((A\to(B\to C)\to((A\to B)\to(A\to C)))$ tautologií.

$\neg((A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C)))$ ✓ negace formule

|

$A\to(B\to C)$ ✓ dekompozice negace dané formule; $\neg\to$

$\neg((A\to B)\to(A\to C))$ ✓ dekompozice negace dané formule; $\neg\to$

|

$A\to B$ ✓ dekompozice $\neg((A\to B)\to(A\to C))$; $\neg\to$

$\neg(A\to C)$ ✓ dekompozice $\neg((A\to B)\to(A\to C))$; $\neg\to$

|

A dekompozice $\neg(A\to C)$; $\neg\to$

$\neg C$ dekompozice $\neg(A\to C)$; $\neg\to$

/ \

$\neg A$ B dekompozice $A\to B$; $\to$

× / \

$\neg A$ $B\to C$ ✓ dekompozice $A\to(B\to C)$; $\to$

× / \

$\neg B$ C dekompozice $B\to C$; $\to$

× ×

Daná formule je tautologií, neboť neexistuje valuace, která by splňovala negaci této formule.

15) Metodou sémantických tabel nalezněte valuaci (je-li jaká), jež splňuje množinu formulí $\{p\to\neg r, q\vee r\}$.

$p\to\neg r$ ✓ daná formule

$q\vee r$ ✓ daná formule

/ \

$\neg p$ $\neg r$ dekompozice $p\to\neg r$; $\to$

/ \ / \

q r q r dekompozice $q\vee r$; $\vee$

×

Sémantické tablo k dané dvojici formulí má tři otevřené větve. Všechny ukazují, které valuace splňují množinu těchto formulí. Indikují nám totiž množiny valuací: danou množinu splňují valuace v takové, že $v(q)$=1 a $v(p)$=0 (a r je buď 1 nebo 0), a dále valuace v' takové, že $v'(p)$=0 a $v'(r)$=1 (a q je buď 1 nebo 0) a konečně valuace v'' taková, že $v''(q)$=1 a $v''(r)$=0 (a p je 1 nebo 0).

16) Metodou sémantických tabel nalezněte valuaci (je-li jaká), jež splňuje množinu formulí $\{p\vee q\vee r, \neg p, p\vee q\vee\neg r, p\vee\neg q\}$.

```
p∨q∨r          ✓     daná formule
¬p                   daná formule
p∨q∨¬r         ✓     daná formule
p∨¬q           ✓     daná formule
/  \
p   ¬q               dekompozice p∨¬q; ∨
×   /  |  \
   p   q   r         dekompozice p∨q∨r; ∨
   ×   ×  /|\
         p  q  ¬r    dekompozice p∨q∨¬r; ∨
         ×  ×  ×
```

Sémantické tablo k dané čtveřici formulí nemá žádnou otevřenou větev, neexistuje tedy valuace, která by danou množinu formulí splnila.

14.9 Cvičení – důkazy metodou sémantických tabel

1) Metodou sémantických tabel ověřte úsudky v 12.5 a 12.7.

2) Metodou sémantických tabel ověřte, zda je daná formule tautologie; jako zadání formule využijte cvičení 10.2.

3) Metodou sémantických tabel nalezněte valuaci (je-li jaká), jež splňuje množinu formulí; jako zadání množin formulí využijte cvičení 3.9.

14.10 Rezoluční metoda

Rezoluční metoda či *rezoluční dokazování*, v návaznosti na předchůdce vypracovaná Johnem Alanem Robinsonem, se uplatňuje při automatickém dokazování, a proto je procvičována zejména v prostředí informatiky. Jak uvidíme, problematika má souvislost s problematikou disjunktivních/konjunktivních forem.

Rezoluční metoda využívá následující pravidlo (kde l je literál, tj. atomická formule nebo její negace), nebo jeho dvě neúplné varianty:

$$\frac{(A\vee l)\wedge(B\vee\neg l)}{(A\vee B)} \qquad \frac{(A\vee l)\wedge\neg l}{A} \qquad \frac{(A\vee\neg l)\wedge l}{A}$$

Závěr tohoto pravidla, $(A\vee B)$, je nazýván *rezolventa*. Rezolventa je sémantický důsledek, nikoli však ekvivalent, konjunkce $(A\vee l)$ a $(B\vee\neg l)$.

Nyní tzv. *klauzule* je literál nebo disjunkce literálů. Například $(A\vee l)$ i $(B\vee\neg l)$ jsou klauzule. Klauzule odpovídá nekontradiktorické formuli. To znamená, že tautologiím odpovídají klauzule jako např. $p\vee l\vee\neg l$, které obsahují literál i jeho negaci. Kontradikcím na druhou stranu odpovídá prázdná klauzule $\square$ (kdyby byla neprázdná, byla by pravdivá aspoň při nějaké valuaci). Tzv. *klauzulární forma* dané formule není nic jiného než její konjunktivní normální forma, tj. konjunkce klauzulí. Například $\neg a\vee(b\wedge c)$ má jako klauzulární formu $(\neg a\vee b)\wedge(\neg a\vee c)$.

Rezoluční metoda má více možností uplatnění, zde je jen několik ukázek.

1) Začněme příkladem odvození důsledku z množiny formulí, resp. s ověřením úsudku jako třeba:

$$\frac{\begin{array}{l} p\rightarrow q \\ \neg p\rightarrow r \end{array}}{q\vee r}$$

Premisy úsudku převedeme na klauzule (eliminujeme dvojitou negaci) a seřadíme pod sebe jako první kroky našeho důkazu, tedy jako jeho předpoklady. Poté na dané kroky aplikujeme rezoluční pravidlo:

1. $\neg p \vee q$ předpoklad
2. $p \vee r$ předpoklad
3. $q \vee r$ rezoluce (1,2)

2) Pravidlo rezoluce můžeme nasadit podle potřeby opakovaně i na průběžně vzniklé formule. Zde je příklad ověření složitějšího úsudku $p \rightarrow (q \vee r)$, $\neg s \rightarrow \neg q$, $t \vee \neg r \therefore p \rightarrow (s \vee t)$:

1. $\neg p \vee q \vee r$ předpoklad (1. premisa v úpravě)
2. $s \vee \neg q$ předpoklad (2. premisa v úpravě)
3. $t \vee \neg r$ předpoklad (3. premisa v úpravě)
4. $\neg p \vee s \vee r$ rezoluce (1,2)
5. $\neg p \vee s \vee \mathrm{t}$ rezoluce (3,4)
6. $p \rightarrow (s \vee t)$ (úprava 5.)

3) Jako další příklad uplatnění rezoluční metody si ukážeme generování logických důsledků formulí. Uvažme pro příklad, že lidé se jmény A až E se dívají na televizi, čemuž odpovídají atomické výroky *a* až *e*. Víme, že platí doslova toto $(a \rightarrow b)$, $(d \vee e)$, $(b \vee c) \wedge \neg(b \wedge c)$, $(d \leftrightarrow c)$, $e \rightarrow (a \wedge d)$. Dané výroky převedeme do klauzulární podoby:

1. $(a \rightarrow b)$, tj. $(\neg a \vee b)$
2. $(d \vee e)$
3. $(b \vee c) \wedge \neg(b \wedge c)$, tj. $(b \vee c) \wedge (\neg b \vee \neg c)$
4. $(d \leftrightarrow c)$, tj. $(\neg d \vee c) \wedge (\neg c \vee d)$
5. $e \rightarrow (a \wedge d)$, tj. $\neg e \vee (a \wedge d)$ čili $(\neg e \vee a) \wedge (\neg e \vee d)$

Konjunkce rozdělíme na jednotlivé klauzule a všechny získané klauzule seřadíme do posloupnosti jako první kroky důkazu:

1. $\neg a \vee b$
2. $d \vee e$
3. $b \vee c$
4. $\neg b \vee \neg c$
5. $\neg d \vee c$
6. $\neg c \vee d$
7. $\neg e \vee a$
8. $\neg e \vee d$

Další kroky získáme rezolucí. Snažíme se přitom vygenerovat nejjednodušší rezolventy, čímž získáme všechny platné elementární (pozitivní nebo negativní) fakty:

9.	d	rezoluce (2,8), tj. D se dívá
10.	c	rezoluce (5,9), tj. C se dívá
11.	$\neg b$	rezoluce (4,10), tj. B se nedívá
12.	$\neg a$	rezoluce (1,11), tj. A se nedívá
13.	$\neg e$	rezoluce (7,12), tj. E se dívá

4) Před aplikací rezoluční metody k ověření splnitelnosti množiny formulí si připomeňme, že množina formulí je nesplnitelná, pokud obsahuje spor nebo je spor z dané množiny odvoditelný. Takže pokud v důkazu vygenerujeme prázdnou rezolventu, daná množina je nesplnitelná. Ověřme splnitelnost množiny $\{p\vee q\vee\neg r, \neg p, p\vee q\vee r, p\vee\neg q\}$:

1.	$p\vee q\vee\neg r$	
2.	$\neg p$	
3.	$p\vee q\vee r$	
4.	$p\vee\neg q$	
5.	$q\vee\neg r$	rezoluce (1,2)
6.	$p\vee q$	rezoluce (1,3)
7.	p	rezoluce (4,6)
8.	$\square$	spor (2,7)

Další rezolventy již generovat nemusíme, daná množina je nesplnitelná.

5) Úsudky lze ověřovat rovněž aplikací metody rezoluce v rámci důkazu sporem. Ověřme tak například úsudek $p\vee q$, $\neg p\vee r$ a $\neg q\vee s$ $\therefore$ $r\vee s$. Při důkazu sporem negujeme závěr a převedeme ho pomocí DM na $\neg r\vee\neg s$. Na dané formule opakovaně aplikujeme rezoluční pravidlo:

1.	$p\vee q$	předpoklad
2.	$\neg p\vee r$	předpoklad
3.	$\neg q\vee s$	předpoklad
4.	$\neg r$	první konjunkt negace závěru
5.	$\neg s$	druhý konjunkt negace závěru
6.	$\neg p$	rezoluce (2,4)
7.	q	rezoluce (1,6)
8.	$\neg q$	rezoluce (3,5)
9.	$\square$	spor (7,8)

Při důkazu sporem jsme tedy došli k prázdné klauzuli, takže příslušná množina předpokládaná v důkazu sporem splnitelná není. Proto daný závěr plyne ze zadané množiny formulí, úsudek je platný.

14.11 Cvičení – určení vyplývajícího výroku rezoluční metodou (výběr z možností)

Rezoluční metodou určete ten jediný výrok z níže uvedených možností, který vyplývá z výroků daných:

1) Jestliže nemám chřipku, tak mám nachlazení.
Nemám nachlazení.

i) Jestliže mám chřipku, tak nemám virózu.
ii) Mám chřipku nebo mám virózu.
iii) Nemám chřipku nebo mám virózu.
iv) Jestliže nemám nachlazení, tak mám virózu.
v) Mám nachlazení nebo nemám virózu.

2) Jestliže mám hifi, tak mám televizi.
Nemám televizi.

i) Mám video nebo mám hifi.
ii) Nemám video nebo mám televizi.
iii) Nemám video nebo nemám hifi.
iv) Jestliže mám video, tak mám hifi.
v) Jestliže nemám video, tak mám televizi.

3) Jestliže pracuješ, tak se nesoustředíš.
Jestliže pracuješ, tak se soustředíš.

i) Pracuješ.
ii) Nepracuješ.
iii) Jestliže se nesoustředíš, tak pracuješ.
iv) Jestliže nepracuješ, tak se soustředíš.
v) Pracuješ nebo se soustředíš.

4) Nesvítí-li kontrolka, přístroj nefunguje.
Kontrolka nesvítí nebo nejde elektřina.

i) Kontrolka svítí.
ii) Nejde elektřina.
iii) Funguje-li přístroj, pak nejde elektřina.

iv) Funguje-li přístroj, pak jde elektřina.
v) Kontrolka nesvítí.

5) Jestliže je to těžké, tak to není hranaté.
Jestliže to není hranaté, tak je to oblíbené.

i) Je to těžké nebo to není oblíbené.
ii) Je to těžké nebo je to oblíbené.
iii) Jestliže je to těžké, tak to není oblíbené.
iv) Jestliže to není těžké, tak je to oblíbené.
v) Jestliže je to těžké, tak je to oblíbené.

6) Jestliže jedu na chalupu, cestuji vlakem a půjdu dlouho pěšky.
Necestuji vlakem.

i) Nejedu-li na chalupu, tak půjdu dlouho pěšky.
ii) Nejedu na chalupu nebo půjdu dlouho pěšky.
iii) Nejedu-li na chalupu, tak nepůjdu dlouho pěšky.
iv) Půjdu dlouho pěšky nebo jedu na chalupu.
v) Půjdu-li dlouho pěšky, jedu na chalupu.

7) Jestliže nejdu do práce, je pracovní den a mám dovolenou.
Není pracovní den.

i) Nejdu do práce nebo nemám dovolenou.
ii) Mám-li dovolenou, nejdu do práce.
iii) Mám dovolenou nebo nejdu do práce.
iv) Nejdu-li do práce, mám dovolenou.
v) Jdu-li do práce, nemám dovolenou.

8) Jestliže je slunečně nebo neprší, tak jdu na zahradu.
Prší.

i) Jestliže je slunečně, tak nejdu na zahradu.
ii) Jestliže není slunečně, tak jdu na zahradu.
iii) Nejdu na zahradu.
iv) Není slunečně nebo jdu na zahradu.
v) Je slunečně nebo nejdu na zahradu.

9) Dám si polévku nebo nebudu jíst.
Jestliže si dám polévku, nedám si řízek.

i) Jestliže budu jíst, tak si dám řízek.
ii) Budu jíst nebo si nedám řízek.
iii) Nebudu jíst a dám si řízek.
iv) Nebudu jíst nebo si dám řízek.
v) Jestliže budu jíst, tak si nedám řízek.

10) Jestliže nevyvařuji, uklízím.
Jestliže vyvařuji, budu obědvat.

i) Uklízím nebo budu obědvat.
ii) Uklízím a nebudu obědvat.
iii) Jestliže neuklízím, nebudu obědvat.
iv) Uklízím nebo nebudu obědvat.
v) Neuklízím nebo budu obědvat.

11) Když se kácí les, létají třísky.
Kácí se les nebo létají kůrovci.

i) Jestliže nelétají třísky, nelétají kůrovci.
ii) Jestliže nelétají třísky, létají kůrovci.
iii) Nelétají třísky nebo létají kůrovci.
iv) Létají třísky a nelétají kůrovci.
v) Létají třísky nebo nelétají kůrovci.

12) Není-li deštivo, není ošklivě.
Není deštivo nebo není chladno.

i) Je ošklivě nebo je chladno.
ii) Je-li ošklivě, tak je chladno.
iii) Je ošklivě a je chladno.
iv) Je-li ošklivě, tak není chladno.
v) Je ošklivě nebo není chladno.

13) Je-li to psáno, je to pravda.
Je to pravda, je to chytře vymyšleno.

i) Není-li to psáno, je to chytře vymyšleno.
ii) Není to psáno nebo je to chytře vymyšleno.
iii) Je to psáno nebo je to chytře vymyšleno.
iv) Není to psáno a je to chytře vymyšleno.
v) Není to psáno nebo to není chytře vymyšleno.

14) Když se dva perou, třetí se směje.
Když dva bijí třetího, třetí se nesměje.

i) Dva se perou nebo nebijí třetího.
ii) Když se dva perou, pak bijí třetího.
iii) Dva se neperou a bijí třetího.
iv) Dva se neperou nebo bijí třetího.
v) Dva se neperou nebo nebijí třetího.

15) Když kocour není doma, myši mají pré.
Kocour není doma nebo tvrdě spí.

i) Spí-li kocour, mají myši pré.
ii) Kocour nespí a myši nemají pré.
iii) Kocour spí nebo myši nemají pré.
iv) Nespí-li kocour, mají myši pré.
v) Kocour nespí nebo myši nemají pré.

14.11 Řešení – určení vyplývajícího výroku rezoluční metodou (výběr z možností)

1) ii), „Mám chřipku nebo mám virózu“.

2) iii), „Nemám video nebo nemám hifi“.

3) ii), „Nepracuješ“.

4) iii), „Funguje-li přístroj, pak nejde elektřina“.

5) v), „Jestliže je to těžké, tak je to oblíbené“.

6) ii), „Nejedu na chalupu nebo půjdu dlouho pěšky“.

7) iv), „Nejdu-li do práce, mám dovolenou“.

8) iv), „Není slunečně nebo jdu na zahradu“.

9) v), „Jestliže budu jíst, tak si nedám řízek“.

10) i), „Uklízím nebo budu obědvat“.

11) ii), „Jestliže nelétají třísky, létají kůrovci“.

12) iv), „Je-li ošklivě, tak není chladno“.

13) ii), „Není to psáno nebo je to chytře vymyšleno“.

14) v), „Dva se neperou nebo nebijí třetího“.

15) iv), „Nespí-li kocour, mají myši pré“.

15. Neklasické výrokové logiky

Posláním této kapitoly je aspoň stručně referovat o současných významných a zavedených alternativách ke klasické VL; pro bližší seznámení s nimi je nezbytné konzultovat doporučenou literaturu. Neklasičnost znamená, že tyto logické systémy záměrně rezignují na některý z fundamentálních principů klasické logiky. Jak uvidíme, nezřídka se rozešly s Principem dvouhodnotovosti; někdy se částečně rozešly i s Principem kompozicionality (někdy se v této souvislosti říká, že jsou proto intenzionální), což znamená, že význam formule nelze jednoduše dopočítat z významů složek, jak bychom očekávali. Věk neklasických logik začíná vlastně až po druhé světové válce. V prostředí filosofické logiky má dominantní postavení modální logika a její varianty. Nutno ještě podotknout, že všechny z níže jmenovaných logik mají predikátově-logickou variantu.

Trojhodnotové logiky

Trojhodnotová logika byla v době mezi dvěma světovými válkami navržena nezávisle více autory, nejvýznamnější je Jan Łukasiewicz. Toho inspiroval Aristotelův příklad vět o budoucích událostech (např. o budoucí námořní bitvě), jejichž pravdivost není nyní zjistitelná. Dmitrije Bočvara zase inspirovaly paradoxní věty, jejichž pravdivost rovněž není určitelná. Třetí pravdivostní hodnota bývá značena například pomocí „$^1/_2$" (nebo „2", „U", „I" či „⊥") a je čtena jako „nerozhodnuto", „neurčitelná", „není známo" či „paradoxní hodnota" apod. Po druhé světové válce Stephen C. Kleene pomohl propagaci *parciální dvouhodnotové logiky*, přičemž absence pravdivostní hodnoty u nějaké funkce bývá reprezentována právě třetí pravdivostní hodnotou, takže daný přístup je chápán jako trojhodnotový. (Bočvarova logika je známa pod názvem Kleeneho slabá („weak") logika.) V trojhodnotové logice máme 3 umocněno na 3^n *n*argumentových spojek, tj. 27 unárních spojek, 729 binárních, atd. Dílčí trojhodnotové logiky se liší tím, jaké spojky si vybírají. Například Kleene vybral operátory, které se sémanticky chovají jako zobecněné-rozšířené klasické spojky. Pro ilustraci si zde ukážeme jen tři různé implikace a tzv. slabou (angl. „weak") a silnou (angl. „strong") negaci (angl. zvanou též „denial"):

¬	*p*
0	1
½	½
1	0

~	*p*
0	1
1	½
1	0

→ Łukasiewicz		*q*		
		1	½	0
p	1	**1**	½	**0**
	½	**1**	**1**	½
	0	**1**	**1**	**1**

→ Bočvar		*q*		
		1	½	0
p	1	**1**	½	**0**
	½	½	½	½
	0	**1**	½	**1**

→ Kleene		*q*		
		1	½	0
p	1	**1**	½	**0**
	½	**1**	½	½
	0	**1**	**1**	**1**

V trojhodnotové logice obvykle neplatí tautologie klasické logiky. Například Bočvarův systém ‚propaguje' třetí pravdivostní hodnotu natolik, že třetí pravdivostní hodnotu má každá formule, jejíž nějaká podformule nabývá třetí pravdivostní hodnotu; zákonitě pak žádná formule nemůže mít pravdivostní hodnotu 1 při všech valuacích. To odpovídá pojetí třetí pravdivostní hodnoty jako paradoxní hodnoty, jež ‚nakazí' vždy celý výrok. V jiných trojhodnotových logikách tomu tak ale není, například je rozumné disponovat disjunkcí, jež je 1, pokud aspoň jeden disjunkt je 1, takže má-li ten druhý disjunkt třetí pravdivostní hodnotu, celek je stejně 1.

Vícehodnotové logiky

Vícehodnotových logik (angl. „many valued") je celá řada, některé z nich však vystupují jako soběstačné systémy, např. fuzzy logika, poněvadž se vyznačují něčím více, než jen implementací více než dvou pravdivostních hodnot. Někteří autoři mají tendenci vícehodnotové logiky porovnávat (např. Siegfried Gottwald, Melvin Fitting), jiní zas pracují na vybrané z nich (např. Heinrich Wansing a Jaroslav Šramko pracují na 16hodnotové logice). V poslední době měla v rámci filosofické logiky značný ohlas 4hodnotová logika Nuela Belnapa, který se pro uvedení 4 pravdivostních hodnot inspiroval tím, že počítač, jehož činnost chceme modelovat, dostává pro své stavy informace pravdivé / nepravdivé / sporné / žádné.

Fuzzy logiky

Fuzzy logika (česky někdy *mlhavá logika*) byla vyvinuta v následnictví teorie fuzzy množin, kterou navrhl v 60. letech 20. století Lofti A. Zadeh jako množinovou teorii uplatnitelnou v oblastech, v nichž nejsou striktně určeny prvky daných množin, resp. dané predikáty jsou vágní (příkladem je hromada písku a mj. s tím související paradox sorites). Fuzzy logika patří mezi vícehodnotové logiky, namísto určitých hodnot používá celý interval [1,0], výroky tedy ohodnocuje mírou pravdivosti. Nutno podotknout, že výrokové spojky se chovají zcela klasicky na klasických hodnotách 1 a 0. Fuzzy logika je úspěšně nasazována v teorii řídících systémů (aplikacemi jsou fuzzy regulátory např. v automatických pračkách), neboť je s to zpracovávat neurčitou informaci či instrukci (např. „voda je středně málo teplá“, „zatočit hodně doleva“). Rozvoj fuzzy logiky akceleroval v 80. letech 20. století, významnými představiteli jsou Siegfried Gottwald a náš Petr Hájek, dále jsou v mezinárodním prostředí úspěšní Vilém Novák, Jan Pavelka, z mladší generace pak Libor Běhounek, Petr Cintula; fuzzy logika se však pěstuje v celém technologicky vyspělém světě. Fuzzy VL se základně dělí na tzv. základní, Łukasiewiczovu, Gödelovu a produktovou logiku, jež se navzájem liší druhem t-normy (angl. „triangular norm“), což je např. min(x,y) jakožto sémantika spojky $\wedge$.

Modální logiky

Modální logika má kromě trojhodnotové logiky ještě předchůdce v *kalkulu striktní implikace*. Operátor *striktní implikace* (značena budiž třeba », oficiální znak připomíná malou harpunu) uvedl Clarence I. Lewis po první světové válce v kritické reakci na Russellova a Whiteheadova Principia Mathematica. Striktní implikace má slovní obdobu „není pravda, aby bylo možné, že A je pravdivé a B nepravdivé“; formálně A»B $=_{df} \neg\Diamond(A\wedge\neg B)$, kde $\Diamond$ je znak pro „je možné, že“. S kalkulem striktní implikace pracovala i významná modální logička Ruth Barcan Marcusová.

Modální logika využila formalizovaného pojmu možnosti a nutnosti k vystavění celé řady logických systémů. Před jejich stručným popisem nejprve rozšiřme gramatiku VL. Logická *nutnost*, značená $\Box$ (angl. „box“) je v běžném jazyce vyjádřena pomocí „je nutné, že …“; logická *možnost*, značená $\Diamond$ (angl. „diamond“), je v jazyce vyjadřována pomocí „je možné, že …“; možnost je zpravidla zavedena jako $\Diamond A =_{df} \neg\Box\neg A$. Oba slovní obraty jsou samozřejmě poněkud vágní (nutnost třeba znamená logickou, ale někdy i fyzikální modalitu, atp.), čemuž odpovídají různá zpřesnění v rámci různých modálních systémů. Protože v pozici „…“ je výrok, modální operátory se chovají přibližně jako kvantifikátory, avšak vztažené k větám; například nutnost A se zdá znamenat, že A je pravdivá za všech okolností, vždy. Aplikujeme-li modální operátory na predikáty, věc se stane méně samozřejmou a po formální i výkladové stránce vznikne řada komplikací.

Modální systém značený K je základní a rovněž slabý systém. Vznikne tím, že k VL (tj. k nějakému úplnému a korektnímu kalkulu pro VL) přidáme *Pravidlo necesitace:*

Jestliže $\vdash A$, pak také $\vdash \Box A$.

a *Axiom distributivity*, značený někdy též K:

$\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$.

Systém T vznikne přidáním axiomu T ke K:

(T) $\Box A \to A$ („je-li nutné, že A, tak A")

T-axiom se chová jako intuitivní axiom pravdivosti: „je-li pravdivé, že A, tak A". Známé a používané systémy S4 a S5 mají řadu dílčích variant. Vzniknou kromě jiného přidáním iteračních axiomů:

(4) $\Box A \to \Box\Box A$ („je-li nutné, že A, tak je nutné, že je nutné, že A")
(5) $\Diamond A \to \Box\Diamond A$ („je-li možné, že A, tak je nutné, že je možné, že A")

Základní modální systémy byly navrženy již C. I. Lewisem, ovšem jejich intuitivní sémantika byla nahrazena explicitní sémantikou, kterou na počátku 60. let navrhl Saul A. Kripke, jenž při tom uplatnil teorii modelů; výsledek se obecně jmenuje *sémantika možných světů* (angl. „possible world semantics"). Základní myšlenkou Kripkeho sémantiky je, že formule A je pravdivá relativně k tzv. *možnému světu w*. Tento w můžeme chápat jako alternativní popis našeho světa (historický termín „možný svět" svádí k nevhodné konotaci, že jde o nějaký alternativní vesmír). Kolekci možných světů značme W; jeden prvek W je aktuálním možným světem, jde tedy o platný popis světa. Poněkud zjednodušeně řečeno, formule $\Box A$ je pravdivá právě tehdy, když A je pravdivá ve všech w; formule $\Diamond A$ je pravdivá právě tehdy, když A je pravdivá alespoň v jednom w.

To, co se označuje jako *kripkovská sémantika*, je vylepšením této ideje. Jistě ne každá posloupnost možných světů může korespondovat vývoji našeho světa, čili ne v každém w jsou zcela všechny možné w' reálnými alternativami. Například je-li Alík psem, není bezprostředním pokračováním daného světa svět, v němž je Alík kočkou (v oblasti epistemické logiky: vím-li ve w A, pokračováním není w', v němž platí $\neg A$). Uspořádávání světů do posloupností je dáno povahou na nich operující relace R, která je nazývána *relací dosažitelnosti* (angl. „accessibility"). Její vlastnosti jsou zachyceny axiomy, například reflexivitě odpovídá $\Box A \rightarrow A$, symetrii $A \rightarrow \Box\Diamond A$, tranzitivitě $\Box A \rightarrow \Box\Box A$; různým kombinacím těchto axiomů tedy odpovídají různé druhy R. K interpretaci formulí nejen modálních logik se pak používá tzv. struktura $\langle W, @, R \rangle$, kde @ je vybraný (‚startovní') možný svět z W. Z mnoha modálních logiků či logiků aspoň někdy pracujících s modální logikou se omezme jen na autory významných učebnic či přehledů modální logiky, Maxe J. Cresswella, G. E. Hughese, Briana Chellase, Melvina Fittinga, Patricka Blackburna, Maarten de Rijke a Yde Venemu; známé aplikace v problematice kontrafaktuálů pochází od Davida Lewise a Roberta Stalnakera.

Temporální logiky

Aletické modality jako třeba nutnost jsou jen jedním druhem modalit, úzce příbuznými jsou temporální modality. Proto není překvapením, že modální logika bývá vykládána jako *temporální logika*, kdy posloupnost časových okamžiků (namísto světů) je lineárně uspořádána. Základními operátory jsou P jakožto formalizace „platilo, že" a F jakožto formalizace „bude platit, že", dalšími pak H – „dosud platilo, že", G – „(od teď) vždy bude platit, že". Zakladatelem temporální logiky byl na konci 50. let Arthur N. Prior, pokračovateli pak např. Hans Kamp, Johan van Benthem, v aplikacích pro modelování stavů počítačových programů pak např. Richard Goldblatt.

Epistemické logiky

Epistemická logika zkoumá logické vztahy mezi výroky s epistémickými operátory jako například „je známo, že" či „domnívám se, že" (logika domnívání byla nazývána *doxastická logika*). Je-li epistemická logika výkladem modální logiky, $\Box$ je vykládáno jako vědění, $\Diamond$ jako domnívání; v *multimodální logice*, jež už užívá $\Box$ a $\Diamond$, jsou pro ony dva pojmy rezervovány znaky K a B. Zakladatelem epistemické logiky je Jaakko Hintikka, který ji na začátku 60. let 20. století předložil jako variantu modální logiky. V současnosti je epistemická logika využívána například ve formální epistemologii. Je třeba poznamenat, že postupem doby se ukázalo, že klasické axiomy a teorémy modální logiky jsou příliš silné v tom smyslu, že reprezentují znalosti agentů, kteří jsou epistemicky přespříliš dokonalí. Pro příklady není třeba chodit daleko, stačí přezkoumat libovolný axiom (s výjimkou K$A \rightarrow A$, jež reprezentuje část klasického názoru, že znalost je odůvodněné pravdivé přesvědčení). Například K$A \rightarrow$KKA (tj. iterační axiom S4) říká, že vím-li A, tak také vím, že to vím, ač reálně mohou být moje kognitivní schopnosti oslabeny, takže konsekvent by neplatil; axiom

$K(A \rightarrow B) \rightarrow (KA \rightarrow KB)$ zase zavazuje agenty ke znalosti vůbec všech logických důsledků svých přesvědčení, ač reálně žádní vševědoucí agenti neexistují.

Deontické logiky

Deontická logika (řecké „deontos" znamená povinný, žádoucí), resp. *logika norem*, někdy též *logika imperativů*, byla založena v 50. letech 20. století Georgem Henrykem von Wrightem jako jedna z prvních variant modální logiky, a to za účelem využití v oblasti tzv. *právní logiky*. Základními operátory jsou O (angl. „obligatory", „je přikázáno"), P (angl. „permitted", „je dovoleno"), F (angl. „forbidden", „je zakázáno"); vzájemná definovatelnost je tato: $\mathrm{O}p =_{df} \neg\mathrm{P}\neg p$, $\mathrm{P}p =_{df} \neg\mathrm{O}\neg p$, $\mathrm{F}p =_{df} \neg\mathrm{P}p$. Deontická logika se zdá být potřebná a žádoucí, nicméně od počátku zápasí s palčivými paradoxy, které plynou z příliš hrubé analýzy deontických pojmů. Například Rossův paradox ukazuje, že zdánlivě přijatelné formální odvození $Op \vdash O(p \vee q)$ je silně neintuitivní, uvažme „Odešli tento dopis" $\vdash$ „Odešli tento dopis nebo jej spal". Představiteli deontické logiky jsou dále např. Risto Hilpinen, Dagfin Føllesdal, Lennart Åqvist. V současnosti probíhá výzkum zvláště v oblasti (někdy i počítačově implementované) *deontic action logic*, představitelem je např. Krister Segerberg.

Erotetické logiky

Erotetická logika, často nazývaná i *logika otázek*, většinou staví na modální logice, ovšem někdy zavádí speciální operátory jako „?". Soustřeďuje se na logickou analýzu a klasifikaci otázek a problému přiměřenosti odpovědí. Jedním z prvních logiků věnujících se této tématice byl v polovině 70. let 20. století Nuel Belnap, v současnosti je významným např. Andrzej Wiśniewski. Dnes se objevuje erotetická logika jako součást dynamických epistemických logik (zkoumajících komunikaci agentů).

Intenzionální logiky

Termín *intenzionální logika* byl zaveden na počátku 70. let 20. století pro práce zejména Richarda Montagueho, které se sice zabývaly modální logikou, popřípadě nějak rozšířenou o temporální parametr, nicméně spíše než o studium logických struktur jako takových se jedná o aplikace v oblasti přirozeného jazyka, totiž o modelování jazykových významů. Montague a jeho následovníci (v lingvistice Barbara Hall Partee) uvažují, že významem běžných predikátů či vět jsou *intenze* modelované jakožto funkce z možných světů. Například propoziční postoj popisovaný ve větě jako „Adam si myslí, že prší" je vztahem Adama k určité intenzi (nazývané propozice), nikoli k pravdivostní hodnotě (což je hodnota té intenze v nějakém možném světě). Postulovat takový druh významu pro věty je nezbytné pro vysvětlení inferencí, které by byly vysvětleny chybně, pokud bychom využívali jen extenze (zde jmenovitě pravdivostní hodnoty). Spíše než v rámci výrokových logik jsou ideje intenzionální logiky uplatněny v prostředí predikátových logik.

Intuicionistické logiky

Intuicionistická logika má původ ve vlivné filosofii matematiky Luciena E. J. Brouwera, který argumentoval, že doposud nerozhodnuté matematické propozice nelze považovat za pravdivé nebo nepravdivé, a proto neplatí zákon vyloučeného třetího – což je základní znak intuicionistické logiky. Neplatí v ní ani další teorémy klasické VL; uznán není nepřímý důkaz. (Matematika je pro intuicionistické matematiky studiem myšlenkových konstrukcí, odtud termín *konstruktivismus*.) Technické vypracování intuicionistické VL provedl už ve 30. letech 20. století Arend Heyting. Sémantiku nezávisle vyvinul i Andrej Kolmogorov, proto termín BHK intepretace intuicionistické logiky (podle ní např. dokázat výrok $A \wedge B$ znamená dokázat A a B; výroky jsou chápány spíš jako problémy než věty). V současné době filosoficky obhajuje intuicionismus Michael Dummett, Dirk van Dalen, v techničtější oblasti pracují Anne Sjerp Troelstra a Per Martin Löf, který podnítil i aplikace v teorii automatického dokazování. Některá rozšíření intuicionistické logiky se nazývají *intermediate logics*.

Relevanční logiky

Relevanční logika, nebo též *relevantní logika*, má inspiraci v Lewisově kritice materiální implikace. Například se nejeví příliš intuitivní z „Prší“ odvodit „Má-li Adam auto, prší“ (dle zákona $A \vdash B \rightarrow A$), odtud termín *paradoxy materiální implikace*. Relevantisté si na přelomu 60. a 70. let 20. století povšimli, že materiální implikace pomíjí relevanci, ‚obsahovou souvislost‘. Relevanční implikace (obvykle značená $\rightarrow$, takže se liší od materiální implikace $\supset$) tuto souvislost zapracovává. To znamená, že relevanční $\rightarrow$ nemůže mít sémantiku shodnou s kteroukoli z výše studovaných 16 výrokových spojek, ale nějakou podstatně sofistikovanější sémantiku, což jednoduchý zápis $A \rightarrow B$ neprozrazuje. Proponenty byli Alan Ross Anderson, Nuel Belnap, v současnosti se často zmiňuje sémantika vypracována Richardem Routleym (po přejmenování: Richard Sylvan), k dalším význačným relevantistům patří R. K. Meyer, Edwin Mares.

Parakonzistentní logiky

Parakonzistentní logika je v rámci filozofické logiky aktuálně velmi studována, dobu vzniku má ve druhé polovině 70. let 20. století. Původní motivaci pro její existenci můžeme najít ve snaze rozhodnout paradoxní věty, jež zřejmě buď nemají žádnou hodnotu (to bychom se ale přiklonili jako Kripke a jiní k nějaké parciální logice), anebo mají obě dvě pravdivostní hodnoty zaráz. To navrhl nejznámější proponent parakonzistentní logiky, Graham Priest a toto okaté porušení Principu dvouhodnotovosti nazval dialetheia (dvojpravda). Důležité je, že ze sporu parakonzistentní logika nevyvozuje cokoli, odmítá totiž Princip Dunse Scota, jenž je barvitě nazýván Princip exploze. Potvrzující motivaci lze vidět například v systémech právních norem, které většinou obsahují skrytý spor, ale z toho přece nevyvozujeme, že se smí cokoli. Priest se později přiklonil nejen k myšlenkám relevanční logiky, ale též ke čtyřhodnotové logice. Jako *logiku formální inkonzistence* pěstují parakonzistentní logiku Newton da Costa či Walter Carnielli, jako *adaptativní logiku* Diderik Batens, propagátorem je i Jean-Yves Béziau.

Substrukturální logiky

Substrukturální logika vypouští některá pravidla gentzenovského kalkulu, jež se týkají pouze strukturálních aspektů logického vyvozování jako např. možnost libovolné záměny premis. Studiu různých substrukturálních logik se věnují například Francesco Paoli, Peter Schroeder-Heister, Kosta Došen nebo Greg Restall či Jean-Yves Girard (ten navrhl specifickou variantu pod názvem *lineární logika*).

Literatura

Česká a slovenská použitá nebo doporučená literatura

Berka, Karel (1994): *Stručné dějiny logiky*. Praha: Karolinum.
Bokr, Josef, Svatek, Jan (2000): *Základy logiky a argumentace pro zájemce o umělou inteligenci, filozofii, práva a učitelství*. Plzeň: Vydavatelství a nakladatelství Aleš Čeněk.
Cmorej, Pavel (2002): *Úvod do logické syntaxe a sémantiky*. Praha: Triton.
Čechák, Vladimír, Berka, Karel, Zapletal, Ivo (1981): *Co víte o moderní logice*. Praha: Horizont.
Duží, Marie (2012): *Logika pro informatiky (a příbuzné obory)*. Ostrava: Vydavatelství VŠB-TU Ostrava.
Gahér, František (1994, 2001): *Logika pre každého*. Bratislava: Iris.
Hromek, Petr (2002): *Logika v příkladech*. Olomouc: Filozofická fakulta Univerzity Palackého v Olomouci.
Janák, Vladimír (1974, 1976): *Základy formální logiky*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství.
Jauris, Miroslav (1970): *Logika*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství.
Kučera, Antonín (2009): *Matematická logika. Materiály ke kurzu MA007*. http://www.fi.muni.cz/usr/kucera/teaching/logic/logika.pdf
Lukasová, Alena (2003): *Formální logika v umělé inteligenci*. Brno: Computer Press.
Materna, Pavel (1968): *Umíte logicky myslet?*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství.
Mleziva, Miroslav (1970): *Neklasické logiky*. Praha: Svoboda.
Peliš, Michal (2002): *Logika: učebnice pro přijímací zkoušky na právnické a humanitní fakulty*. Mělník: Amos.
Peregrin, Jaroslav (2004): *Logika a logiky*. Praha: Academia.
Peregrin, Jaroslav, Svoboda, Vladimír (2005): *Od jazyka k logice*. Praha: Academia.
Sochor, Antonín (2001): *Klasická matematická logika*. Praha: Univerzita Karlova v Praze – Nakladatelství Karolinum.
Sochor, Antonín (2011): *Logika pro všechny ochotné myslet*. Praha: Karolinum.
Sousedík, Prokop (1991): *Logika pro studenty humanitních oborů*. Praha: Vyšehrad.
Svatek, Jan, Dostálová, Ludmila (2003): *Logika pro humanistiku*. Dobrá voda: Aleš Čeněk.

Štěpán, Jan (1992): *Logika a logické systémy*. Olomouc: Votobia.
Štěpán, Jan (2001): *Klasická logika*. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci.
Štěpán, Jan (2001): *Logika a právo*. Praha: C. H. Beck.
Štěpánek, Petr (2009): *Výroková a predikátová logika*. (slidy) http://ktiml.mff.cuni.cz/teaching/files/materials/VL1.pdf
Švejdar, Vítězslav (2002): *Logika: neúplnost, složitost a nutnost*. Praha: Academia.
Trlifajová, Kateřina, Vašata, Daniel (2013): *Matematická logika*. Praha: České vysoké učení technické.
Weinberger, Ota (1993): *Základy právní logiky*. Brno: Masarykova univerzita.
Zastávka, Zdeněk (1998): *Vše, co není zakázáno, se nesmí: O logice formální a neformální*. Praha: Radix, spol. s r. o.
Zouhar, Marián (2008): *Základy logiky pre spoločenskovedné a humanitné odbory*. Bratislava. Veda.

Zahraniční použitá nebo doporučená literatura

Andrews, Peter B. (1986): *An Introduction to Mathematical Logic and Type Theory: To Truth through Proof*. Academic Press.
Bergmann, Merrie, Moor, James, Nelson, Jack (2014): *The Logic Book* (6th edition). McGraw-Hill.
Barwise, Jon, Etchemendy, John (1999): *Language, Proof and Logic*. CSLI / Seven Bridges Press.
Bostock, David (1997): *Intermediate Logic*. Oxford University Press.
Copi, Irving M. (1986): *Introduction to Logic*. Macmillan Publishing Company.
Enderton, Herbert B. (1972): *A Mathematical Introduction to Logic*. Academic Press.
Jago, Mark (2007): *Formal Logic*. Penrith: Humanities-Ebooks.
Klenk, Virginia (2008): *Understanding Symbolic Logic*. (5th edition). Upper-Saddle River: Pearson Education, Inc.
Hausman, Alan, Kahane, Howard, Tidman, Paul (2010): *Logic and Philosophy: A Modern Introduction*. Wadsworth Cengage Learning.
Howson, Colin (1997): *Logic with Trees: An Introduction to Symbolic Logic*. Routledge.
Hurley, Patrick J. (2006): *A Concise Introduction to Logic*. (9th edition). Wadsworth Publishing Paperback.
Church, Alonzo (1956): *Introduction to Mathematical Logic*. Princeton University Press.

Kleene, Stephen C. (1967): *Mathematical Logic*. John Wiley.
Manna, Zohar (1974): *Mathematical Theory of Computation*. McGraw-Hill, Inc. / (1981): *Matematická teorie programů*. Praha: SNTL.
Mendelson, Elliot (1964): *Introduction to Mathematical Logic*. Princeton: D. Van Nostrand Company.
Priest, Graham (2007): *Logic: A Very Short Introduction*. Oxford University Press / (2007): *Logika: Průvodce pro každého*. Praha: Dokořán.
Rautenberg, Wolfgang (2010): *A Concise Introduction to Mathematical Logic*. Springer.
Restall, Greg (2006): *Logic: An Introduction*. Routledge.
Restall, Greg (2013): *Advanced Logic (Kurt Gödel's Greatest Hits)*, http://vimeo.com/album/2262409
Shaw, Laird, Proof Tools: a symbolic logic proof tree generator. http://creative-andcritical.net/prooftools/
Shoenfield, Joseph R. (1967): *Mathematical Logic*. Addison-Wesley.
Sider, Theodore (2007): *Logic for Philosophy*. Oxford University Press.
Smullyan, Raymond M. (1968): *First-order Logic*. Springer-Verlag. / (1979): *Logika prvého rádu*. Bratislava: Alfa.
Smullyan, Raymond M. (1981): *What Is the Name of This Book? The Riddle of Dracula and Other Logical Puzzles* / (1986): *Jak se jmenuje tahle knížka?* Praha: Mladá fronta.
Stanford Encyclopedia of Philosophy (ed. E. Zalta), http://plato.stanford.edu/ (hesla týkající se logiky).
Tarski, Alfred (1941/1994): *Introduction to Logic: and to the Methodology of Deductive Sciences*. Dover Books / (1966): Úvod *do logiky a metodologie přírodních věd*. Praha: Academia.
Wikipedia, https://en.wikipedia.org/ (hesla týkající se logiky).

Rejstřík

A

B

C

D

E

F

M

N

O

P

R

S

T

U

V

Z

Rejstřík často užitých symbolů

1	pravdivostní hodnota Pravda
0	pravdivostní hodnota Nepravda
$\neg$	negace
$\wedge$	konjunkce
$\vee$	disjunkce
$\rightarrow$	(materiální) implikace
$\leftrightarrow$	ekvivalence
$\uparrow$	Schefferova funkce
$\downarrow$	Nicod-Peirceova funkce
$\therefore$	odděluje premisy a závěr (platného či neplatného) úsudku či úsudkové formy
/	odděluje předpoklady a závěr odvozovacího pravidla; ovšem v případech užití „/“ bez mezer jako například v „*A*/*B*“ indikuje, že *A* je substituováno za *B*; konečně v textu psaném běžnou češtinou „/“ odděluje alternativy
$\models$	vyplývání, tj. formule napravo od „$\models$“ je (tauto)logický důsledek množiny formulí nalevo od „$\models$“
$\vdash$	dokazatelnost formule napravo od „$\vdash$“ z množiny formulí nalevo od „$\vdash$“
$\mathfrak{I}$	interpretace, tj. (binární) funkce sémanticky ohodnocující formule
v	valuace, tj. funkce sémanticky ohodnocující atomické formule (tj. výrokové proměnné)
l	literál, tj. atomická formule nebo její negace
$\{\ldots\}$	množina obsahující enumerované prvky
$\langle\ldots\rangle$	uspořádaná *n*-tice enumerovaných prvků
$\in$	vztah být prvkem nějaké množiny
$\cup$	vztah sjednocení dvou množin
$\subseteq$	vztah podmnožiny
$\Rightarrow$	odděluje množiny formulí a formule v sekventech gentzenovské dedukce
$\checkmark$	zatržítko indikující, že složená formule byla v sémantickém tablu dekomponována
$\times$	znak indikující uzavření větve sémantického tabla

Úvod do logiky:
klasická výroková logika

doc. PhDr. Jiří Raclavský, Ph.D.

Vydala Masarykova univerzita v roce 2015
1. vydání

Grafický navrh obálky a sazba: Metoda spol. s r.o., Hluboká 14, 639 00 Brno

Tisk: Tiskárna KNOPP, s. r. o., Kubelíkova 1224/42, 130 00 Praha 3

ISBN 978-80-210-7790-4

Kniha *Úvod do logiky: klasická výroková logika* je první částí vícedílného úvodu do logiky, jenž je zaměřen především na humanitní a společenskovědní publikum a další zájemce o logiku. Kromě důležitých poznatků o klasické výrokové logice jako takové je čtenář postupně seznamován jednak s metodami prošetřování sémantických vlastností formulí a metodami formálního dokazování, jednak s aplikacemi tohoto na oblast přirozeného jazyka. V knize najde čtenář rovněž řadu praktických cvičení, v nichž se kromě formálních postupů naučí zejména pohotově budovat ekvivalenty či negace vět a ověřovat platnost úsudků.

Doc. PhDr. Jiří Raclavský, Ph.D. (nar. 1974 v Brně) dlouhodobě působí na FF MU, kde na Katedře filozofie vyučuje především úvod do logiky, filosofickou logiku a témata, v nichž se logika uplatňuje. Publikoval knihy *Jména a deskripce: logicko-sémantická zkoumání* (2009, Nakladatelství Olomouc), *Individua a jejich vlastnosti: studie z intenzionální metafyziky* (2011, Nakladatelství Olomouc), *Pojmy a vědecké teorie* (2014, Masarykova univerzita; spoluautorem je Petr Kuchyňka).

muni PRESS

ISBN 978-80-210-7790-4

9 788021 077904

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
UNIVERSITAS MASARYKIANA BRUNENSIS
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ