

Fuzzy logika

Informační a znalostní systémy

Fuzzy logika a odvozování

- Lotfi A. Zadeh (*1921)



- „Lidé nepotřebují přesnou číslem vyjádřenou informaci a přesto jsou schopni rozhodovat na vysoké úrovni, odpovídající adaptivnímu řízení. Pokud by systémy řízení byly programovány tak, aby uměly pracovat s nepřesnými informacemi na vstupu, mohly by být mnohem účinnější a snad i jednodušeji programovatelné....“

Fuzzy logika

- Rozšíření Booleovy algebry na vícehodnotovou logiku.
- Teorie fuzzy množin spočívá v zavedení tzv. stupně příslušnosti prvku k množině, který může nabývat hodnot z intervalu 0-1, na rozdíl od klasické teorie množin, kdy každý prvek do množiny buď patří nebo nepatří.
- Fuzzy logika: jazyk s vlastní syntaxí a sémantikou, umožňuje použití kvalitativně formulovaných zkušeností a znalostí o řešeném problému.

Základní pojmy z teorie množin

- množina A
- Existuje množina $P(A)$... všechny podmnožiny A
- Neexistuje množina všech množin
 - > Studium podmnožin jedné pevné množiny: *univerza* X
- Kardinalita (mohutnost) ... počet prvků (u konečných)
- Kartézský součin $A \times B$... usp. dvojice
- Průnik $A \cap B = \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$
- Sjednocení $A \cup B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}$
- Doplněk $\overline{A} = \{x : x \in X, x \notin A\}.$
- Inkluze (býti podmnožinou) – více možností, např.:

$$\forall x \in A: x \in B$$

Teorie množin

Množinové operace vyjádřené pomocí inkluze:

$$A \cap B = \max\{C \subseteq X : C \subseteq A, C \subseteq B\},$$

$$A \cup B = \min\{C \subseteq X : A \subseteq C, B \subseteq C\},$$

$$\overline{A} = \max\{C \subseteq X : C \cap A = \emptyset\} = \min\{C \subseteq X : C \cup A = X\}.$$

Charakteristiky doplňku:

$$A \cap \overline{A} = \emptyset, \quad A \cup \overline{A} = X.$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}.$$

Popis charakteristickou funkcí

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in A, \\ 0 & \text{pro } x \notin A. \end{cases}$$

$$A = \{x \in X : \mu_A(x) = 1\} = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\}.$$

Množina obrazů:

$$M \subseteq \{0, 1\}$$

Char. funkce nebývá prostá, přesto inverzní zobrazení:

$$\mu_A^{-1}(M) = \{x \in X : \mu_A(x) \in M\}.$$

$$A = \mu_A^{-1}(\{1\}) = \mu_A^{-1}((0, 1)).$$

Inkluze a množinové operace

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \mu_A \leq \mu_B,$$

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)),$$

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)),$$

$$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) = \neg \mu_A(x),$$

\neg ... logická negace

Fuzzy množiny

- Zobecnění charakteristické funkce nabývající více (pravdivostních) hodnot
- Množinou pravdivostních hodnot interval reálných čísel $\langle 0, 1 \rangle$ nebo jeho podmnožina
- *Fuzzy množina* popsaná char. funkcí: $\mu_A : X \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$
= *funkce příslušnosti*
- Zápis $x \in A$ má význam jen pro „ostré“ (crisp) množiny

Další vlastnosti fuzzy množin

- Obor hodnot

$$\text{Range}(A) = \{\alpha \in \langle 0, 1 \rangle : (\exists x \in X : \mu_A(x) = \alpha)\}$$

- Výška $h(A) = \sup \text{Range}(A)$

– 1 ... f.m. normální, <1 ... f.m. subnormální

- Nosič (support)

$$\text{Supp}(A) = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\}, \quad \text{Supp}(A) = \mu_A^{-1}((0, 1)).$$

- Jádro (core)

$$\text{core}(A) = \{x \in X : \mu_A(x) = 1\}, \quad \text{core}(A) = \mu_A^{-1}(1).$$

- *Konečná f.m.* má konečný nosič,

pak *kardinalita*

$$\text{card}(A) = \sum_{x \in X} \mu_A(x).$$

Příklady

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0, \\ x & \text{pro } x \in \langle 0, 1 \rangle, \\ 2 - x & \text{pro } x \in (1, 2), \\ 0 & \text{pro } x > 2, \end{cases}$$

$$\mu_B(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{pro } x = 3, \\ 1 & \text{pro } x = 4, \\ \frac{1}{4} & \text{pro } x = 5, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Konečná fuzzy množina:

$$\mu_B = \{(3, \frac{1}{2}), (4, 1), (5, \frac{1}{4})\}.$$

Fuzzy inkluze (podmnožina)

$A \subseteq B$, jestliže $\forall x \in X : \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$.

Množinové a výrokové operace (Bool. algebra)

množinové operace	výrokové operace	vztah
doplňěk $\overline{} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$	negace $\neg : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$	$\overline{A} = \{x \in X : \neg(x \in A)\}$
průnik $\cap : \mathcal{P}(X)^2 \rightarrow \mathcal{P}(X)$	konjunkce $\wedge : \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}$	$A \cap B = \{x \in X : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$
sjednocení $\cup : \mathcal{P}(X)^2 \rightarrow \mathcal{P}(X)$	disjunkce $\vee : \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}$	$A \cup B = \{x \in X : (x \in A) \vee (x \in B)\}$

dále platí:

involuce:	$\neg\neg\alpha = \alpha,$	
komutativita:	$\alpha \vee \beta = \beta \vee \alpha,$	$\alpha \wedge \beta = \beta \wedge \alpha,$
asociativita:	$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma = \alpha \vee (\beta \vee \gamma),$	$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma),$
distributivita:	$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma),$	$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma),$
idempotence:	$\alpha \vee \alpha = \alpha,$	$\alpha \wedge \alpha = \alpha,$
absorpce:	$\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) = \alpha,$	$\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) = \alpha,$
absorpce s univerzem a 0:	$\alpha \vee 1 = 1,$	$\alpha \wedge 0 = 0,$
neutrální prvky:	$\alpha \vee 0 = \alpha,$	$\alpha \wedge 1 = \alpha,$
zákon kontradikce:		$\alpha \wedge \neg\alpha = 0,$
zákon vyloučeného třetího:	$\alpha \vee \neg\alpha = 1,$	
de Morganovy zákony:	$\neg(\alpha \vee \beta) = \neg\alpha \wedge \neg\beta,$	$\neg(\alpha \wedge \beta) = \neg\alpha \vee \neg\beta.$

Fuzzy logika

- Pravdivostní hodnoty z intervalu $<0;1>$
- Předpoklad: stupeň příslušnosti bodu x k výsledku operace závisí jen na jeho stupních příslušnosti k operandům a je jimi jednoznačně určen (fuzzy logika je **funkcionální**).
 1. Výsledek je nezávislý na hodnotách příslušnosti v ostatních bodech.
 2. Stupně příslušnosti bodu k operandům poskytují dostatečnou informaci pro určení stupně příslušnosti k výsledku.

Např. stupeň pravdivosti fuzzy konjunkce *je chladno a prší* je plně určen tím, nakolik *je chladno* a nakolik *prší*.
- Rozdíl: u **pravděpodobnostní neurčitosti** záleží navíc na **závislosti zkoumaných jevů!**
- Např. pravděpodobnost *zítra bude chladno a bude pršet* **není** jednoznačně určena pravděpodobností výroků *zítra bude chladno* a *zítra bude pršet*.

Operace s fuzzy množinami

- Standardní fuzzy negace $\neg_S \alpha = 1 - \alpha.$
- Obecné podmínky $\alpha \leq \beta \Rightarrow \neg \beta \leq \neg \alpha,$
 $\neg \neg \alpha = \alpha.$ $\neg 1 = 0, \quad \neg 0 = 1.$
- Jiné možnosti
 - např. Gödelova **zobecněná (*)** fuzzy negace

$$\neg_G \alpha = \begin{cases} 1 & \text{pro } \alpha = 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

- Fuzzy doplněk $\mu_{\neg A}(x) = \neg \mu_A(x).$

– využívá zvolenou fuzzy negaci

(*) zobecněné fuzzy negace: není zde kladen požadavek involutivnosti
(dvojitá negace vrací původní hodnotu)

Fuzzy konjunkce a průnik

$$\dot{\wedge} : \langle 0, 1 \rangle^2 \rightarrow \langle 0, 1 \rangle,$$

Axiomy:

$$\begin{array}{ll} \alpha \dot{\wedge} \beta = \beta \dot{\wedge} \alpha & (\text{komutativita}) \\ \alpha \dot{\wedge} (\beta \dot{\wedge} \gamma) = (\alpha \dot{\wedge} \beta) \dot{\wedge} \gamma & (\text{asociativita}) \\ \beta \leq \gamma \Rightarrow \alpha \dot{\wedge} \beta \leq \alpha \dot{\wedge} \gamma & (\text{monotonie}) \\ \alpha \dot{\wedge} 1 = \alpha & (\text{okrajová podmínka}) \end{array}$$

$$\alpha \dot{\wedge} 0 = 0.$$

Např.

– Standardní

$$\alpha \dot{\wedge}_S \beta = \min(\alpha, \beta).$$

... největší

– Lukasiewiczova

$$\alpha \dot{\wedge}_L \beta = \begin{cases} \alpha + \beta - 1 & \text{pro } \alpha + \beta - 1 > 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

– Součinnová

$$\alpha \dot{\wedge}_P \beta = \alpha \cdot \beta.$$

– Drastická

$$\alpha \dot{\wedge}_D \beta = \begin{cases} \alpha & \text{pro } \beta = 1, \\ \beta & \text{pro } \alpha = 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

... nejmenší

Fuzzy průnik

$$\mu_{A \dot{\cap} B}(x) = \mu_A(x) \dot{\wedge} \mu_B(x).$$

Fuzzy disjunkce a sjednocení

$$\dot{\vee} : \langle 0, 1 \rangle^2 \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$$

Axiomy:

$$\begin{array}{ll} \alpha \dot{\vee} \beta = \beta \dot{\vee} \alpha & \text{(komutativita)} \\ \alpha \dot{\vee} (\beta \dot{\vee} \gamma) = (\alpha \dot{\vee} \beta) \dot{\vee} \gamma & \text{(asociativita)} \\ \beta \leq \gamma \Rightarrow \alpha \dot{\vee} \beta \leq \alpha \dot{\vee} \gamma & \text{(monotonie)} \\ \alpha \dot{\vee} 0 = \alpha & \text{(okrajová podmínka)} \end{array}$$

$$\alpha \dot{\vee} 1 = 1.$$

Např.

– Standardní $\alpha \overset{S}{\vee} \beta = \max(\alpha, \beta).$... nejmenší

– Lukasiewiczova $\alpha \overset{L}{\vee} \beta = \begin{cases} \alpha + \beta & \text{pro } \alpha + \beta < 1, \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$

– Součinnová $\alpha \overset{P}{\vee} \beta = \alpha + \beta - \alpha \cdot \beta.$

– Drastická $\alpha \overset{D}{\vee} \beta = \begin{cases} \alpha & \text{pro } \beta = 0, \\ \beta & \text{pro } \alpha = 0, \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$... největší

Fuzzy sjednocení $\mu_{A \dot{\cup} B}(x) = \mu_A(x) \dot{\vee} \mu_B(x).$

Fuzzy logické (výrokové) operace

involuce:	$\neg(\neg \alpha) = \alpha,$	
komutativita:	$\alpha \dot{\vee} \beta = \beta \dot{\vee} \alpha,$	$\alpha \dot{\wedge} \beta = \beta \dot{\wedge} \alpha,$
asociativita:	$(\alpha \dot{\vee} \beta) \dot{\vee} \gamma = \alpha \dot{\vee} (\beta \dot{\vee} \gamma),$	$(\alpha \dot{\wedge} \beta) \dot{\wedge} \gamma = \alpha \dot{\wedge} (\beta \dot{\wedge} \gamma),$
distributivita:	$\alpha \dot{\wedge} (\beta \dot{\vee} \gamma) = (\alpha \dot{\wedge} \beta) \dot{\vee} (\alpha \dot{\wedge} \gamma),$	$\alpha \dot{\vee} (\beta \dot{\wedge} \gamma) = (\alpha \dot{\vee} \beta) \dot{\wedge} (\alpha \dot{\vee} \gamma),$
idempotence:	$\alpha \dot{\vee} \alpha = \alpha,$	$\alpha \dot{\wedge} \alpha = \alpha,$
absorpce:	$\alpha \dot{\vee} (\alpha \dot{\wedge} \beta) = \alpha,$	$\alpha \dot{\wedge} (\alpha \dot{\vee} \beta) = \alpha,$
absorpce s jedničkou a nulou:	$\alpha \dot{\vee} 1 = 1,$	$\alpha \dot{\wedge} 0 = 0,$
neutrální prvky:	$\alpha \dot{\vee} 0 = \alpha,$	$\alpha \dot{\wedge} 1 = \alpha,$
zákon kontradikce:		$\alpha \dot{\wedge} \neg \alpha = 0,$
zákon vyloučeného třetího:	$\alpha \dot{\vee} \neg \alpha = 1,$	
de Morganovy zákony:	$\neg(\alpha \dot{\vee} \beta) = \neg \alpha \dot{\wedge} \neg \beta,$	$\neg(\alpha \dot{\wedge} \beta) = \neg \alpha \dot{\vee} \neg \beta.$

Fuzzy implikace a ekvivalence

$$\dot{\rightarrow} : \langle 0, 1 \rangle^2 \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$$

Nejčastěji 3 třídy:

$$\alpha \xrightarrow[S]{S} \beta = \neg_S \alpha \dot{\vee} \beta$$

S-implikace

$$\alpha \xrightarrow[S]{Q} \beta = \neg_S \alpha \dot{\vee} (\alpha \wedge \beta)$$

Q-implikace (kvantová)

$$\alpha \xrightarrow[S]{R} \beta = \sup \{ \gamma : \alpha \wedge \gamma \leq \beta \}$$

reziduovaná implikace

Např.

- Gödelova
- Reichenbachova
- Původní Zadehova

$$\alpha \xrightarrow[S]{R} \beta = \begin{cases} 1 & \text{pro } \alpha \leq \beta, \\ \beta & \text{jinak.} \end{cases}$$

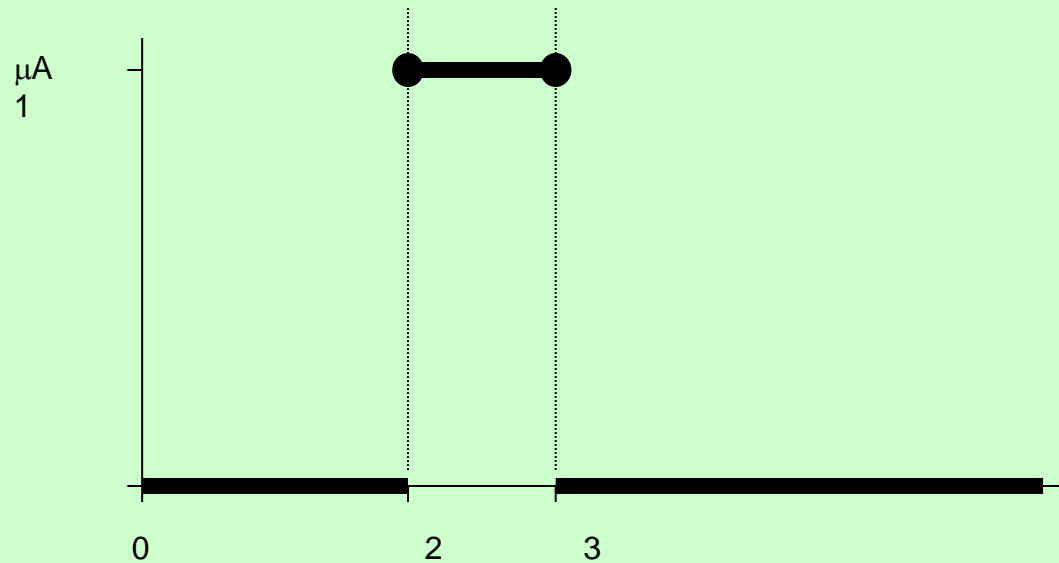
$$\alpha \xrightarrow[P]{S} \beta = 1 - \alpha + \alpha\beta.$$

$$\alpha \xrightarrow[S]{Q} \beta = \neg_S \alpha \dot{\vee}_S (\alpha \wedge_S \beta).$$

$$\alpha \dot{\leftrightarrow} \beta = (\alpha \dot{\rightarrow} \beta) \wedge (\beta \dot{\rightarrow} \alpha).$$

Ostrá fuzzy množina

- Necht' je dána ostrá množina A všech reálných čísel z uzavřeného intervalu $[2,3]$



Míra příslušnosti k fuzzy množině

- Funkce příslušnosti hodnot k prvku množiny: $\mu_A(x) \rightarrow [0,1]$, kde A je prvek fuzzy množiny a x je spojitá hodnota.

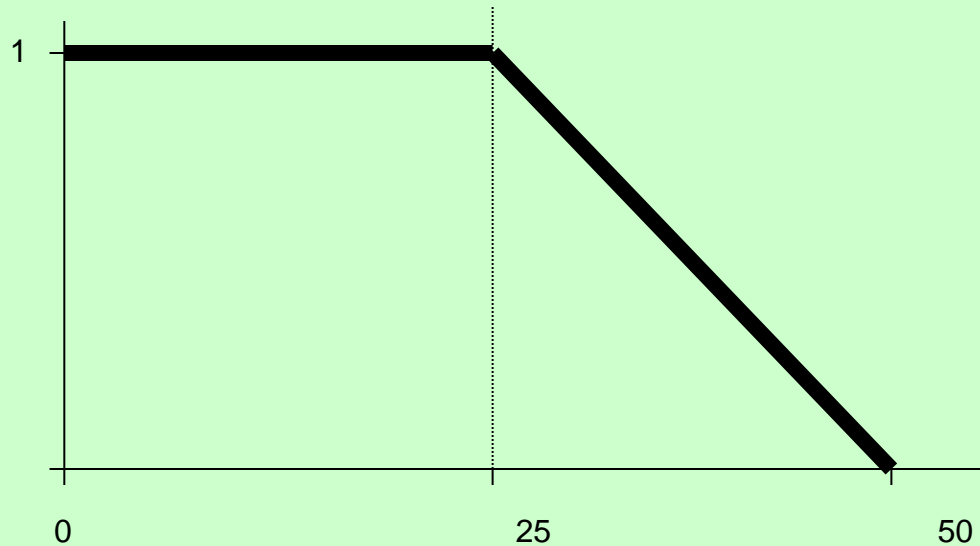
Příklad:

fuzzy množina nechť je **STÁŘÍ** s prvky **mladý, stř. věku ...**
příslušnost k fuzzy množině může být pro prvek **mladý** tato:

věk	stupeň příslušnosti k mladosti
25	1,0
30	0,8
35	0,6
40	0,4
45	0,2
50	0,0

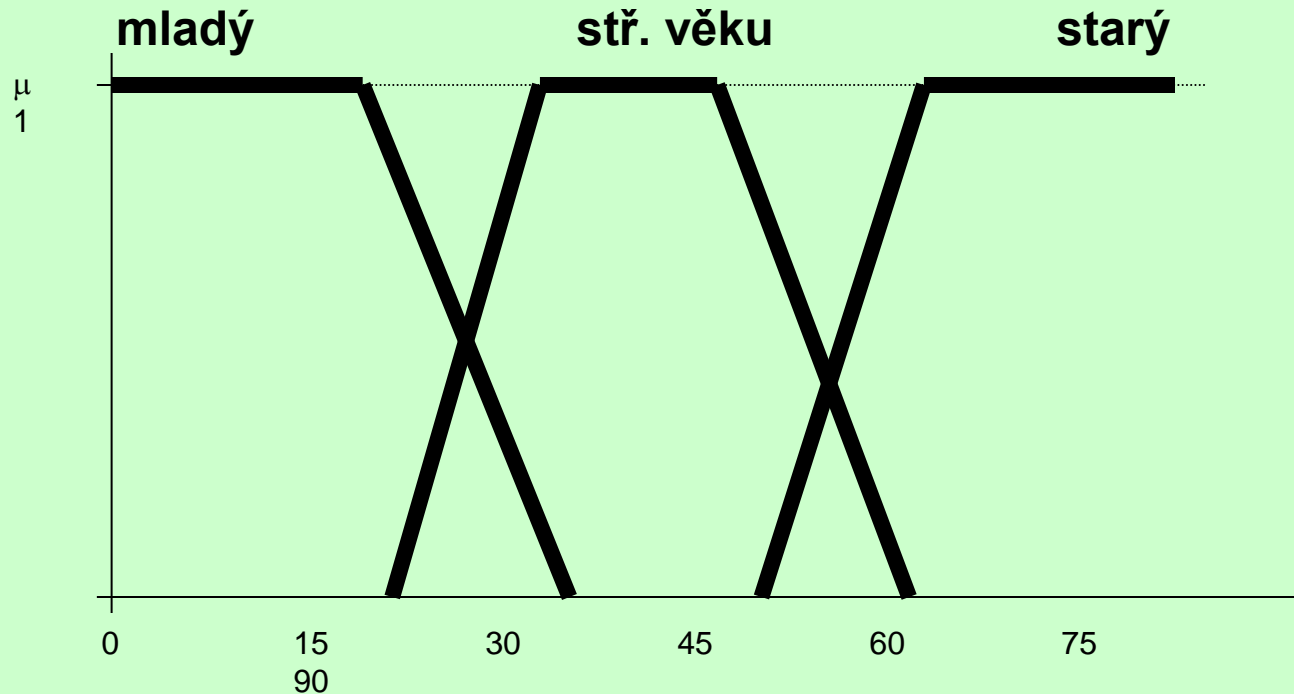
Míra příslušnosti k fuzzy množině

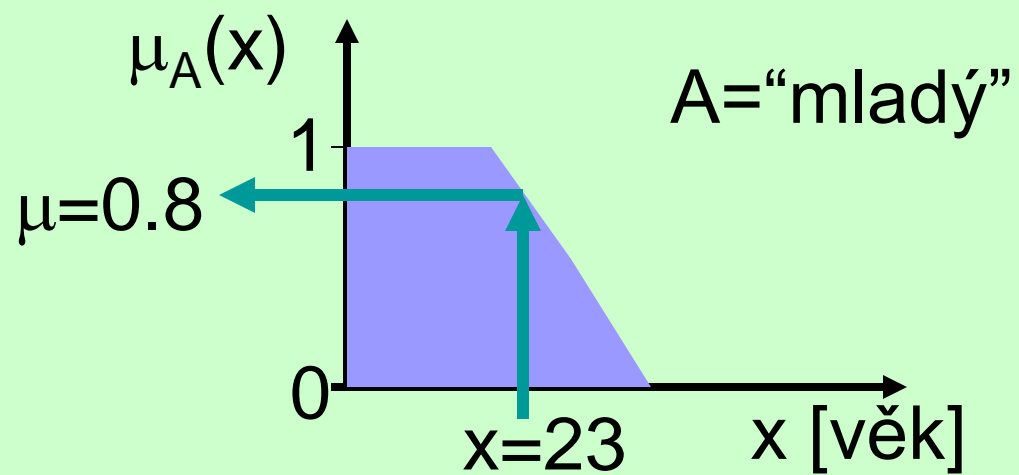
- Můžeme psát $\mu_{\text{mladý}}(25)=1.0$, $\mu_{\text{mladý}}(30)=0.8$,... $\mu_{\text{mladý}}(50)=0.0$.
- Stupeň příslušnosti hodnot: „možnostní“ rozdělení pojmu **mladý**



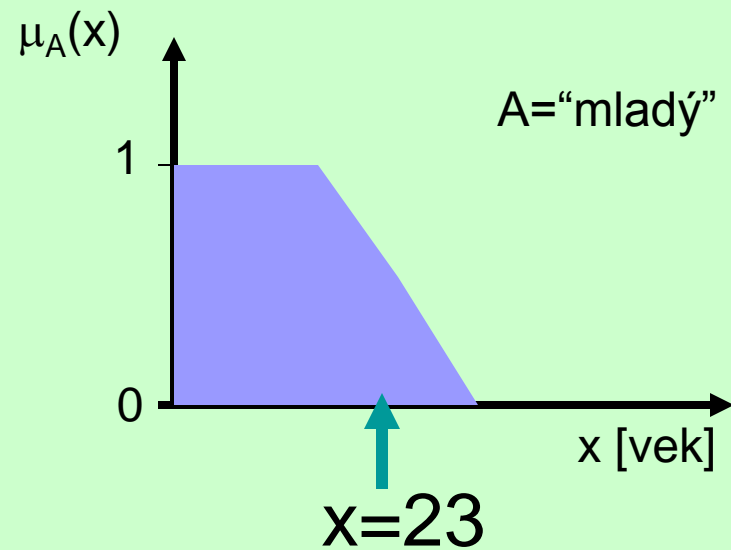
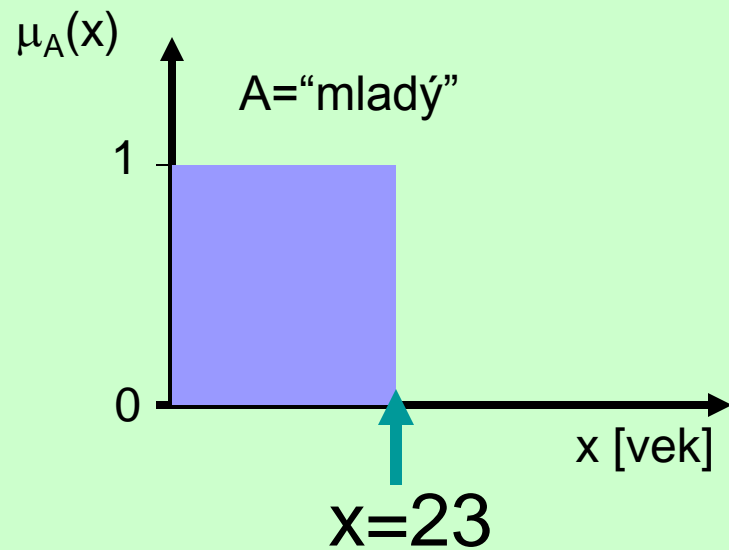
Příklad prvků fuzzy množiny

- Necht' je dána fuzzy množina **STÁŘÍ** a její prvky **mladý**, **středního věku** a **starý**.

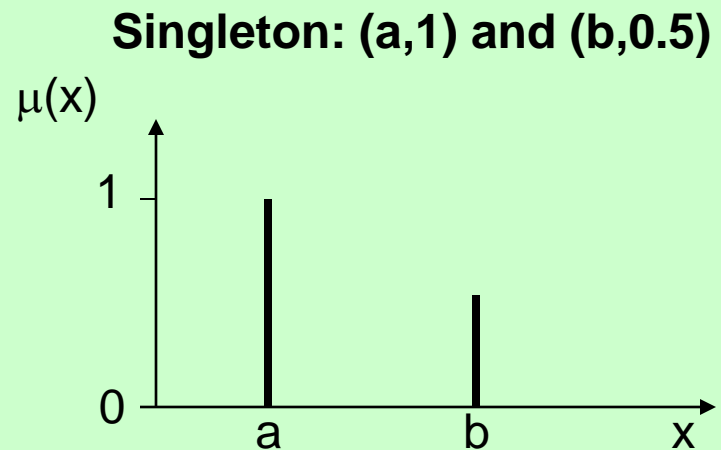
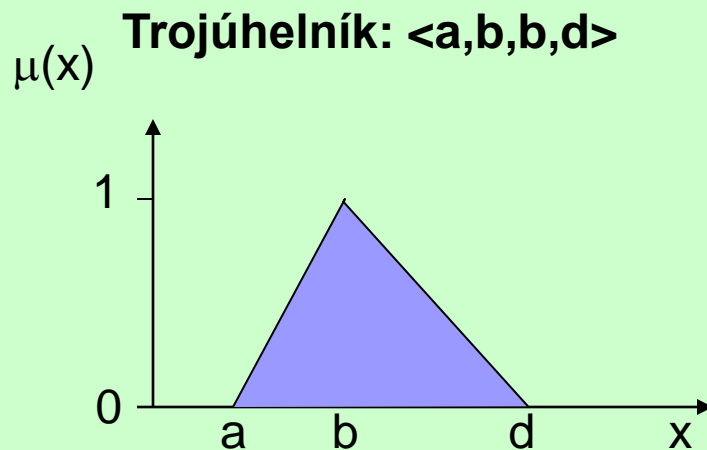
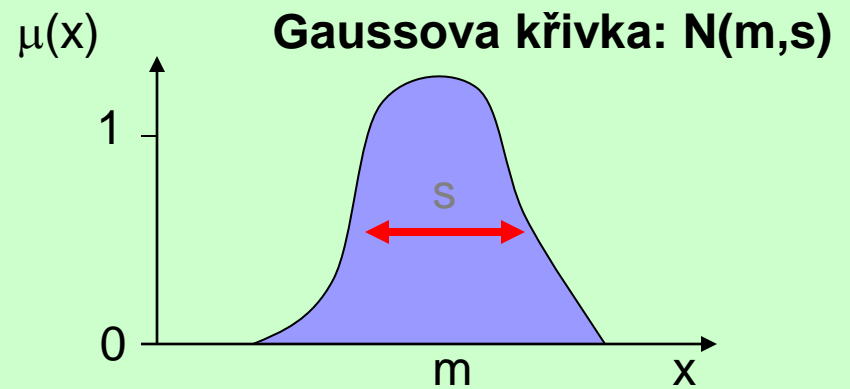
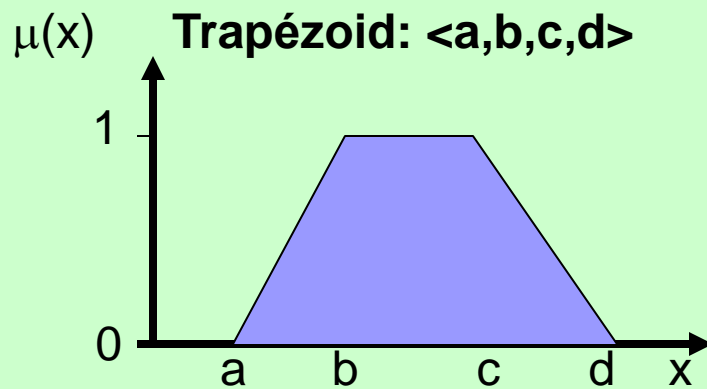




Porovnání

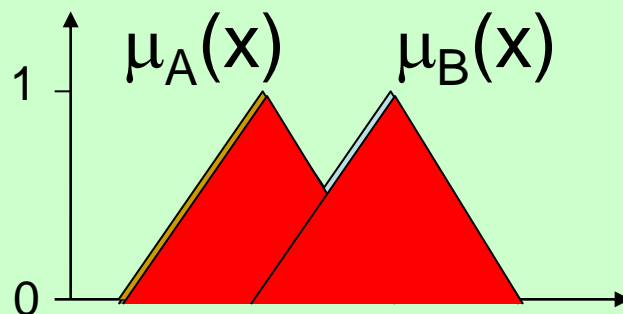


Různé funkce příslušnosti



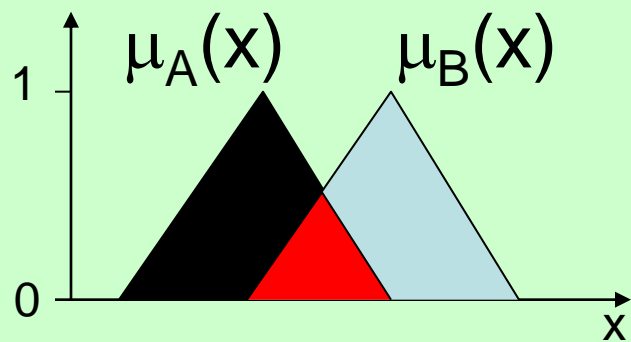
Operace sjednocení

$$\mu_{A \vee B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$



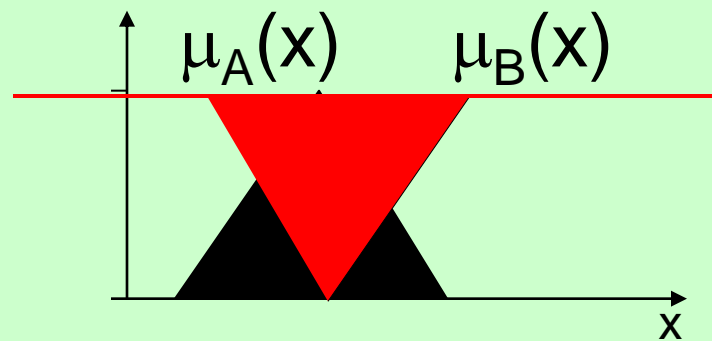
Průnik

$$\mu_{A \wedge B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$



Doplňěk

$$\mu_{A-}(x) = 1 - \mu_A(x)$$



Přibližné usuzování

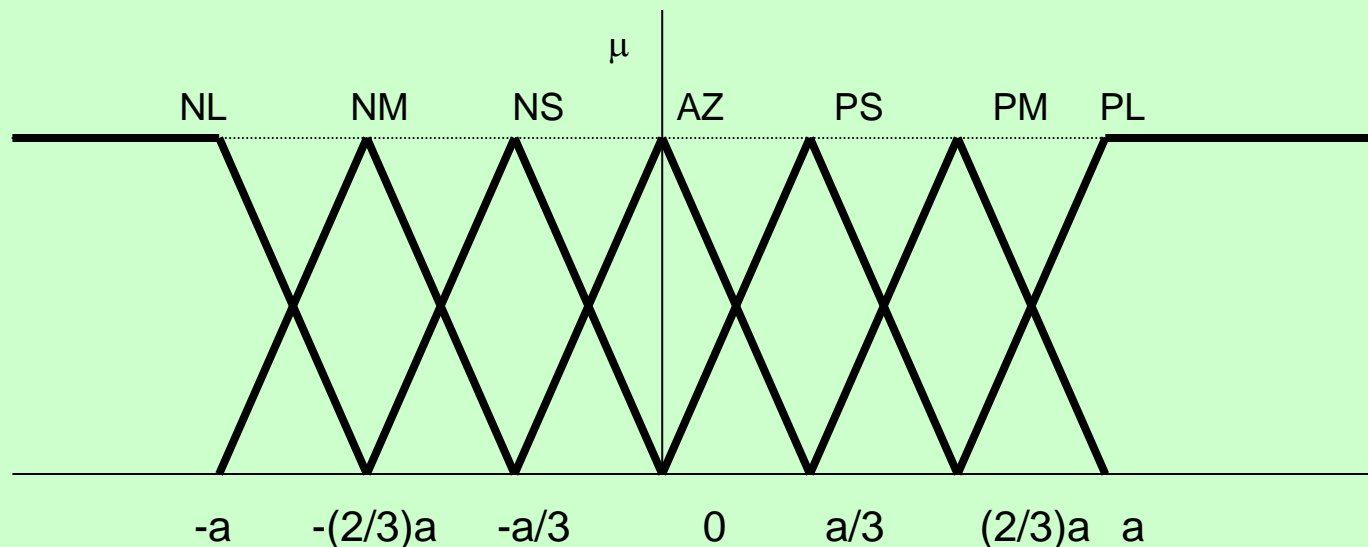
- Výroky respektující **fuzzy usuzování (inference)**. Místo booleovské logiky se využívá **fuzzy logika**
- **Fuzzy expertní systémy** využívají metody fuzzy usuzování podle **fuzzy pravidel**
- Získání výstupních hodnot ze vstupních pomocí:

Fuzzifikace → Inference → Agregace → Defuzzifikace

Fuzzifikace

- Převod vstupních (neurčitých) dat na fuzzy množiny
- Získáváme konkrétní funkce příslušnosti k dané fuzzy množině
- Musí být pokryto celé zvolené univerzum fuzzy množinami
- V prvním kroku provádíme normalizaci univerza např. na interval $\langle 0;1 \rangle$ nebo $\langle -1;1 \rangle$
- V druhém kroku se snažíme každé hodnotě univerza přiřadit stupně příslušnosti k daným fuzzy množinám
Beze zbytku pokryjeme normalizované univerzum nosiči jednotlivých množin
- Nakonec, zvolíme konkrétní tvary funkcí příslušnosti
- **Lingvistická veličina=proměnná**
- **Lingvistická hodnota= term**

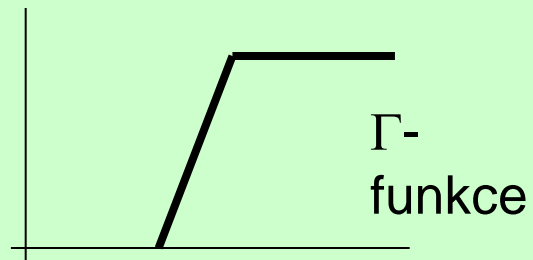
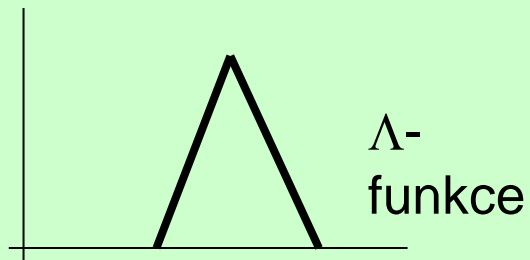
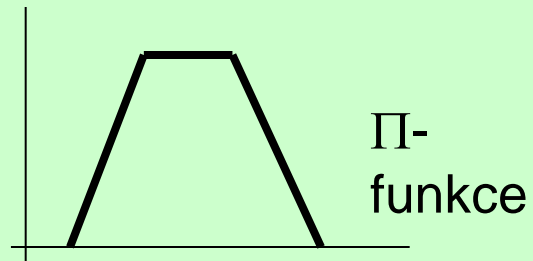
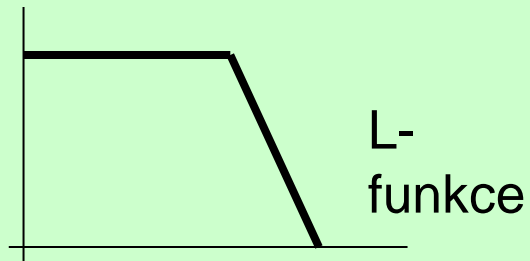
Fuzzifikace



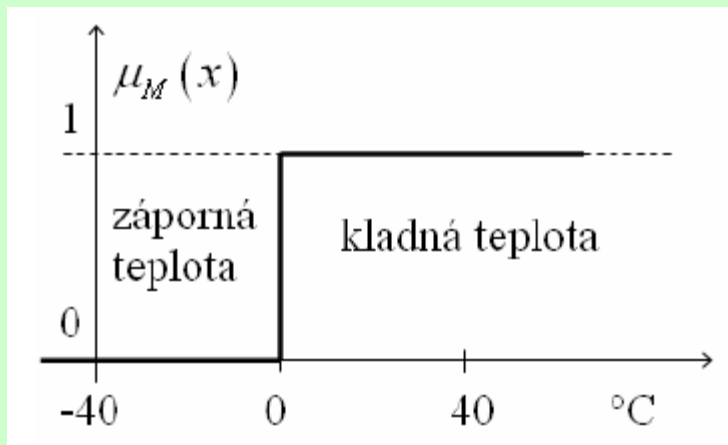
Zkratka	Význam v angličtině	Ekvivalent v češtině
NL	Large Negative	velká záporná hodnota
NM	Medium Negative	střední záporná hodnota
NS	Small Negative	malá záporná hodnota
AZ	Approximately Zero	přibližně nulová hodnota
PS	Small Positive	malá kladná hodnota
PM	Medium Positive	střední kladná hodnota
PL	Large Positive	velká kladná hodnota

Fuzzifikace

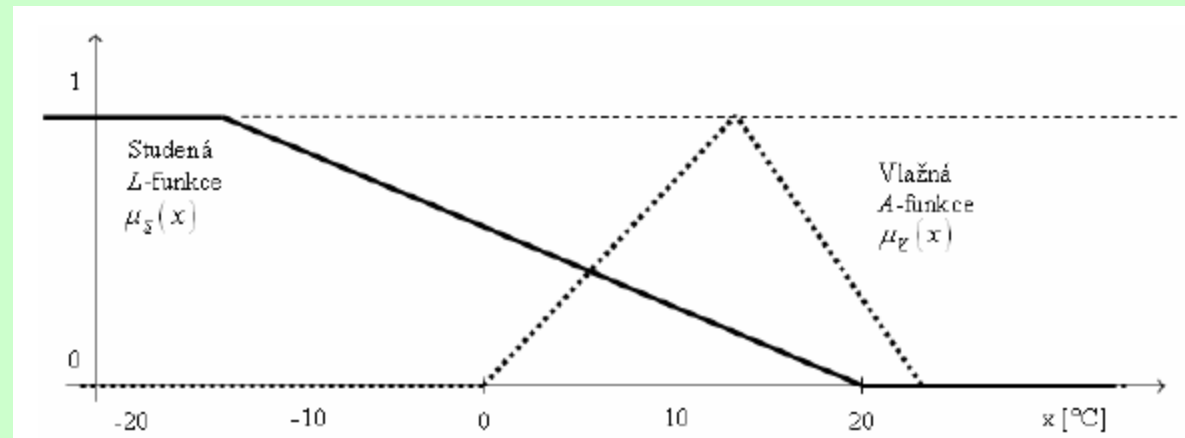
- V praxi lze používat různé tvary funkcí příslušnosti



- Ostré množiny



- Fuzzy množiny
- Univerzum 0-1
- Lingvistické hodnoty
 - Ledová
 - Studená
 - Vlažná



- Lingvistické termy

Význam	označení
Hodnota velká záporná	ZV
Hodnota střední záporná	ZS
Hodnota malá záporná	ZM
Hodnota záporná blízká nule	ZN
Hodnota nulová	NU
Hodnota kladná blízká nule	KN
Hodnota malá kladná	KM
Hodnota střední kladná	KS
Hodnota velká kladná	KV

- Příklad

Lingvistická proměnná

Úhel

Vzdálenost

Otevření ventilu

Tepelný výkon

Teplota

Regulační odchylka

Přírůstek regulační odchylky

Označení lingvistické hodnoty - termy

záporný, nulový, kladný

nulová, blízká, střední, velká, obrovská

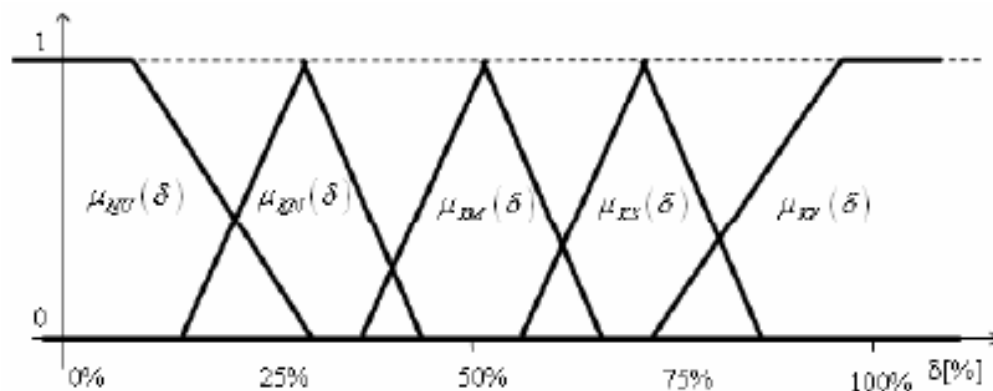
NU, KN, KM, KS, KV

ZV, ZS, NU, KS, KV

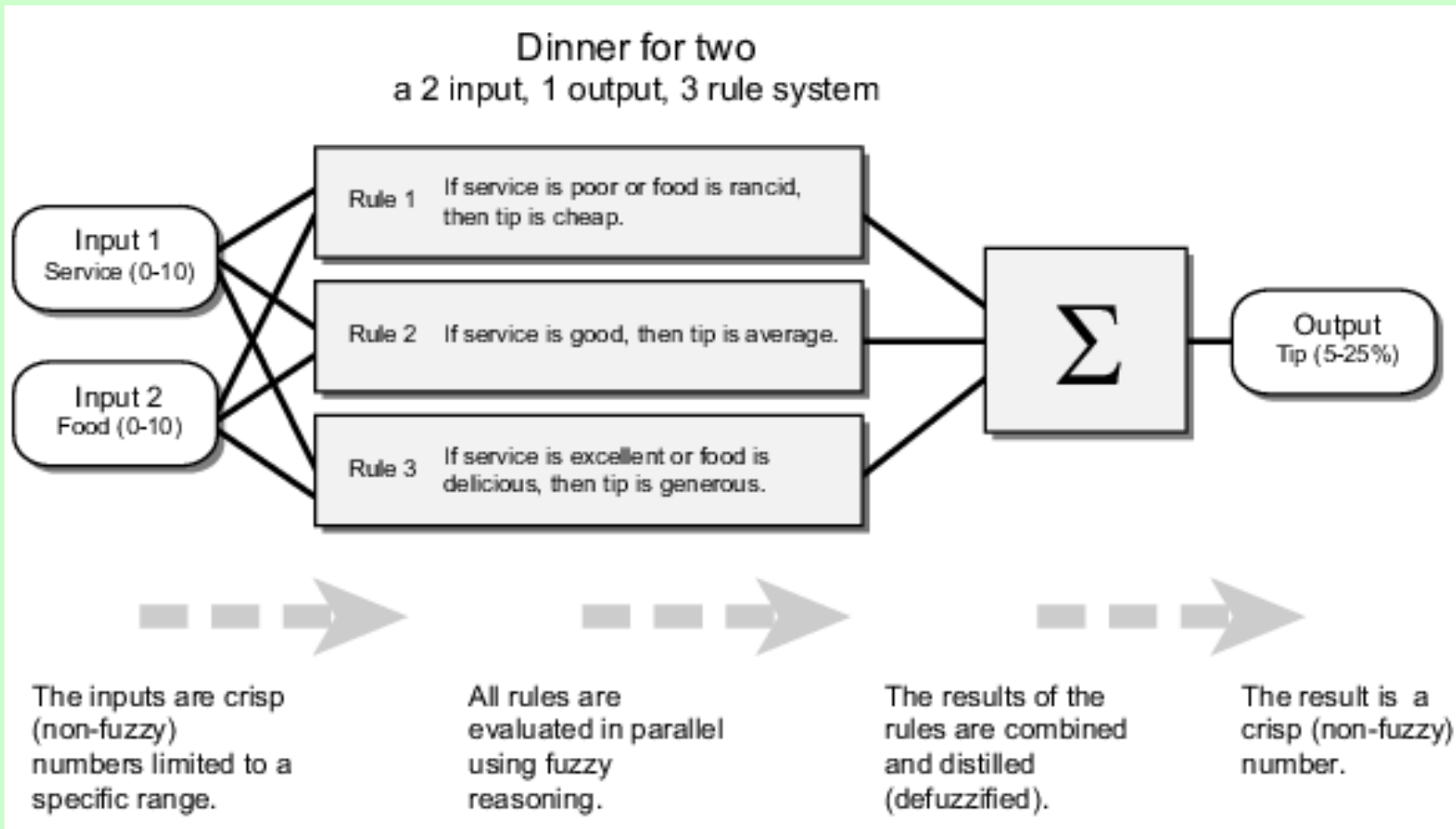
ZV, ZS, ZM, NU, KM, KS, KV

ZV, ZS, ZM, ZN, NU, KN, KM, KS, KV

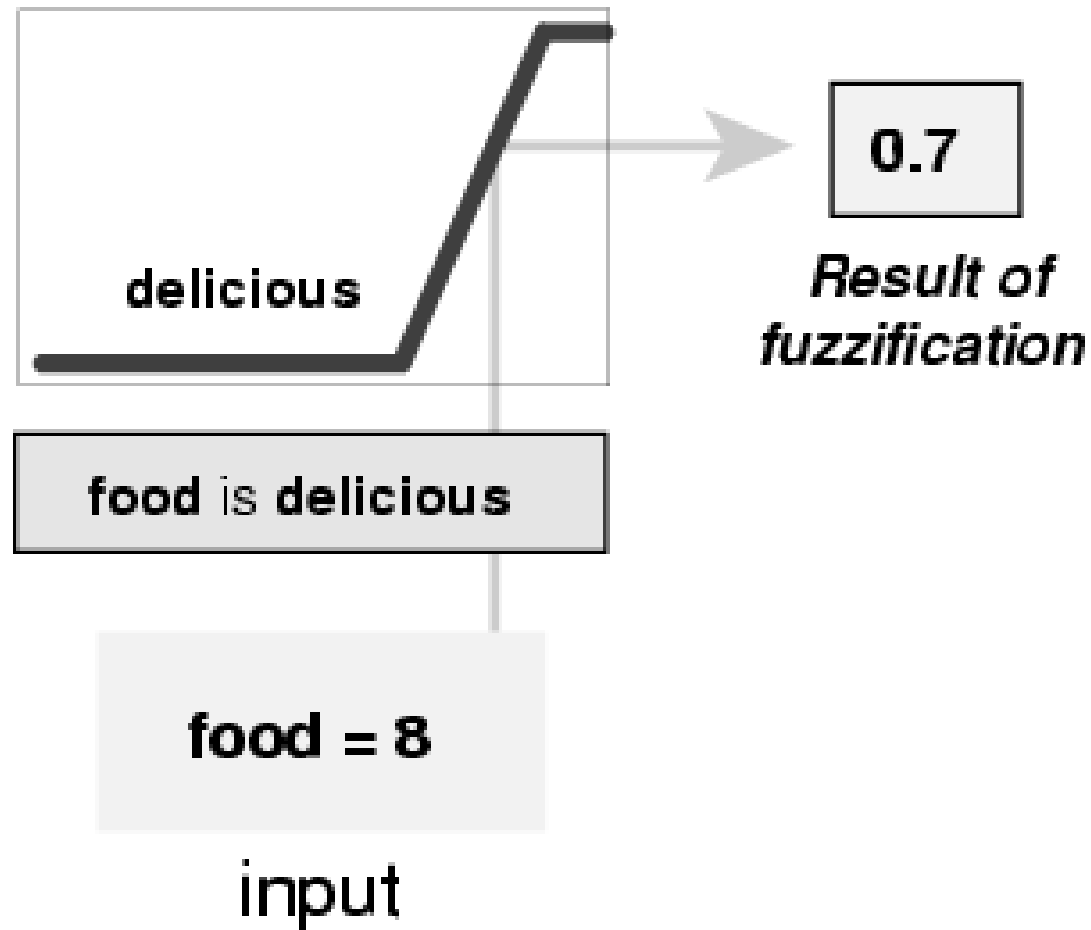
záporný (Z), kladný (K)



Pravidla IF-THEN, příklad výše spropitného

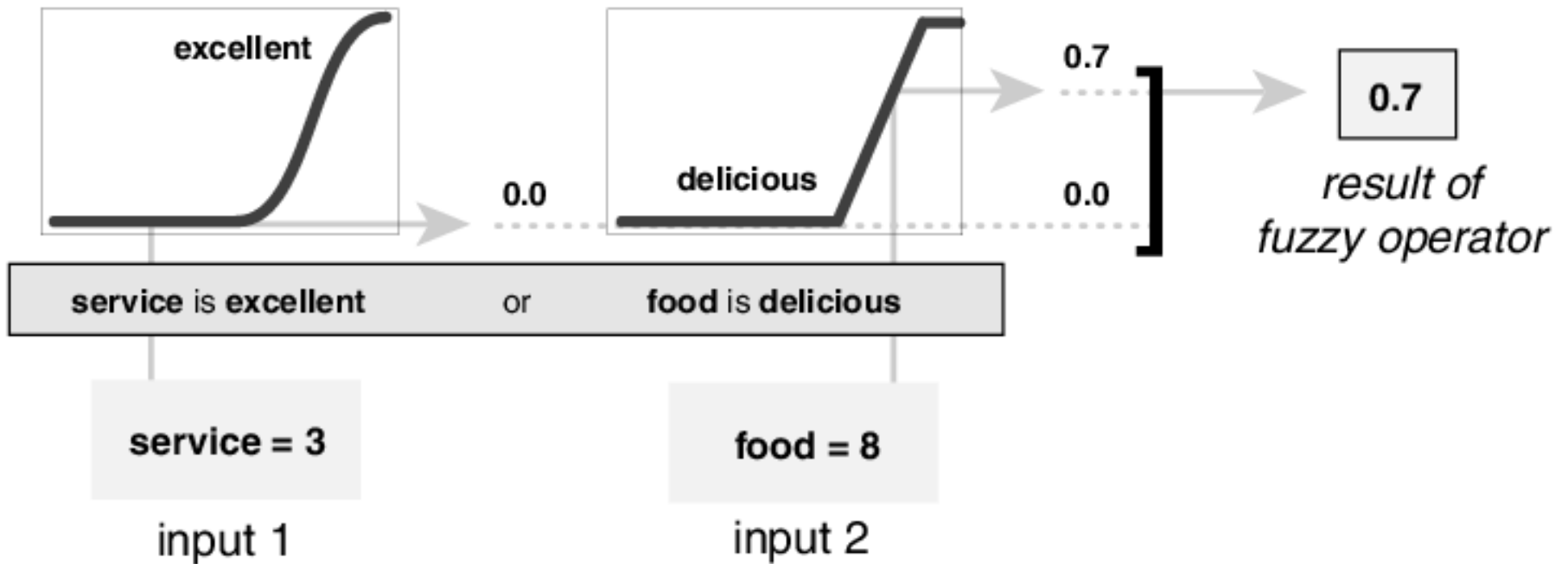


**1. Fuzzify
inputs.**



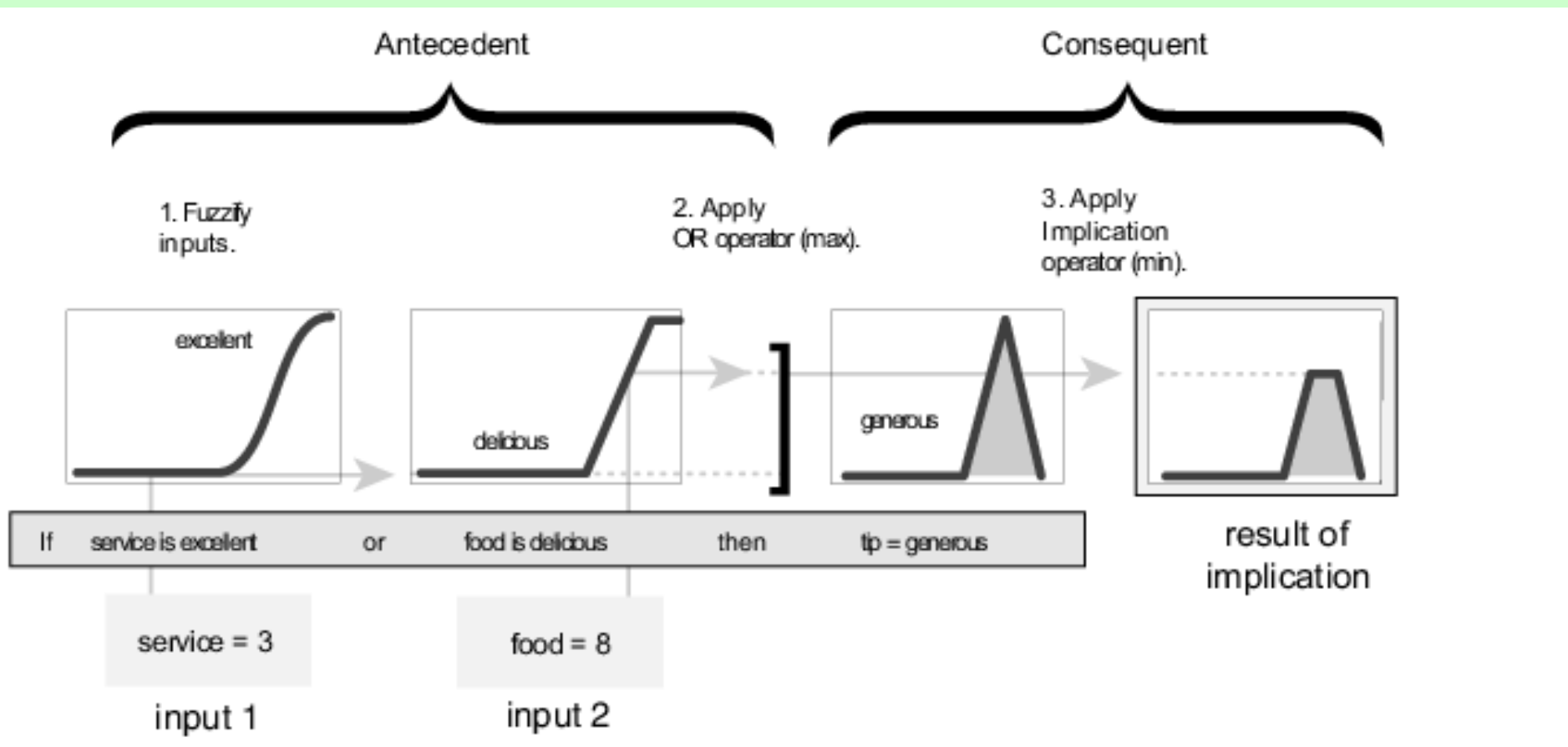
1. Fuzzify inputs.

2. Apply OR operator (max).



PŘEDPOKLAD, VSTUPNÍ
INFORMACE, PŘÍČINA

ZÁVĚR, DŮSLEDEK

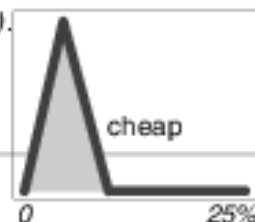


1. Fuzzify inputs.

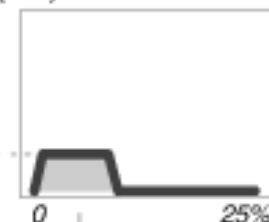
1.



2. Apply fuzzy operation (OR = max).

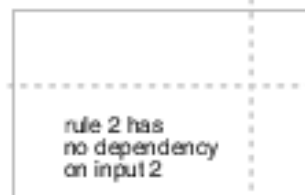


3. Apply implication method (min).



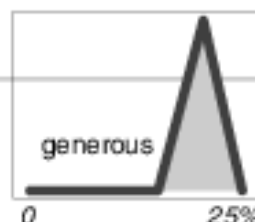
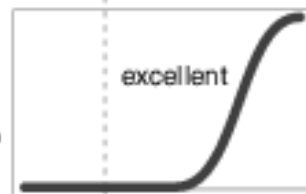
If service is poor or food is rancid then tip = cheap

2.



If service is good then tip = average

3.



If service is excellent or food is delicious then tip = generous

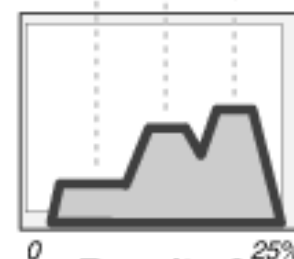
service = 3

input 1

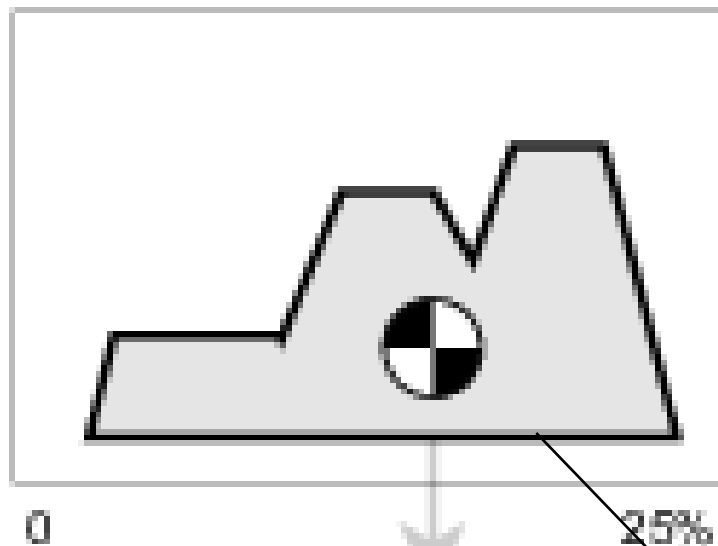
food = 8

input 2

4. Apply aggregation method (max).



Result of aggregation



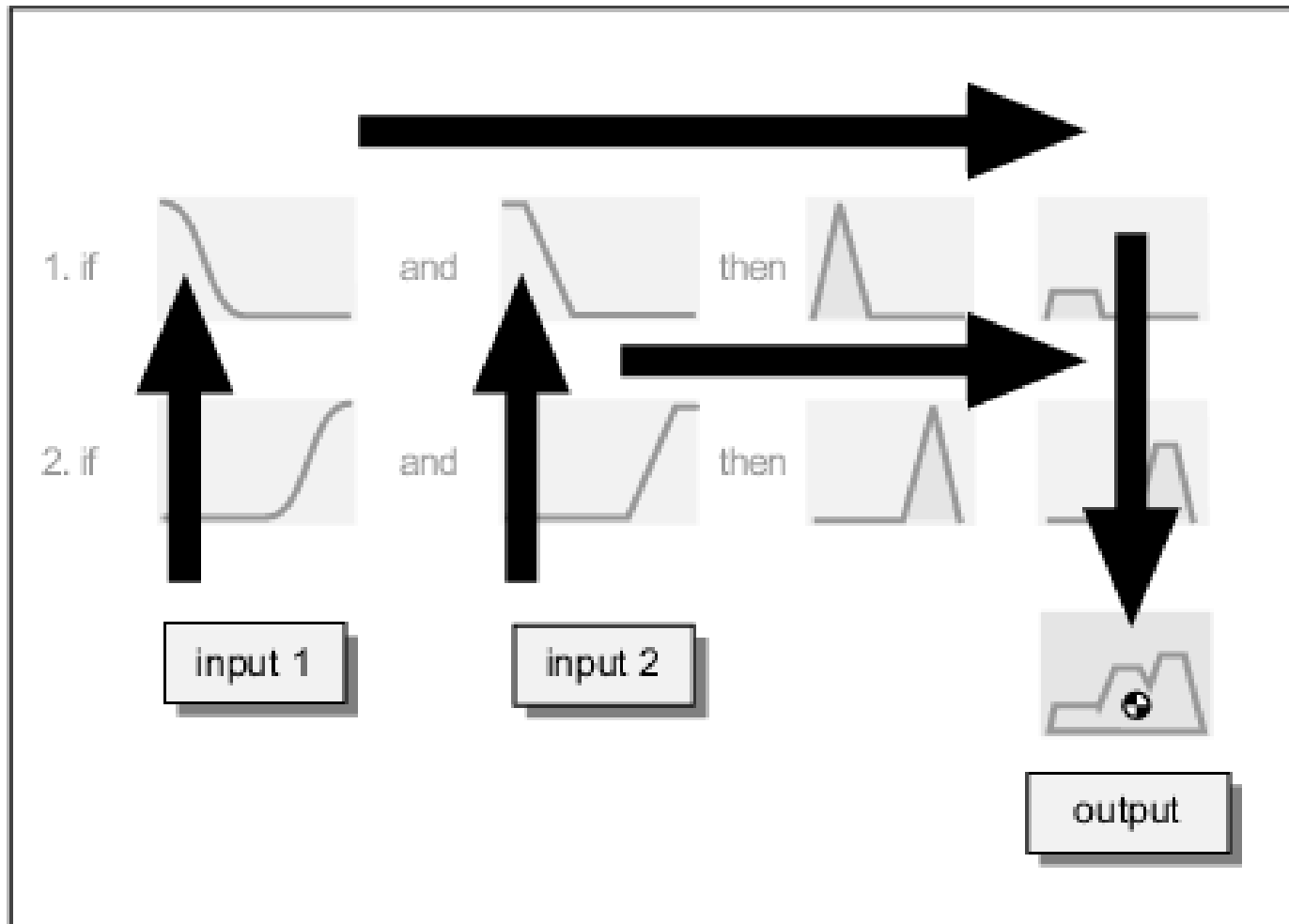
5. Defuzzify the aggregate output (centroid).

tip = 16.7%

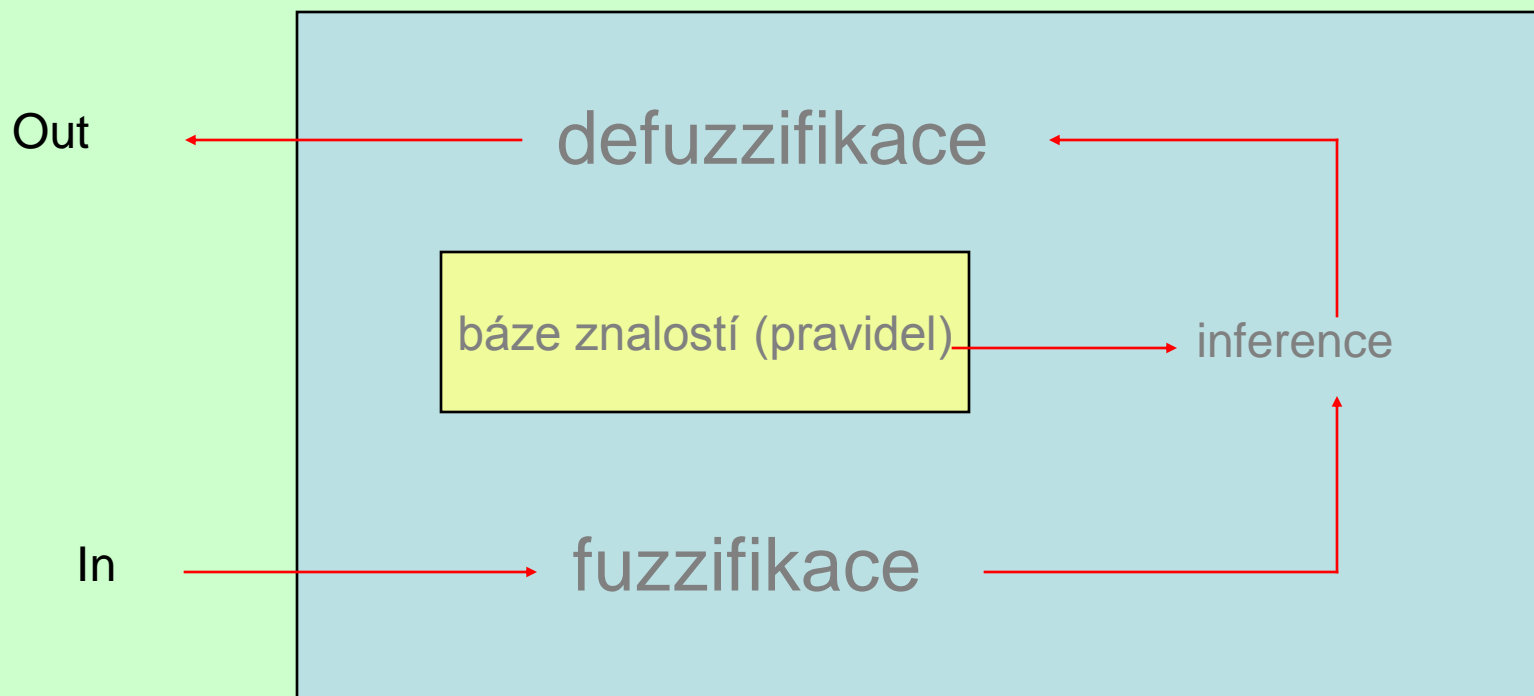
Result of
defuzzification

TĚŽIŠTĚ

interpreting the
fuzzy inference
diagram



Fuzzy systém



Odvozování - inference

- Inferenční pravidla
- **JESTLIŽE** *platí podmínka*, **PAK** *důsledek*
- Pravidla pro dvě fuzzy veličiny = dvourozměrná závislost:
 - regulační odchylka e
 - změna regulační odchylky delta e
- Cíl: změna akční veličiny delta u

Vstupní, výstupní veličiny

- Regulační odchylka e :
 - 5 lingvistických hodnot-termů
(ZV=velká záporná, ZS=střední záporná, NU=nulová, KS=střední kladná, KV=velká kladná)
- Změna regulační odchylky delta e
 - 3 lingvistické hodnoty-termíny
(Z=záporná, NU=nulová, K=kladná)
- Změna akční veličiny delta u
 - 5 lingvistických hodnot-termů (ZV, ZS, NU, KS, KV)

Báze pravidel

- Počet pravidel: platí, že $P=n \times m$, kde m a n je počet termů fuzzy množin vstupních veličin ($5 \times 3 = 15$)

$\begin{matrix} e \\ e \end{matrix}$	ZV	ZS	NU	KS	KV
Z	ZV	ZV	ZS	NU	KS
NU	ZV	ZS	NU	KS	KV
K	ZS	NU	KS	KV	KV

Fuzzy vs. klasický přístup k řízení

- Pravidlově definovaný přístup:
IF X AND Y THEN Z
- Fuzzy model - empirický vs. matematické modelování systému
 - spoléhá na zkušenost operátora, nikoli na technický popis systému
- Příklad: vstupy jako
"SP =500C", "T <1000C", "210C <TEMP <220C"
nahrazuje pravidlem:
"IF (process is too cool) AND (process is getting colder)
THEN (add heat to the process)"
nebo
"IF (process is too hot) AND (process is heating rapidly)
THEN (cool the process quickly)".
 - Tvrzení velmi nepřesná, popisují přesně, čeho se má dosáhnout
 - Jako sprcha: ...pokud je voda studená, člověk ví přesně co velmi rychle udělat...

Literatura

- Mirko Navara, Petr Olšák: Základy fuzzy množin
<ftp://math.feld.cvut.cz/pub/olsak/fuzzy>
- Mařík V. a kol.: Umělá inteligence I – III,
Academia Praha
- Zelinka I. : Umělá inteligence – hrozba nebo naděje?
- Šmejkal L. – PLC a automatizace 2 – sekvenční logické systémy a základy fuzzy logiky