

Klasická logika

Logika se zabývá pravdivostí výroků a jejím přenášením v úsudcích

Klasická („aristotelovská“) logika je *dvojhodnotová*:

- **ANO** či **NE**
- **1** nebo **0** (např. v počítačích)
- $x < 5$, nebo x není < 5 ... *ostré* vlastnosti a množiny
- výrok je buď **pravdivý**, nebo **nepravdivý**

Vhodná pro matematiku a počítače, ale méně už pro skutečný svět a přirozený jazyk. Proč? - Protože spousta běžných vlastností má *neostrou* hranici!

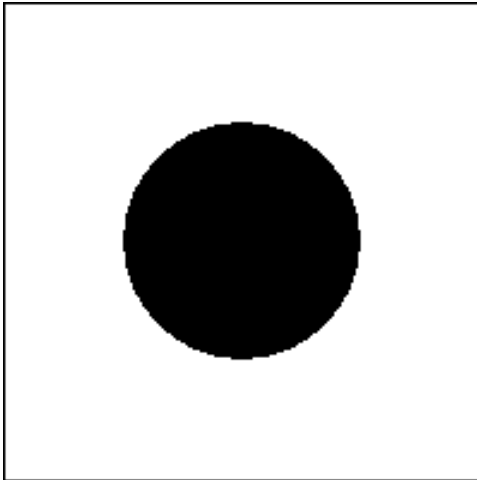
Vlastnosti s neostrou hranicí

- V kolika letech (a dnech) přestane člověk být *mladý*?
- Do kolika stupňů (a setin stupně) Celsia je voda *studená*?
- Kde přesně (na metr, milimetr...) končí *hory*?
- Kde přesně v duze začíná a končí *zelená*?

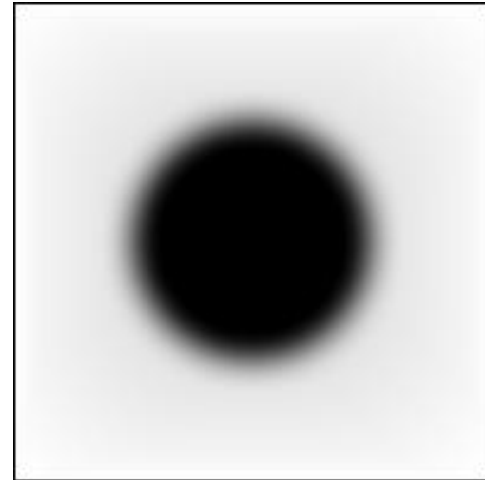
Tyto vlastnosti mají postupný, *neostrý* přechod - nikoli ostrou hranici

!!! Většina vlastností ve skutečném světě a přirozeném jazyce je neostrá; ostré vlastnosti se vyskytují především v matematice

Ostré vs. neostré vlastnosti



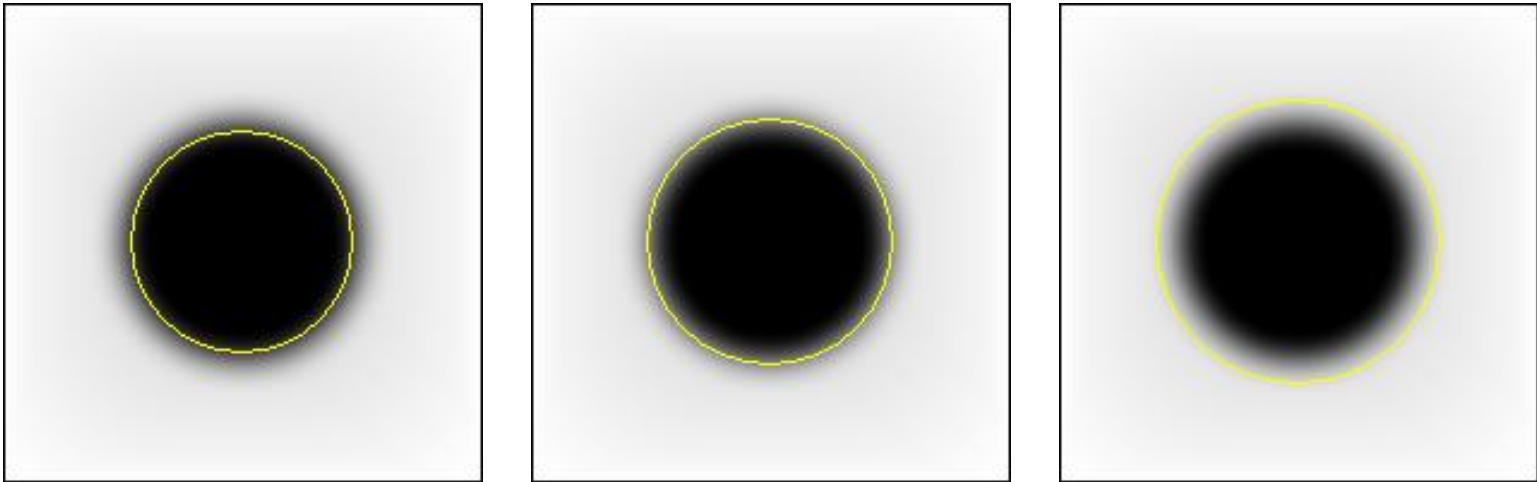
ostrá množina
ostré vydělení
klasická logika



neostrá množina
neostré vydělení
neklasická logika?

Aproximace ostrými vlastnostmi

Neostré vlastnosti lze často aproximovat ostrými množinami -
dodáním umělého prahu (ale kam?)



Tyto aproximace často fungují dobře (proto klasická logika lidem
tak dlouho stačila), někdy však vedou k problémům

Paradox hromady



1 000 000 zrněk písku tvoří
hromadu

Odebráním 1 zrnka písku
hromada nepřestane být
hromadou

Tedy 999 999 zrněk písku tvoří
hromadu

[opakujme 1 000 000 krát]

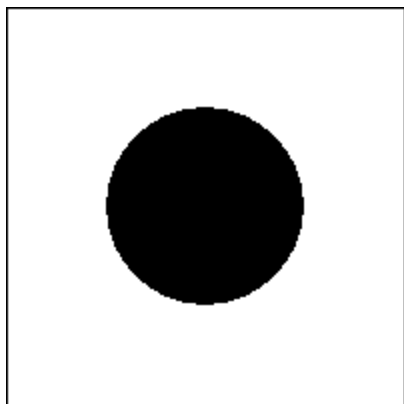
Tedy 0 zrněk písku tvoří hromadu

Paradox *sórités* (z řec. *sóros* = hromada), připisován Eubúlidovi z Mílétu
(megarská škola, současník Aristotelův, autor 7 logických paradoxů)

Varianty paradoxu hromady

- Paradox holohlavého (vypadnutím 1 vlasu se nestaneme holohlavými), atd.
 - Pro neostré vlastnosti lze zkonstruovat (alespoň myšlenou) *posloupnost typu sórités* a na ní provést úvahu vedoucí k paradoxu
 - V matematice: které je nejmenší *velké přirozené číslo*? (Každá neprázdná množina přirozených čísel má nejmenší prvek!)
- ⇒ Ostré množiny v některých případech nemodelují neostré vlastnosti dobře

Platí klasická logika pro neostré vlastnosti?

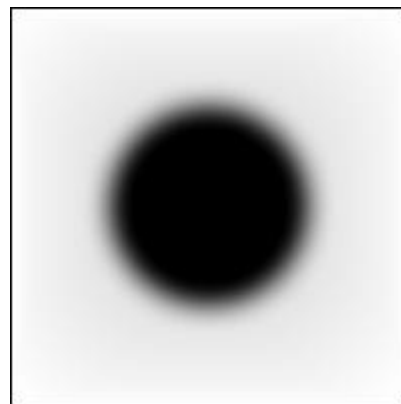


Ostrá vlastnost - klasická logika

Zákon vyloučení třetího:

bud' A , nebo $\neg A$

bod bud' je, nebo není černý



Neostrá vlastnost - neklasická logika!

Zákon vyloučení třetího zde neplatí:

bud' A nebo $\neg A$?

bod bud' je černý, nebo není černý?

- **nikoli**: může být šedý!

Neklasická logika neostrých vlastností

Neklasických logik bez zákona vyloučení třetího existuje více
(např. intuicionistická logika vhodná pro konstruovatelnost atp.)

Je třeba vybrat vhodnou. - Jak?

Vystihnout neostrý přechod \Rightarrow *stupně* pravdivosti:

nikoli jen 0 a 1, ale i čísla mezi (např. 0,5 či 0,792)

= *fuzzy logika*

angl. *fuzzy* znamená *neostrý, rozostřený, nepřesný, opilý, ...*

termín přispěl k popularitě fuzzy logiky, ale také k nedorozuměním

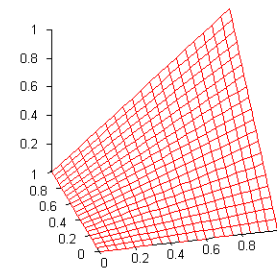
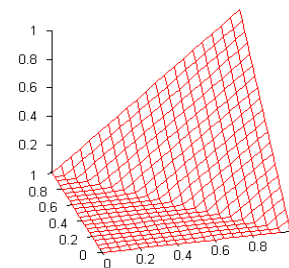
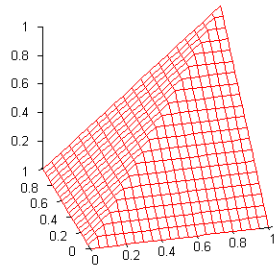
Fuzzy logika není nepřesná: je přesnou teorií neostrých vlastností

Výroková fuzzy logika

Místo dvou pravdivostních hodnot 0 a 1 máme nekonečně mnoho pravdivostních stupňů z intervalu $[0, 1]$

Výrokové spojky (*a, nebo, ne, když, právě když*) potom odpovídají *operacím* na intervalu $[0, 1]$, zobecňujícím pravdivostní tabulky klasické logiky – „pravdivostním funkcím“

&	0	1
0	0	0
1	0	1



klasická logika : fuzzy logika Gödelova Łukasiewiczova produktová

Různé pravdivostní funkce \Rightarrow různé fuzzy logiky
(Gödelova, Łukasiewiczova, produktová, Hájková BL, ...)

Rozdíly oproti klasické logice

Ve fuzzy logice:

- neplatí zákon vyloučení třetího
- je více možností pro výrokové spojky
- $A \wedge A$ není obecně ekvivalentní A (vícenásobné použití neúplně pravdivého předpokladu může snižovat pravdivost závěru)
- některé formy úsudků jsou platné jen pro ostré výroky, nikoli pro neostré

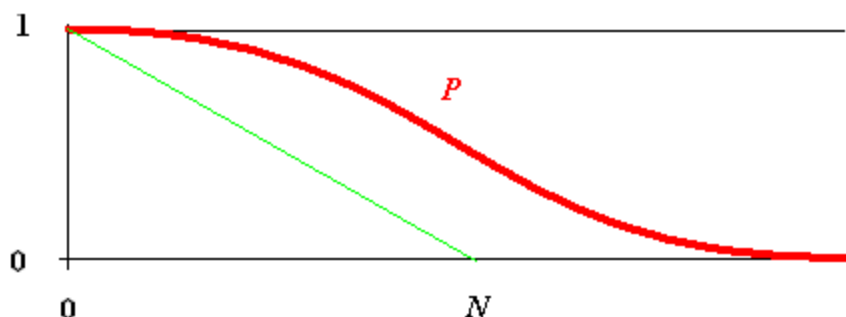
Dvuhodnotové vlastnosti ... klasická logika ... logika typu **Boolean**

Reálněhodnotové vlastnosti ... fuzzy logika ... logika typu **real**

(s reálnými čísly nakládáme jako se stupni pravdivosti výroků)

Řešení paradoxu hromady

Namísto ostrého skoku fuzzy logika umožňuje (a zdůvodňuje) pozvolné snižování stupňů pravdivosti:



Odebrání jednoho zrnka písku z hromady nepatrně sníží „stupeň hromadovitosti“ (např. o 0,000 001; klasická logika tento krok neumožňuje - zná jen 0 nebo 1).

Nula zrnek písku tedy nemusí být vůbec hromadou.

Fuzzy logika \neq pravděpodobnost

Obě pracují s hodnotami v intervalu $[0,1]$, ale mají rozdílné motivace i zákonitosti:

Pravděpodobnost ... *neznámý* výsledek *ostrého* jevu
(padne na kostce číslo 6?) ... stupně *pravděpodobnosti*

Fuzzy logika ... *známý* stav *neostrého* jevu
(je zpola vypitá sklenice plná?) ... stupně *pravdivosti*

Aplikace fuzzy logiky

- Přesné usuzování o přibližných pojmech

Např. *fuzzy čísla*:

zhruba 3 plus zhruba 1000 je zhruba 1000

množství „přibližně 543“ a „přibližně 546“ se přibližně rovnají

Lze je modelovat formálně pomocí fuzzy logiky

(lidé takto počítat umějí, je ale třeba to naučit i počítače)

- **Matematická fuzzy logika** = teorie (základní výzkum)
- **Aplikace fuzzy logiky**: zejm. strojové řízení (např. v pračkách, fotoaparátech aj.)

Dobré aplikace potřebují dobrou teorii

Trocha historie

Aristoteles - scholastici - Frege ... klasická logika

1910 - 1950 ... první neklasické logiky (Łukasiewicz, Heyting, Gödel)

1965 ... Zadeh: pojem fuzzy množiny

1968 - 1998 ... základy fuzzy logiky (Goguen, ..., Pavelka, Novák)

od r. 1975 ... aplikace fuzzy logiky a fuzzy množin (fuzzy řízení)

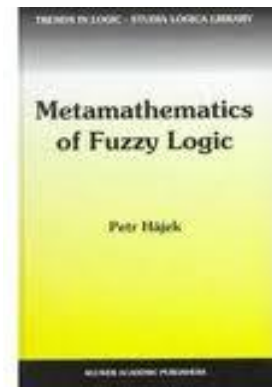
1998 ... Hájek: kniha *Metamathematics of fuzzy logic*

od r. 1998 ... systematické zkoumání matematické fuzzy logiky

(zejm. v Praze, Ostravě, Olomouci, Bratislavě, Vídni, Linci,
Barceloně, Sieně, Milánu, Kanazawě, Kjótu, ...)

Fuzzy logika v Česku

- Pionýři: Pultr, Pavelka, Novák (od 70. let)
- Pražská „Hájkova škola“ fuzzy logiky na ÚI AV ČR (Hájkova monografie z roku 1998 odstartovala celosvětový rozvoj *formální* fuzzy logiky, má přes 1000 citací)
- Teorie i aplikace na Ostravské univerzitě (Novák, ...), UP Olomouc (Bělohlávek, ...), ...
- Aplikované fuzzy metody i teorie na ÚTIA AV ČR, FEL ČVUT,



2. Fuzzy množiny

Zavedení pojmu fuzzy množiny

- Lotfi A. Zadeh, 1965: článek *Fuzzy sets* v časopise *Information and Control*
- Motivován inženýrskými aplikacemi
- Nyní volně ke stažení na [www](#) (v Google k 22. 6. 2012 první odkaz na dotaz: *Zadeh Fuzzy Sets*)



L.A. Zadeh (*1921)

Zadehův článek *Fuzzy Sets*

Z úvodu článku (volný překlad):

„... Soubor všech reálných čísel o hodně větších než 1, soubor všech krásných žen či soubor všech vysokých lidí zjevně netvoří množinu v obvyklém matematickém smyslu. Přesto takové ... soubory hrají důležitou roli v lidském myšlení, zvláště v oblastech rozpoznávání vzorů, předávání informací a abstrakce.“

„Půjde o pojem fuzzy množiny, tj. souboru s kontinuem stupňů náležitosti. Jak uvidíme, pojem fuzzy množiny poskytuje ...vhodný rámec v mnoha ohledech připomínající aparát běžných množin, je však obecnější a může mít širší pole aplikací ...“

Charakteristické funkce množin

- Charakteristická funkce (klasické) množiny $A \subseteq X$:

$$\chi_A(x) = 1, \text{ pokud } x \in A,$$

$$\chi_A(x) = 0, \text{ pokud } x \notin A,$$

pro všechna $x \in X$.

Jde tedy o funkci $\chi_A: X \rightarrow \{0, 1\}$, jednoznačně určenou ostrou množinou (a jednoznačně ji vymezující)

Pozn.: uzavřené intervaly značíme $[a, b]$, jak je zvykem v odborné literatuře (na rozdíl od středoškolských učebnic)

Definice fuzzy množiny

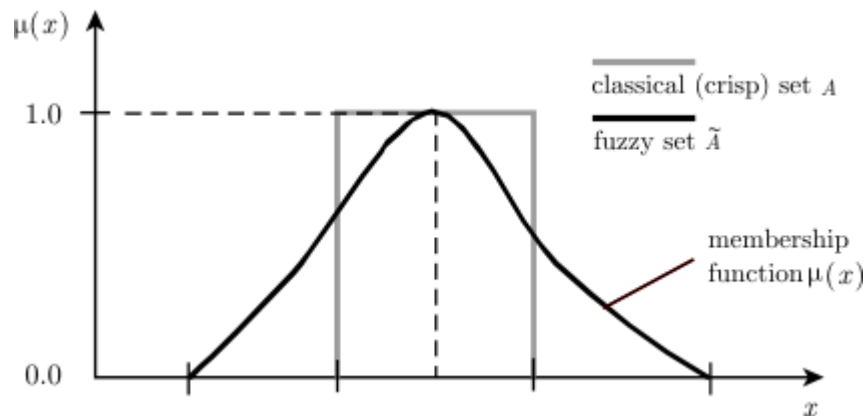
- Funkce příslušnosti **fuzzy množiny** A na (ostré) množině X :

$$\mu_A: X \rightarrow [0, 1].$$

Stupeň náležení $x \in A$ tedy může být libovolné číslo $\alpha \in [0, 1]$

Značení: $\mu_A(x)$, či prostě $A(x)$, často dokonce jen Ax .

- Teorie fuzzy množin** pracuje se *zobecněnými* charakteristickými funkcemi a nakládá s nimi, jako by vymezovaly neostře vymezené množiny. (Obr. Wikipedia)



Základní charakteristiky fuzzy množin

- Ostré množiny = ty, které nabývají jen stupňů náležení 0 či 1
- Prázdná fuzzy množina: $\mu_{\emptyset}(x) = 0$ pro všechna $x \in X$ (je ostrá)
- Jádro fuzzy množiny = ostrá množina „prototypických prvků“ (tj. náležících jí ve stupni 1): $\ker A = \{x \in X \mid Ax = 1\}$
- Nosič fuzzy množiny = ostrá množina prvků, které do ní alespoň částečně náleží: $\text{supp } A = \{x \in X \mid Ax > 0\}$
- α -řez fuzzy množiny = ostrá množina prvků, které do ní náleží alespoň ve stupni α : $A_{\alpha} = \{x \in X \mid Ax \geq \alpha\}$

Fuzzy množinu lze reprezentovat jako systém do sebe řazených ostrých množin (α -řezů)
- Výška fuzzy množiny: $\text{hgt } A = \sup \{\alpha \mid A_{\alpha} \neq \emptyset\}$
- Normální fuzzy množina: $\ker A \neq \emptyset$ (tj. má prototypické prvky)

Někteří autoři používají definici $\text{hgt } A = 1$, což není totéž

Operace s fuzzy množinami

- Průnik fuzzy množin A a B: $(A \cap B)x = \min(Ax, Bx)$,
- Sjednocení fuzzy množin A a B: $(A \cup B)x = \max(Ax, Bx)$,
- Doplněk fuzzy množiny A do ostré množiny X: $(-A)x = 1 - Ax$,
pro všechna $x \in X$.

Pro ostré množiny souhlasí s obvyklými množinovými operacemi.
Možností pro takové operace je ale více: často se používají např.:

- Součinný průnik: $(A \cdot B)x = Ax \cdot Bx$
- Odvážný průnik: $(A \otimes B)x = \max(0, Ax + Bx - 1)$, aj.

\cap , \cup pracují po řezech (α -řez $A \cap B$ je průnikem α -řezů A a B), ale
 $-$, \cdot , \otimes nikoli

Inkluze a rovnost fuzzy množin

- Fuzzy množina A je **fuzzy podmnožinou** fuzzy množiny B , právě když pro všechna $x \in X$ platí: $Ax \leq Bx$.
- Značení: $A \subseteq B$, jako by šlo o ostré množiny
- Ekvivalentně: $A \subseteq B$, právě když každý α -řez A je (klasickou) podmnožinou α -řezu B .
- Rovnost fuzzy množin je dána rovností funkcí příslušnosti
(**extenzionalita = fuzzy množina je určena svými prvky - s jejich stupni náležením**)
 - Tj. $A = B$, právě když platí obě inkluze, podobně jako pro klasické množiny

Zákony platné pro fuzzy množiny

Pozorujte, že platí např. následující zákony teorie fuzzy množin:

- $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$
- $\emptyset \subseteq A$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $-(A \cap B) = -A \cup -B$
- $-(-A) = A$
- $\text{Ker } A \subseteq A \subseteq \text{Supp } A$
- $A \otimes B \subseteq A \cdot B \subseteq A \cap B$

Klasicky platný zákon $(A \cap B) \cup (A \cap -B) = A$ ale obecně platí pouze pro ostré množiny; pro fuzzy množiny je platná jen jedna inkluze: $(A \cap B) \cup (A \cap -B) \subseteq A$.

3. Fuzzy logika

Požadavky na fuzzy konjunkci

- Stupeň pravdivosti konjunkce $p \& q$ závisí jen na stupních pravdivosti výroků p, q („**extenzionalita**“).

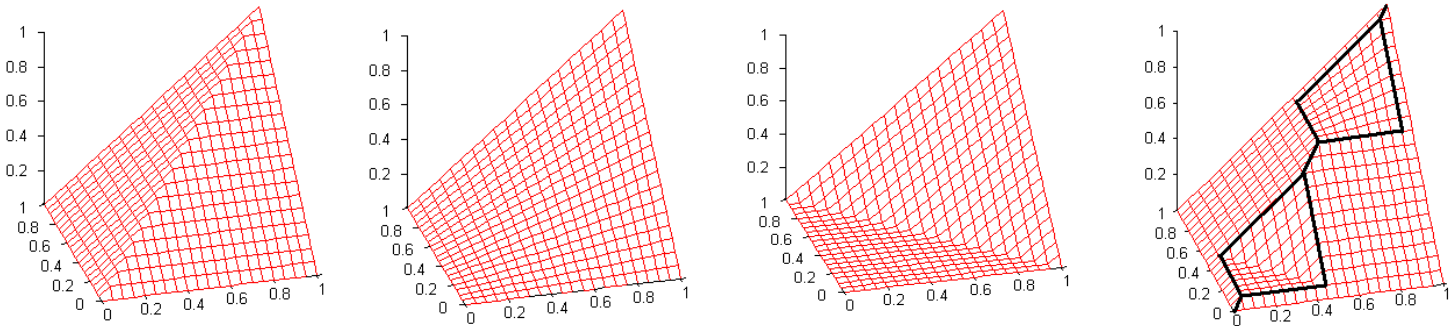
(Zkoumají se i neextenzionální spojky, jsou ale složitější)

- **Komutativita** (nezáleží na pořadí): $p \& q = q \& p$
- **Asociativita** (nezáleží na prioritě): $p \& (q \& r) = (p \& q) \& r$
- **Monotonie** (pravdivější výroky \Rightarrow pravdivější konjunkce):
jestliže $p \leq q$, pak $p \& r \leq q \& r$
- **Klasické hodnoty** (1 = plná pravdivost, 0 = plná nepravdivost):
 $1 \& p = p, \quad 0 \& p = 0$
- **Spojitosť** (malá změna stupňů $p, q \Rightarrow$ malá změna stupně $p \& q$).
- Idempotence $p \& p = p$ není vždy vhodná, proto ji nevyžadujeme

= tzv. **spojité t-normy**

Spojité t-normy

- Minimová (též: Gödelova) t-norma: $p \&_G q = \min(p, q)$
- Součinnová t-norma: $p \&_{\Pi} q = p \cdot q$
- Łukasiewiczova t-norma: $p \&_{\mathcal{L}} q = \max(0, p + q - 1)$



Věta (Mostert & Shields, 1957): všechny spojité t-normy lze jistým způsobem složit z těchto tří základních

Podrobnosti: anglická Wikipedie, heslo *T-norm*

Ostatní výrokové spojky

- Ostatní výrokové spojky lze definovat na základě konjunkce
- **Disjunkce** („nebo“): maximum
- **Negace**: vychází různě pro různé t-normy:
 - Łukasiewiczova t-norma: $\text{ne-}p = 1 - p$ („involutivní negace“)
 - Minimová a produktová t-norma („striktní negace“):
$$\text{ne-}p = 1, \text{ jestliže } p = 0$$
$$\text{ne-}p = 0, \text{ jestliže } p > 0$$

Příklad: nevysoký (involutivní), nevinný (striktní)

- Důležitá spojka (vyjadřující plnou pravdivost výroků):
$$\Delta x = 1, \text{ jestliže } x = 1$$
$$\Delta x = 1, \text{ jestliže } x < 1$$

Zákony fuzzy logiky

- Některé výroky dostávají ve všech fuzzy logikách hodnotu 1 ... **tautologie fuzzy logiky**. Např.:
 - $p \& q = q \& p$
 - $p \leq \text{ne}-(\text{ne}-p)$
- Některé platí jen v některých fuzzy logikách. Např.:
 - $\text{ne}-(\text{ne}-p) = p$ (**zákon dvojité negace**)
platí v Łukasiewiczově, ale ne v produktové ani Gödelově
 - $p \& p = p$
platí v Gödelově, ale ne v Łukasiewiczově ani produktové
- Některé zákony platí v klasické, ale ne ve fuzzy logice:
 - $p \text{ nebo } \text{ne}-p$ (**zákon vyloučení třetího**)

Formální fuzzy logika

- Tautologie fuzzy logiky lze axiomatizovat = Hájková logika BL („Basic fuzzy Logic“):
 - $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$
 - $p \& (p \rightarrow q) \rightarrow q \& (q \rightarrow p)$
 - $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \& q \rightarrow r)$
 - $(p \& q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$
 - $((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow r) \rightarrow r$
 - $0 \rightarrow p$
 - Pravidlo *modus ponens*: z již odvozených p , $p \rightarrow q$ lze odvodit q
- Speciální fuzzy logiky = rozšíření BL o další axiomy, např.:
 - Łukasiewiczova: $(p \rightarrow 0) \rightarrow 0) \rightarrow p$
 - Gödelova: $p \rightarrow p \& p$
- Formální fuzzy logika studuje vlastnosti a vzájemné vztahy těchto logik (úplnost, složitost, teorii důkazů, ...)

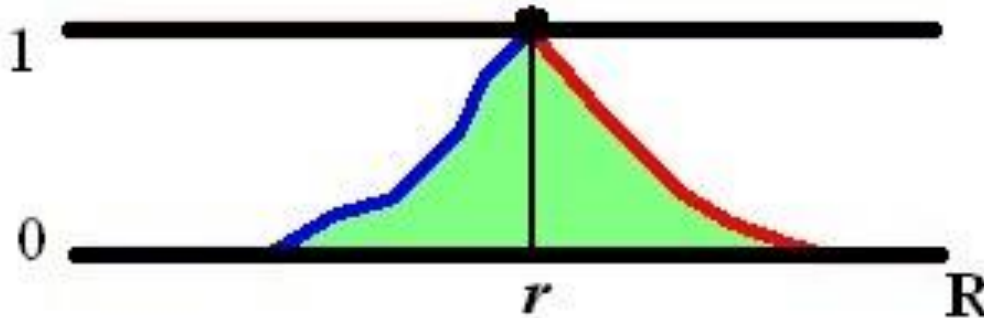
4. Fuzzy čísla

Pojem fuzzy čísla

- Přibližná množství: přibližně 5, o hodně více než 1000, zhruba mezi 100 a 200, ...
- Modelování ostrými množinami se dostává do obvyklých problémů, lze je ale modelovat fuzzy množinami
- Potřebujeme nejen modelovat přibližné množství nějakou fuzzy množinou, ale také definovat aritmetické operace pro takováto fuzzy čísla

Reprezentace pomocí „hustoty“

- Stupeň příslušnosti vyjadřuje, jak moc je pravdivý výrok „ x je přibližně r “



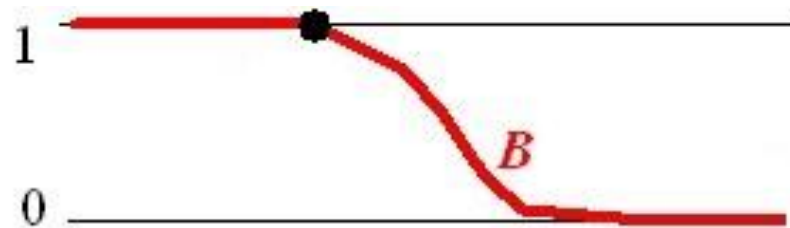
- Pro snazší výpočty se často vyžaduje např. linearita příslušných omezujících funkcí příslušnosti (tzv. trojúhelníková fuzzy čísla) apod.

Reprezentace pomocí distribuce

- Stupeň příslušnosti vyjadřuje, jak moc je pravdivý výrok „ x je větší než fuzzy číslo A “



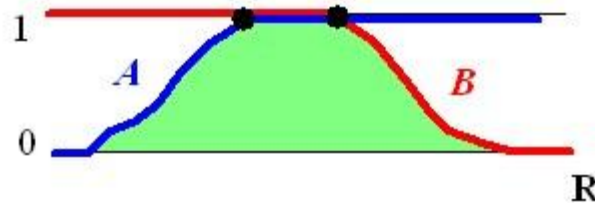
Případně, jak moc je x menší než fuzzy číslo B :



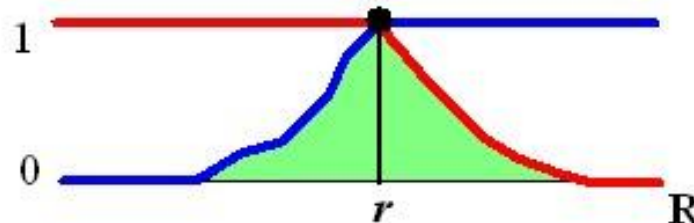
Umožňuje modelovat: ostrá čísla, nekonečná fuzzy čísla, ...

Fuzzy intervaly

- Kombinací dolních a horních odhadů lze modelovat fuzzy intervaly $[A, B]$, kde A a B jsou fuzzy čísla (distribuce):



- Čísla reprezentovaná hustotou jsou vlastně degenerované fuzzy intervaly:



Operace s fuzzy číslly

- Operace s fuzzy číslly mohou být definovány pomocí obecné metody přenášení operací na fuzzy množiny, zvané *Zadehův princip rozšíření*
- Tyto operace s fuzzy číslly pak tvoří *fuzzy aritmetiku*, v níž jsou dokazatelné takové věty, jako „přibližně 5 + přibližně 3 = přibližně 8“, nebo že sčítání fuzzy čísel je komutativní
- V některých verzích fuzzy aritmetiky jsou dokazatelné i věty typu „2 + 2 = 5 pro velmi vysoké hodnoty dvojky“ apod.

5. Fuzzy podobnost

Klasické relace ekvivalence

- **Binární relace** = vztah mezi dvěma objekty
- Matematicky reprezentována množinou (usp.) dvojic objektů (těch, které jsou v daném vztahu)
- Místo $\langle x, y \rangle \in R$ píšeme zpravidla jen Rxy
- Vlastnosti binárních relací:
 - **Reflexivita**: pro každé $x \in X$ je Rxx
 - **Symetrie**: pro každé $x, y \in X$: jestliže Rxy , pak Ryx
 - **Tranzitivita**: pro každé $x, y, z \in X$: jestliže Rxy a Ryz , pak Rxz
- Reflexivní, symetrické a tranzitivní relace se nazývají relace **ekvivalence**

Poincarého paradox

- Uvažujme relaci „x je (v nějakém smyslu) nerozlišitelné od y“ (např. mají nerozlišitelnou výšku apod.)
- Taková relace nerozlišitelnosti by intuitivně měla být tranzitivní (a reflexivní i symetrická): je-li x nerozlišitelné od y a y od z, pak je x nerozlišitelné i od z
- Tranzitivita relace nerozlišitelnosti ale vede k paradoxu:
Uvažujme posloupnost objektů, z nichž každé dva sousední jsou nerozlišitelné. Podle tranzitivity pak musejí být od sebe nerozlišitelné i krajní objekty. Při dostatečně dlouhé posloupnosti však bývají krajní objekty snadno rozlišitelné
- Použití netranzitivních relací nerozlišitelnosti však rovněž vede ke zcela protiintuitivním výsledkům. (Kde v řadě má nastat ostrý zlom v rozlišitelnosti, když sousední členy jsou nerozlišitelné?)
- Srv. paradox hromady. Řešení opět nabízí fuzzy logika.

Fuzzy řešení Poincarého paradoxu

- Fuzzy relace: R_{xy} může mít stupně příslušnosti mezi 0 a 1
- Podmínka tranzitivity, ovšem vyjádřená ve fuzzy logice, bude pro fuzzy nerozlišitelnost R platit:

$$R_{xy} \& R_{yz} \leq R_{xz}$$

- Vzpomeňme: fuzzy $\&$ je spojitá t-norma (např. Łukasiewiczova), \leq ve fuzzy logice odpovídá (plně platné) implikaci
- Pro Łukasiewiczovu t-normu platí:
 $0,99 \& 0,99 = 0,98$; $0,98 \& 0,99 = 0,97$; $0,97 \& 0,99 = 0,96$ atd.
- Podmínka fuzzy tranzitivity tedy může být v Poincarého posloupnosti splněna:

Objekty:	a_0	a_1	a_2	a_3	a_{99}	a_{100}	a_{101}
$a_i \approx a_{i+1}$:	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	
$a_1 \approx a_i$:	1	0,99	0,98	0,97	0,01	0	0

Fuzzy podobnosti

- Relace fuzzy nerozlišitelnosti (a fuzzy podobnosti) tedy mohou splňovat fuzzy podmínky reflexivity, symetrie a tranzitivity, aniž by narážely na Poincarého paradox
- Fuzzy reflexivita: $R_{xx} = 1$
- Fuzzy symetrie: $R_{xy} = R_{yx}$
- Fuzzy tranzitivita: $R_{xy} \& R_{yz} \leq R_{xz}$ (pro všechna x, y, z)
- Fuzzy relace ekvivalence (splňující tyto 3 podmínky) se nazývají **fuzzy relace podobnosti** (či nerozlišitelnosti)
- Od relací **fuzzy rovnosti** se navíc vyžaduje podmínka, že $R_{xy} = 1$ jen pro $x = y$
- Podobně se zkoumají relace **fuzzy uspořádání** apod., obecně jde o **teorii fuzzy relací** (část teorie fuzzy množin)

6. Aplikace fuzzy logiky

Fuzzy řízení

- Fuzzy relace se používají v praxi pro řízení procesů
- Základní myšlenkou je zpětná vazba, kterou nám může poskytnout funkce příslušnosti
- Dostatečnost přibližného řešení a upřesňování touto zpětnou vazbou v situacích, kdy je potřeba řídit proces rychle (pro přesné řešení by bylo třeba řešit diferenciální rovnici, což je náročné)
- Řízení je prováděno pomocí fuzzy pravidel reprezentovaných fuzzy relacemi, např.:
 - Je-li teplota VELMI VYSOKÁ, ventil má být ZAVŘENÝ
 - Je-li teplota VYSOKÁ, ventil má být PŘÍŠKRCENÝ
 - Je-li teplota NÍZKÁ, ventil má být POOTEVŘENÝ
 - Je-li teplota VELMI NÍZKÁ, ventil má být OTEVŘENÝ
- Příslušné neostré vlastnosti (VYSOKÁ, POOTEVŘENÝ, ...) jsou reprezentovány fuzzy množinami

Příklady aplikací fuzzy řízení

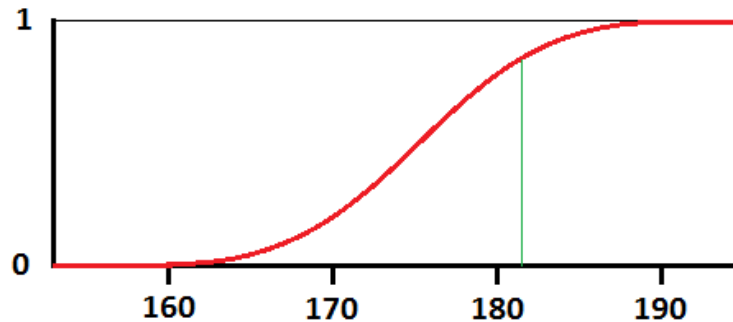
- První realizovaná aplikace:
 - cementová pec řízená fuzzy regulátorem (Dánsko 1975)
- Ukázkové příklady:
 - obrácené kyvadlo
 - vyhýbání překážkám, ...
- Praktické aplikace:
 - Pračky (regulace teploty a přítoku vody)
 - Fotoaparáty (ostření, clona, ...)
 - Toalety (vyhřívání sedátek)
 - Finská jezera (výška vody řízena fuzzy regulátorem založeným na Łukasiewiczově logice)
 - CADIAG = vídeňský expertní systém pro diagnostiku srdečních chorob (kombinace fuzzy a pravděpodobnostních metod, dosti nepřehledná pravidla, ale diagnostikuje lépe než lékař)

Neurčitost stupňů pravdivosti

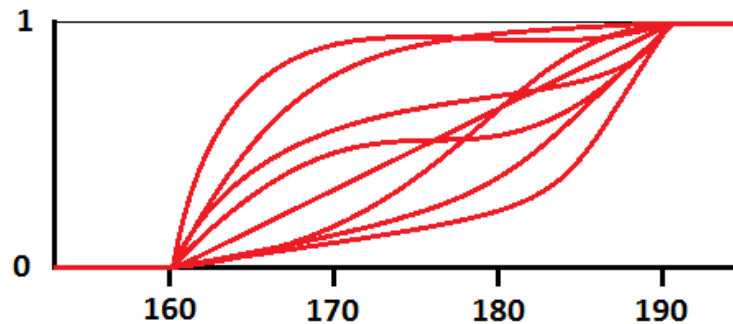
- Jazyk *neurčuje* hodnoty pravdivostních stupňů vágních výroků (... je 35-letý člověk mladý ve stupni 0,76, nebo 0,81?)
- Inženýrské fuzzy metody obvykle nějaké konkrétní stupně zvolí (jako technické zpřesnění pojmů)
- *Formální* (neboli *matematická*) fuzzy logika ale zkoumá zákony, které platí pro *všechna* taková technická zpřesnění. Proto jí na konkrétních stupních *nezáleží* a její zákony platí *obecně* pro *všechny* neostré vlastnosti.
(podobně jako zákony klasické logiky platí pro všechny možné stavy světa a jako zákony pravděpodobnosti platí pro všechny hodnoty subjektivních pravděpodobností)

Fuzzy logika vs. fuzzy inženýrství

- Inženýrské fuzzy metody: arbitrární volba funkce příslušnosti



- Formální logika: uvažuje všechny možnosti



- Logika: reprezentuje správně, ale nic nespočítá
- Inženýrství: spočítá vše, ale nereprezentuje vágnost správně

Jak je tedy důležité být fuzzy?

- Pomocí fuzzy logiky vyřešíme paradoxy (hromady, Poincarého)
- Lépe modelujeme neostré a vágní vlastnosti, přibližná čísla atd.
- Inženýrské aplikace fuzzy metod umožňují rychlé a efektivní řízení procesů
- Je k tomu ale třeba neklasického usuzování a sofistikovaných metod aplikované matematiky

Proto:

- Kdykoli je to možné, je lepší být ostrý
- Občas je ale lepší být fuzzy